

Γεωμετρία Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων

3-4-2022

Εκφωνήσεις



Στέλιος Μιχαήλογλου

www.Askisopolis.gr

Θεώρημα Θαλή

2^ο Θέμα

14534. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$ και $A\Gamma=9$. AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z εσωτερικό στην AM ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και GE . (Μονάδες 10)

14579. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στην $A\Gamma$. Επίσης $AB = 3A\Delta$.

α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{B\Delta}{A\Delta}$ και $\frac{BE}{E\Gamma}$. (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $A\Gamma = 3,9$ και $\Gamma Z = 1,3$ να αποδείξετε ότι η ZE είναι παράλληλη της AB . (Μονάδες 10)

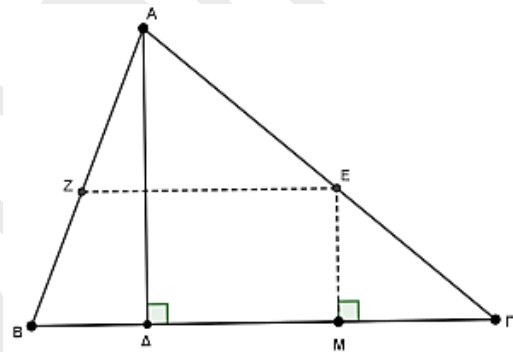
15830. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $B\Gamma$ σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{E\Gamma}$

(Μονάδες 10)

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{M\Delta}{M\Gamma}$

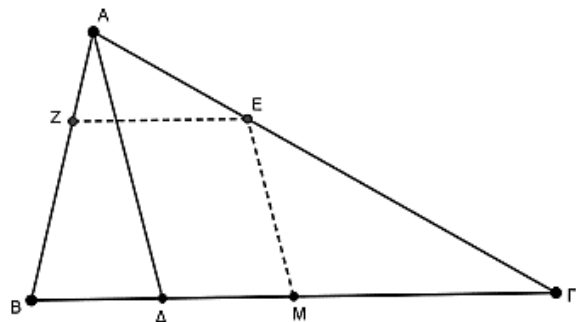
(Μονάδες 15)



15831. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην $A\Delta$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{EA}{E\Gamma} = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 15)

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 10)



4^ο Θέμα

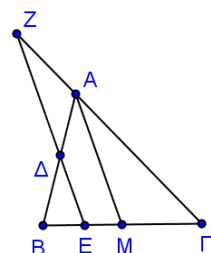
14499. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε AM τη διάμεσό του και E τυχαίο σημείο του τμήματος BM . Από το E φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AM που τέμνει την πλευρά AB στο Δ και την προέκταση της ΓA στο Z .

α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{B\Delta}{\dots}$ ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{\Gamma E}{\dots} = \frac{\dots}{\Gamma A}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του E στο BM .



(Μονάδες 13)

Ομοιότητα

2^ο Θέμα

14535. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: $AB = 9$, $A\Gamma = 15$ και $A = 48^\circ$, $Z\Delta = 12$, $ZE = 20$ και $Z = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $E\Delta Z$ ($E\Delta = EZ$) γνωρίζουμε ότι:

$A = 48^\circ$, $Z = 66^\circ$ και $AB = 3 \cdot E\Delta$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων. (Μονάδες 12)

14537. Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$A = 48^\circ$, $B = 53^\circ$, $E = 79^\circ$ και $Z = 48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων. (Μονάδες 6)

14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα AB και ΔE είναι παράλληλα και τα τμήματα $A\Gamma$ και ΓE είναι τέτοια, ώστε $A\Gamma = 2\Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.

ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα AE και BD τέμνονται στο Γ , τα τρίγωνα ΓAB και ΓDE που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους AB και DE είναι τέτοιες, ώστε $AB = 2 \cdot DE$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓAB και ΓDE είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).

ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές $A\Gamma$ και ΓE των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

16086. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες e_1 , e_2 και e_3 είναι παράλληλες. Δίνονται ότι $\Gamma E = 4$, $O\Delta = 3$, $OA = 12$, $OB = 6$.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα $O\Gamma$ και ΔZ .

