

Θέματα από Πανελλήνιες εξετάσεις

Μετρικές σχέσεις - Κεφάλαιο 9°

Επιμέλεια θεμάτων: Χατζόπουλος Μάκης

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν

$d_{(O,R)}^P > 0$, όπου $d_{(O,R)}^P$ η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R).

β. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90^\circ$.

ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ABΓ εκφράζεται από τον

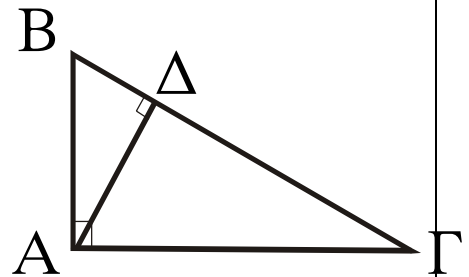
τύπο: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_a^2}{2}$.

2. Στο διπλανό σχήμα το ΑΔ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της

Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της

Στήλης Β, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.



Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	1. $BD \cdot B\Gamma$
	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
β. AD^2	3. $BD \cdot \Delta\Gamma$
	4. $\Gamma\Delta \cdot \Gamma B$
γ. $\frac{AB^2}{\Delta\Gamma^2}$	5. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$

3. Στο σχήμα της προηγούμενης άσκησης (2) δίνεται ότι $AB = 6$ και $B\Delta = 3,6$.

α. Να δείξετε ότι $B\Gamma = 10$.

β. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

4. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε

κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Θέματα από Πανελλήνιες εξετάσεις

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	1. AB^2+BG^2
β. AG^2	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{AG^2}$	3. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma \cdot B\Delta$
	5. $B\Gamma^2-AB^2$
	6. $AB \cdot B\Gamma$

- 5.** Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος $A\Delta$, για το οποίο έχουμε $B\Delta=1$ και $B\Gamma=3$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

B1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $A\Delta$ είναι:

- α. 2 β. $\sqrt{3}$ γ. $\sqrt{2}$ δ. $3\sqrt{2}$

B2. Το μήκος της πλευράς AB είναι:

- α. $\sqrt{3}$ β. 3 γ. $\sqrt{2}$ δ. $\sqrt{5}$ (**Θ1B/2001**)

- 6.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο $AM = \mu_\alpha$.

Αν ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$,

α. να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

β. να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$.

(**Θ2/2002**)

- 7.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 120^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$.

β. Αν επιπλέον ισχύει $\beta = 2\gamma$, να αποδείξετε ότι η διάμεσος μ_α του

παραπάνω τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με $\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$.

(**Θ2ΣΕΠ/2001**)

- 8.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$ να συμπληρώσετε τη σχέση

$AG^2 - AB^2 = \dots\dots\dots$ ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

(**Θ1A2/2000**)

- 9.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

B1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται: $\beta=8$, $\gamma=6$ και $\mu_\alpha=5$. Η πλευρά α είναι ίση με:

- A. 7 B. 4 Γ. 10 Δ. 9 E. 11

B2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\alpha=4$, $\beta=7$, $\gamma=5$, $A\Delta$ το ύψος και AM η διάμεσος. Η προβολή ΔM της διαμέσου AM πάνω στη πλευρά α είναι

Θέματα από Πανελλήνιες εξετάσεις

ίση με:

A. 4

B. 8

Γ. 8/3

Δ. 5

Ε. 3 (Θ1Β/2000)

10. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει $3\beta^2 + 2\gamma^2 = 2\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι:

α. Ισχύει η σχέση $\mu_\alpha^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$, όπου μ_α η διάμεσος στην πλευρά α .

β. $\hat{A} > 90^\circ$.

γ. Η προβολή ΜΔ της διαμέσου ΒΔ στην πλευρά β είναι ίση με $\frac{3}{4} \beta$. (Θ3ΣΕΠ/2002)

11. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6, ΒΓ=12 και ΓΑ=8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

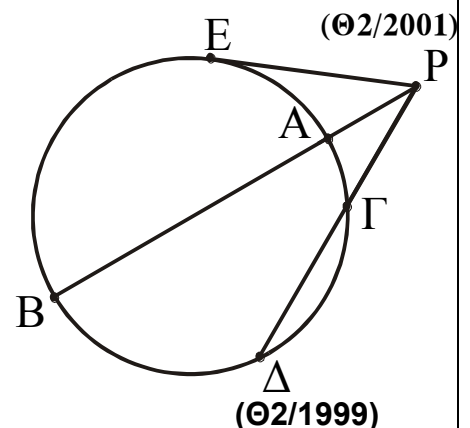
γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

12. Στο διπλανό σχήμα το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι ΡΒ και ΡΔ τέμνουσες αυτού. Αν ΑΒ = 9, ΡΓ = 4 και ΓΔ = 5, τότε:

α) Να υπολογίσετε το ΡΑ

β) Το ΡΕ είναι ίσο με:

A. 9, B. 5, Γ. 4, Δ. 3, E. 6.



13. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια διάμετρος του ΑΒ.

Από ένα σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ=ΟΔ και φέρουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΔ^2 = ΑΔ \cdot ΔΒ$

β) $ΜΓ \cdot ΓΕ = ΜΔ \cdot ΔΖ = R^2 - ΟΔ^2$.

γ) $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 2(R^2 + ΟΔ^2)$

δ) $\frac{ΜΓ}{ΓΕ} + \frac{ΜΔ}{ΔΖ} = 2 \frac{R^2 + ΟΔ^2}{R^2 - ΟΔ^2}$

(Θ4/2000)