

1. Μήκος κύκλου

Ορισμός: *Μήκος του κύκλου (O,R)* λέγεται το όριο της ακολουθίας (P_n) των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (O,R) όταν το πλήθος n των πλευρών αυξάνεται απεριόριστα.

Δηλαδή το μήκος του κύκλου (O,R) είναι ο αριθμός L .

Αποδεικνύεται ότι ο λόγος $L/2R$ του μήκους ενός κύκλου (O,R) προς τη διάμετρό του είναι σταθερός, δηλαδή ο ίδιος για οποιονδήποτε κύκλο. Ο λόγος $L/2R$ είναι ίσος με έναν θετικό αριθμό που παριστάνεται διεθνώς με το γράμμα π .

Έτσι είναι $\frac{L}{2R} = \pi$

από όπου προκύπτει ότι το μήκος L κύκλου (O,R) είναι $L = 2\pi R$

2. Μήκος τόξου

Το μήκος τόξου $\hat{AB}$ κύκλου (O,R) ορίζεται όπως το μήκος του κύκλου. Δηλαδή:

Ορισμός: *Μήκος του τόξου $\hat{AB}$ του κύκλου (O,R)* είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός S που είναι όριο της ακολουθίας (P_n) των περιμέτρων των τεθλασμένων των εγγεγραμμένων στο τόξο $\hat{AB}$.

Το μήκος S τόξου μ° δίνεται από τον τύπο $S = \frac{\pi R \mu}{180}$

Το τόξο κύκλου (O,R) με μήκος R λέγεται ακτίνιο $1(\text{rad})$. Ένα τόξο α rad έχει μήκος $S = \alpha R$

Ακόμη, αν ένα τόξο μ° είναι α rad, τότε ισχύει $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$

3. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

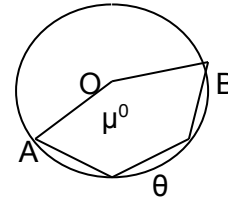
Ορισμός: *Ονομάζουμε εμβαδόν κυκλικού δίσκου (O,R)* το όριο της ακολουθίας (E_n) των εμβαδών των κανονικών n -γώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (O,R), όταν το πλήθος n των πλευρών αυξάνεται απεριόριστα.

Δηλαδή $E = \lim E_n$

Το εμβαδόν E κυκλικού δίσκου (O,R) είναι $E = \pi R^2$

4. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Ορισμός 1: Κυκλικός τομέας λέγεται το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $\hat{AOB}$ και του κυκλικού δίσκου (O,R) .



Ορισμός 2: Εμβαδόν του κυκλικού τομέα ονομάζουμε το όριο της ακολουθίας των εμβαδών των εγγεγραμμένων στον τομέα πολυγώνων.

Το εμβαδόν E_μ κυκλικού τομέα μ^0 δίνεται από τον τύπο $E_\mu = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$

Επίσης ισχύει και ο τύπος $E_\mu = \frac{1}{2}SR$

όπου S το μήκος του τόξου $\hat{AB}$.

Ορισμός 3: Κυκλικό τμήμα λέγεται το καθένα από τα δύο σημειοσύνολα στα οποία χωρίζεται ένας κυκλικός δίσκος (O,R) από μια χορδή του.

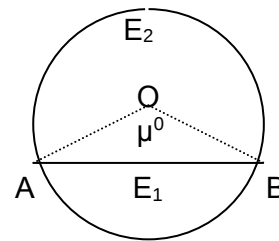
Το εμβαδόν E_1 υπολογίζεται από την ισότητα

$$E_1 = E_\mu - E(\hat{OAB})$$

ενώ το E_2 από την ισότητα

$$E_2 = E_{360^\circ - \mu^0} + E(\hat{OAB}) \quad \text{ή} \quad E_2 = E - E_1$$

όπου E το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O,R) .

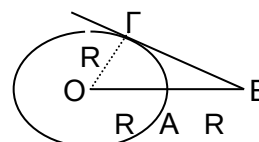
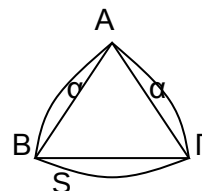


Ασκήσεις

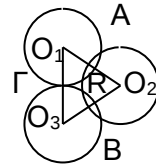
1. Η περίμετρος κυκλικού τομέα AOB ενός κύκλου (O,R) είναι $6+\pi$. Αν $\hat{AOB}=60^\circ$, το μήκος της ακτίνας R είναι:
Α. 6 Β. 3 Γ. 2 Δ. 4 Ε. 5
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Θεωρούμε κύκλο (O,R), μια διάμετρό του AB και τα σημεία Γ και Δ των ακτίνων OA και OB αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι το μήκος του κύκλου (O,R) είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των κύκλων με διαμέτρους ΑΓ, ΓΔ και ΔΒ.
3. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος σε κυκλικό τομέα ακτίνας R και γωνίας 60° .
4. Το μήκος ενός τόξου με ακτίνα $R=12$ είναι $S=3\pi$. Να βρείτε πόσων μοιρών είναι το τόξο.
5. Στο εσωτερικό ημικυκλίου διαμέτρου AOB=2 R γράφουμε ημικύκλια με διαμέτρους OA και OB. Να υπολογιστεί το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου που εφάπτεται των τριών ημικυκλίων.
6. Έστω τεταρτοκύκλιο AOB ακτίνας R και ημικύκλιο διαμέτρου OB στο εσωτερικό του. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου OAB.
7. Έστω δύο κύκλοι (O,R) και (O',R) των οποίων η διάκεντρος OO' έχει μήκος $OO'=R\sqrt{3}$.
α) Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι τέμνονται.
β) Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των κύκλων.
8. Δύο (O,3R) και (O',R) εφάπτεται εξωτερικά στο σημείο A. Φέρνουμε την κοινή εξωτερική εφαπτομένη ΒΓ αυτών. Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ.
9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A}=90^\circ$). Με διαμέτρους τις AB, ΑΓ και ΒΓ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο (BΓ,A). Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Ασκήσεις πλήρους ανάπτυξης