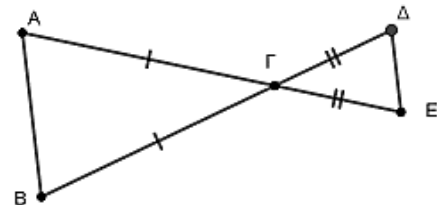
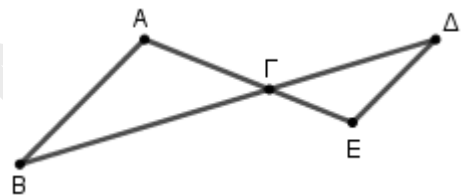
(Μονάδες 10)

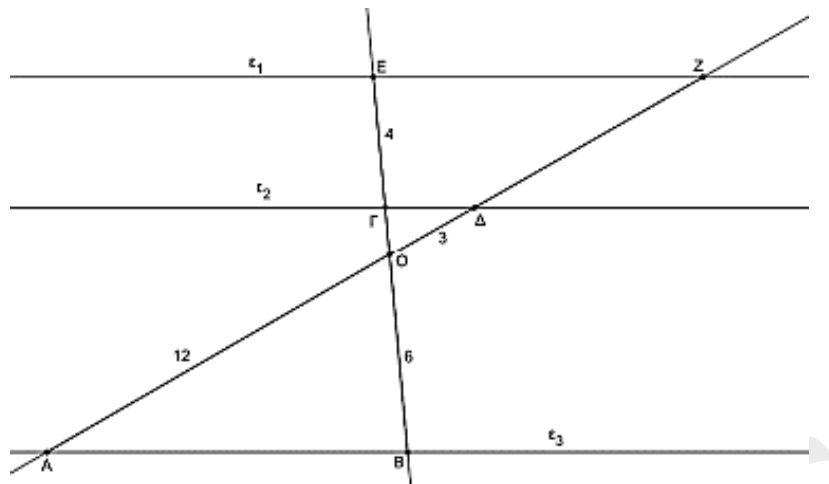
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEZ και OBA είναι όμοια.

(Μονάδες 09)

γ) Αν $O\Gamma = 1.5$ και $\Delta Z = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{AB}$.

(Μονάδες 06)



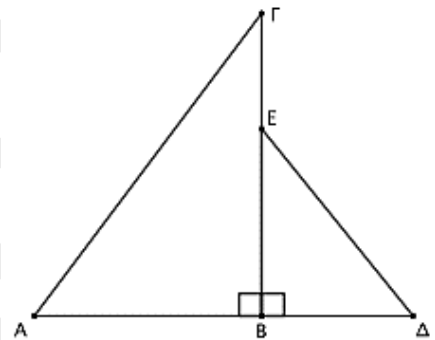


16099. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $A = \Delta$, $AG = 36$, $BD = 16$ και $ED = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBE είναι όμοια.
(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά AB .

(Μονάδες 10)



16100. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι $AE = 5$, $AG = 4$, $EG = 2$, $\Delta E = 6$, $BE = 15$ και $BD = 12$.

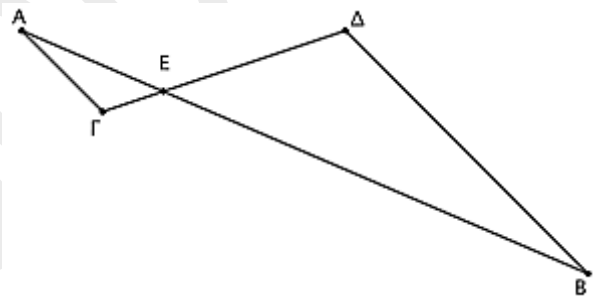
α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{BD}{AG}$, $\frac{\Delta E}{EG}$, $\frac{BE}{AE}$.
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και $BE\Delta$ είναι όμοια.
(Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AE\Gamma$ και $BE\Delta$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$A = \dots\dots\dots$, $\Gamma = \dots\dots\dots$, $\Delta E\Gamma = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 8)



16113. Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, E σημείο τομής των διαγώνιων, $AE = 6$, $AB = 8$, $GE = 15$ και $\Delta E = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και $\Gamma E\Delta$ είναι όμοια.

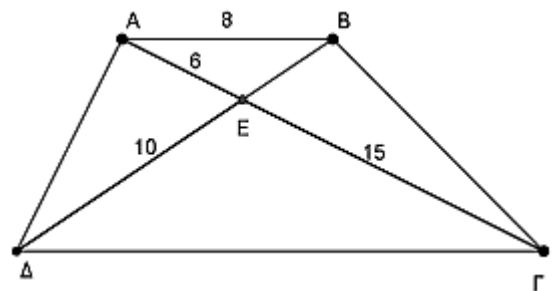
(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 07)



16126. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 36$ και $B\Gamma = 24$.

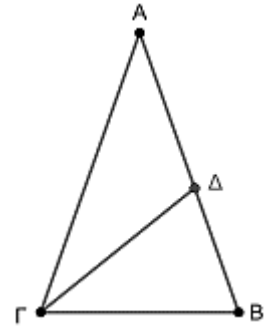
Το σημείο της Δ πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $B\Delta = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)



16755. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$ και σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Gamma = 2\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ και $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

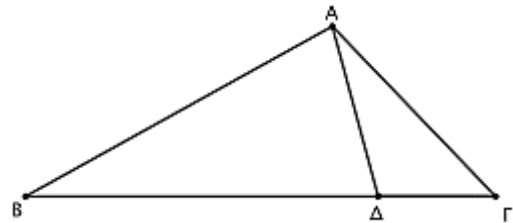
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$BA\Gamma = \dots\dots\dots$, $B = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 8)



Πυθαγόρειο Θεώρημα

2^ο Θέμα

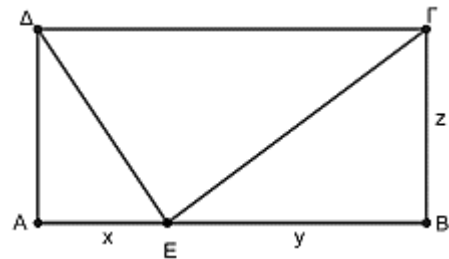
16805. Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x , y , z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

(Μονάδες 12)



16757. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ και $AG = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $AD = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

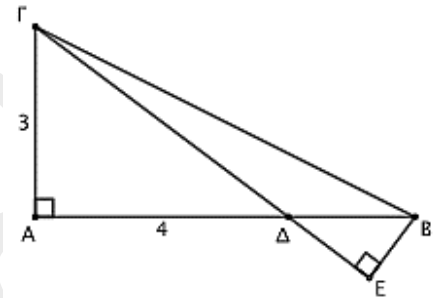
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)



17342. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 7$, $\Gamma = 45^\circ$ και ύψος $A\Delta = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\Delta = 4$.

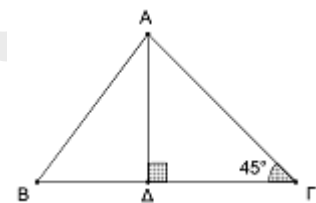
(Μονάδες 5)

ii. $A\Gamma = 4\sqrt{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

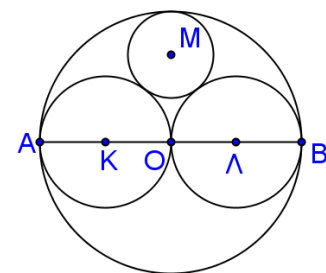
(Μονάδες 12)

4^ο Θέμα

14500. Δύο ίσοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στη κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες.

(Μονάδες 06)



Στήλη Α	Στήλη Β
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ.

(Μονάδες 13)

16133. Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα και έχουν μήκη αντίστοιχα και , οι γωνίες και είναι ορθές και τα σημεία και ανήκουν στην ίδια ευθεία.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ. (Μονάδες 7)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια.