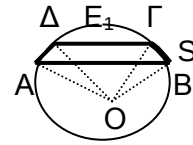
1. Δίνεται κύκλος (O,R) και τα διαδοχικά σημεία A, B και Γ, έτσι ώστε να είναι $AB=R\sqrt{2}$ και $BΓ=R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων AB, ΒΓ και ΓΑ.
2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ πλευράς α.
Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (A,α), (B,α) και (Γ,α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η περίμετρος και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ABΓ.
3. Έστω κύκλος (O,R) και μια ακτίνα του OA. Στην ημιευθεία OA θεωρούμε σημείο B, έτσι ώστε $AB=AO$. Αν ΒΓ η εφαπτομένη του κύκλου, να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ.



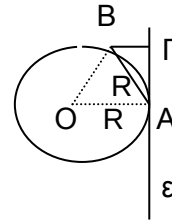
4. Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά στα σημεία A, B και Γ . Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.



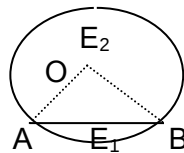
5. Δίνεται ένας κύκλος (O, R) και δύο παράλληλες χορδές του $AB = \lambda_3$ και $\Gamma\Delta = \lambda_6$ προς το ίδιο μέρος του κέντρου O . Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τραπεζίου που έχει κορυφές τα A, B, Γ και Δ .



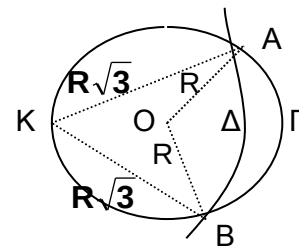
6. Θεωρούμε κύκλο (O, R) , χορδή $AB = R$, την εφαπτομένη ϵ του κύκλου στο σημείο A και τη $B\Gamma \perp \epsilon$. Να βρεθεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.



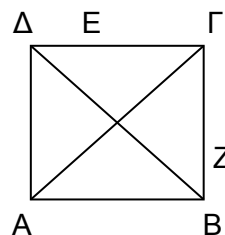
7. Να βρεθούν τα εμβαδά των δύο κυκλικών τμημάτων στα οποία χωρίζεται κύκλος (O, R) από χορδή του $AB = \lambda_6$.



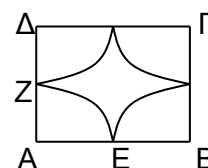
8. Με κέντρο ένα σημείο K κύκλου (O, R) και ακτίνα ίση προς $R\sqrt{3}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον (O, R) στα σημεία A και B . Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του μηνίσκου $A\Gamma B\Delta$.



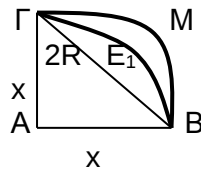
9. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά a . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα το μισό της διαγωνίου του γράφουμε τόξα που βρίσκονται στο εσωτερικό του τετραγώνου. Να βρεθεί το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του τετραγώνου.



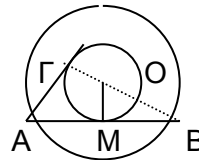
10. Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά a . Με κέντρα τις κορυφές A, B και Δ και ακτίνα ίση με $a/2$ γράφουμε τόξα στο εσωτερικό του τετραγώνου. Να βρείτε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου καμπυλόγραμμου τετραπλεύρου.



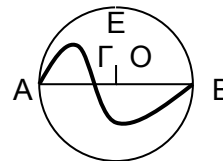
11. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 2R$. Γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma$ εκτός του τριγώνου και τόξο κύκλου (A, AB) με άκρα B και Γ . Να βρεθεί το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου από το ημικύκλιο και το τόξο αυτό.



12. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και $(O, 2R)$. Φέρνουμε χορδή AB του μεγαλύτερου κύκλου που εφάπτεται του μικρότερου στο σημείο M και την εφαπτομένη $A\Gamma$ του μικρότερου. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα ελάσσονα τόξα AB και $M\Gamma$ και τα τμήματα MB και $A\Gamma$.



13. Θεωρούμε κύκλο με διάμετρο $AB = 2R$ και σημείο Γ της AB , τέτοιο ώστε $GA/\Gamma B = \mu/\nu$. Με διαμέτρους τις $A\Gamma$ και ΓB γράφουμε ημικύκλια εκατέρωθεν της AB . Να αποδειχθεί ότι η γραμμή των ημικυκλίων αυτών χωρίζει τον κυκλικό δίσκο (O, R) σε δύο μέρη με λόγο εμβαδών μ/ν .



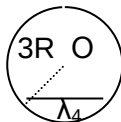
Άσκηση αντιστοίχισης

Σε κάθε κυκλικό τμήμα της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την παράσταση που δίνει το μήκος του αντίστοιχου τόξου του κύκλου $(O, 3R)$ που υπάρχει στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α

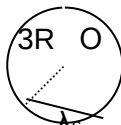
ΣΤΗΛΗ Β

1)



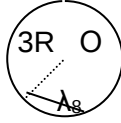
α) $\frac{\pi R}{2}$

2)



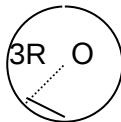
β) πR

3)



γ) $\frac{\pi R^2}{12}$

4)



δ) $\frac{3\pi R}{4}$

ε) $12\pi R$

στ) $\frac{3\pi R}{2}$

ζ) $\frac{\pi R}{3}$