(Μονάδες 7)

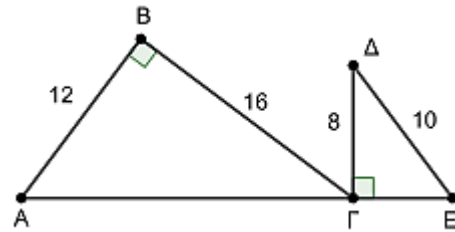
γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΣΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του . Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$,

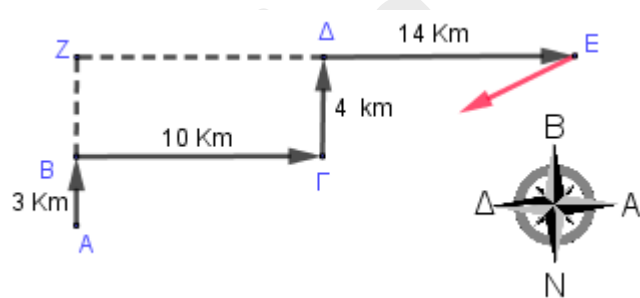
(Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$

(Μονάδες 5)



14533. Δυο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

17348. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με ΑΒ = 6 και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε ΒΕ = 2. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

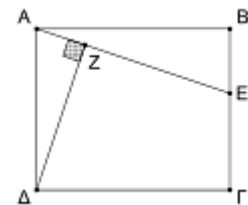
α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ.



(Μονάδες 8)

Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος

2^ο Θέμα

14549. Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : α=7, β=3 και γ=5.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

16080. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5, ΒΓ = $\sqrt{41}$ και ΑΓ = 8.

α) Να σχεδιάσετε την προβολή ΑΔ, της ΑΒ στην ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ = 3, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ.

(Μονάδες 12)

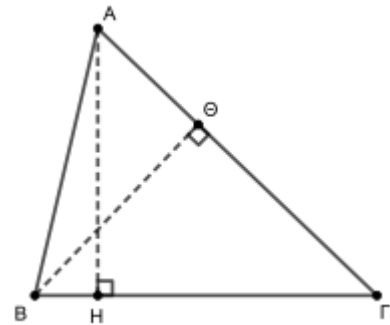
16101. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 8, ΑΓ = 6 και ΒΓ = 11.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 15)

16804. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ φέρουμε τα όψη του AH και BΘ.**α)** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:**i.** Η προβολή την πλευράς BΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα**ii.** Η προβολή τη πλευράς AB στην πλευρά BΓ είναι το τμήμα**iii.** Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά**iv.** Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά**v.** $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + \dots - 2BΓ \cdot \dots$ **vi.** $BΓ^2 = \dots + ΑΓ^2 - 2\dots \cdot ΑΘ$ 

(Μονάδες 15)

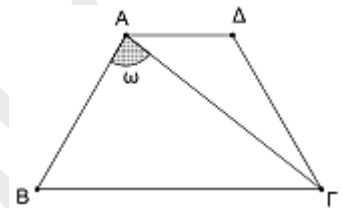
(Μονάδες 10)

β) Αν $ΑΒ = 4$, $BΓ = 5$ και $ΑΓ = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.**17343.** Στο τετράπλευρο ABΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $ΑΔ = 3$, $ΑΒ = ΓΔ = 5$, $BΓ = 8$ και $\Delta = 120^\circ$.**α)** Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία ΒΑΓ.Δίνεται ότι $\text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2}$.

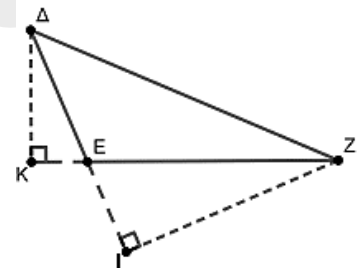
(Μονάδες 15)

**17354.** Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα όψη του ΔΚ και ΖΙ.**α)** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:**i.** Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα**ii.** Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα**iii.** Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά**iv.** Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά**v.** $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2EZ \cdot \dots$ **vi.** $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2\dots \cdot \Delta I$

(Μονάδες 15)

β) Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

(Μονάδες 10)



Εμβαδό βασικών σχημάτων

2^ο Θέμα

15978. Στο τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών AB, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:

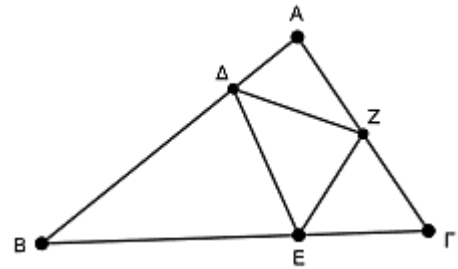
$$A\Delta = \frac{1}{4}AB, BE = \frac{2}{3}B\Gamma \text{ και } \Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

$$\alpha) (\Delta\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma), (BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma), (\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma).$$

(Μονάδες 15)

$$\beta) (\Delta EZ) = \frac{5}{24}(AB\Gamma)$$

(Μονάδες 10)



16102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Από το κέντρο Ο φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές AB και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ όπως φαίνεται στο σχήμα.

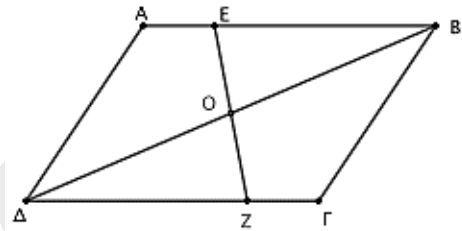
Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (\Delta OZ) = (BOE).$$

(Μονάδες 10)

$$\beta) (\Delta OEA) = (B\Gamma ZO).$$

(Μονάδες 15)



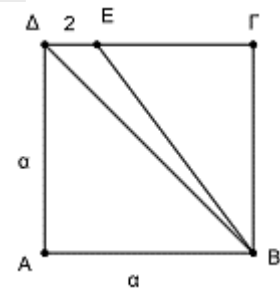
16817. Στο τετράγωνο ABΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε ΔΕ = 2. Αν γνωρίζουμε ότι: $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE.

(Μονάδες 12)



18560. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά AB και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου ABΓΔ.

ii. του τραπέζιου ΑΕΓΔ.

(Μονάδες 12)

4^ο Θέμα

16135. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 10 και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής Α στην ΒΓ.

α) Αν ΔΒ = 2 να υπολογίσετε:

i. το ύψος ΑΔ του τριγώνου ABΓ,

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι $(AB\Gamma) = 5A\Delta$.

(Μονάδες 7)

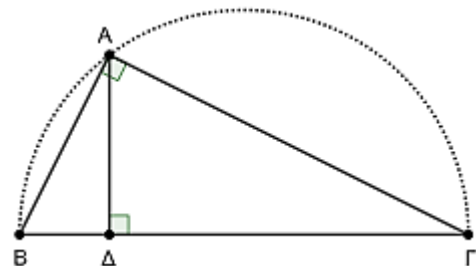
ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του Α πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός;

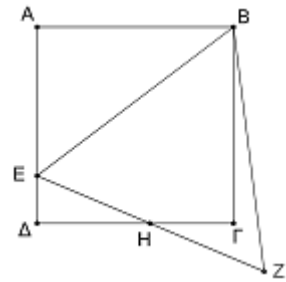
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



17349. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς AD , ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. το ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ . (Μονάδες 8)
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου BEZ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



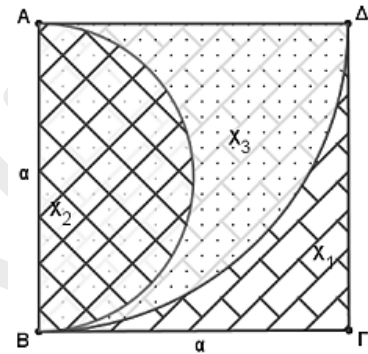
(Μονάδες 9)

17599. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο A και ακτίνα a .

- α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:

$$(X_1) = \frac{a^2}{4} \cdot (4 - \pi). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

- β) Με διάμετρο AB κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 . (Μονάδες 11)
 γ) Ποιο από τα χωρία X_1 και X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 9)

18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

- α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

- i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
 ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$.

Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
 ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.
 iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$. (Μονάδες 15)

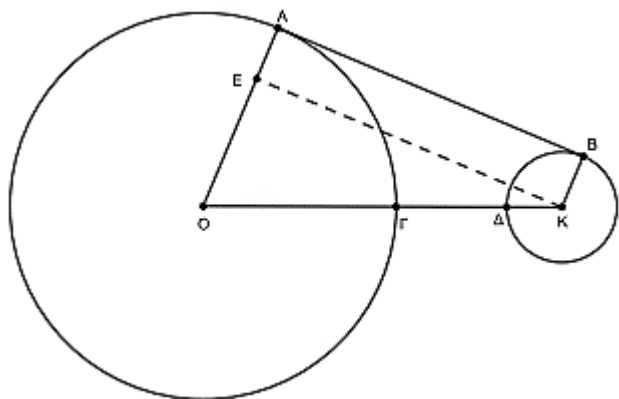
18557. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E \parallel A\Delta$ και $\Delta Z \parallel \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραπεζίου.

- α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$. (Μονάδες 9)
 β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)
 γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

18565. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $r=2$. Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K, r) στο σημείο Δ .

- α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:
 i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB .

(Μονάδες 10)



- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ABKO. (Μονάδες 07)
- β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του ABKE να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ; (Μονάδες 08)

18564. Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας. (Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου. (Μονάδες 08)

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

18566. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο ΒΓΔΕ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το Α και παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $BZ = BΓ$. Από τα σημεία Γ και Ζ φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα ΒΖ και ΒΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Η.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

3^ο Θέμα

17908. Σε τρίγωνο ABΓ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABΓ, ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ABΓ από την κορυφή Α, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔΒ. (Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 7)

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2^ο Θέμα

15979. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG = 5$ και $A = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BΓ = 5\sqrt{3}$ (Μονάδες 13)

β) $(ABΓ) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ (Μονάδες 12)

17346. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = 6$, $BΓ = 4$ και $B = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 2\sqrt{7}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 8)

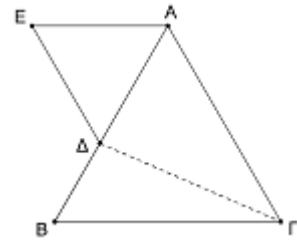
Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

17347. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Λόγος Εμβαδών

2^ο Θέμα

15978. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, τα Δ , E , Z , είναι σημεία των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα, ώστε:

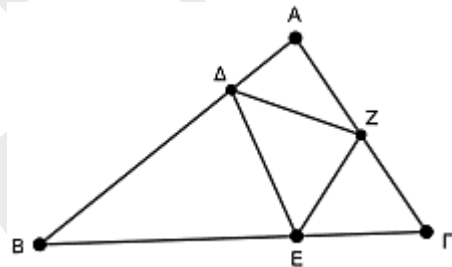
$A\Delta = \frac{1}{4}AB$, $BE = \frac{2}{3}B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(A\Delta Z) = \frac{1}{8}(AB\Gamma)$, $(BE\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$, $(\Gamma EZ) = \frac{1}{6}(AB\Gamma)$.

(Μονάδες 15)

β) $(\Delta EZ) = \frac{5}{24}(AB\Gamma)$

(Μονάδες 10)



16127. Ένα τρίγωνο έχει πλευρά $B\Gamma = 9$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 8$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και η ομόλογη πλευρά της $B\Gamma$ είναι η $B'\Gamma' = 6$. Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$,

(Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

(Μονάδες 9)

16770. Δίνεται γωνία $\chi O\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Πάνω στην $O\delta$ παίρνουμε τυχαία σημεία A και B . Θεωρούμε σημείο E στην πλευρά $O\chi$ τέτοιο ώστε $OEB = 70^\circ$ και σημείο Δ στην $O\psi$ τέτοιο ώστε $O\Delta A = 70^\circ$.

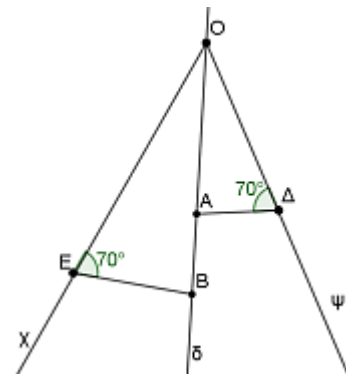
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta A$ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OEB .



(Μονάδες 09)

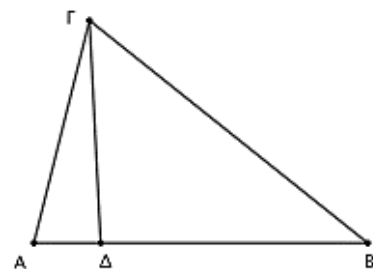
16756. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5A\Delta$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$.

(Μονάδες 10)



18561. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$ και την πλευρά AB κατά τμήμα $BE=AB$.

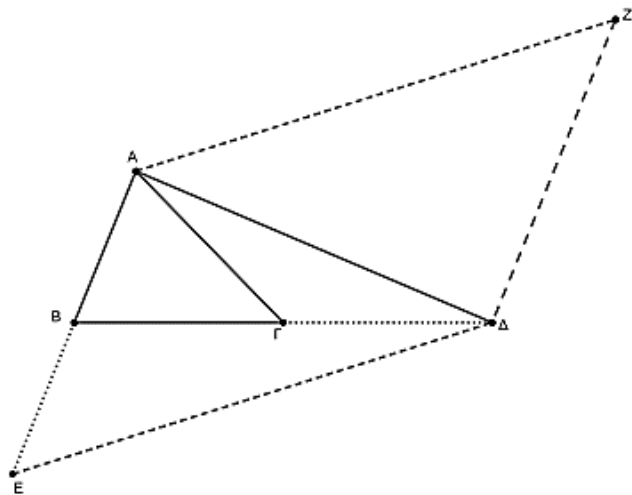
α) Αν $(AB\Gamma)=25\text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(B\Delta E)=50\text{ m}^2$.

(Μονάδες 10)

β) Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ED και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην EA που τέμνονται στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AZ\Delta$ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)



4^ο Θέμα

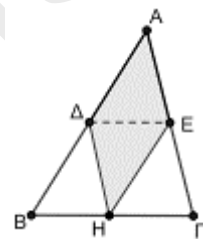
16582. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 07)

ii. Αν H είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.



(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου $A\Delta H E$ και του τριγώνου $AB\Gamma$;

(Μονάδες 06)

17956. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Η παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η παράλληλη στην $A\Gamma$ τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(EK\Lambda) = \frac{(BE\Delta)}{2}$.

(Μονάδες 09)

β) $(EZ\Lambda) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$.

(Μονάδες 09)

γ) Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ .

(Μονάδες 07)

17907. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABHZ$, $A\Gamma\Theta I$, $B\Gamma P\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta I$, $ABHZ$, $B\Gamma P\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A .

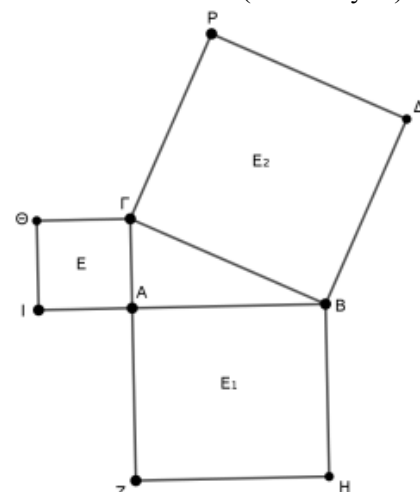
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, AIZ , $BH\Delta$, $\Gamma P\Theta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η $A\Gamma=1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZH\Delta P\Theta I$.

(Μονάδες 7)



18101. Στο σχήμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ισοσκελή με $AG = BG = 3$ και $AB = AD = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες B και BAG είναι ίσες.

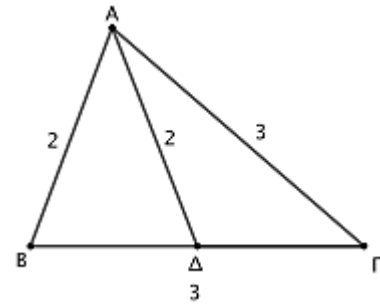
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta A$ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$ των εμβαδών των δύο

τριγώνων.



(Μονάδες 8)

18301. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και GA κατά τμήματα AD και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $AD = \frac{1}{2}AB$ και $AE = \frac{2}{5}AG$, να υπολογίσετε τον λόγο

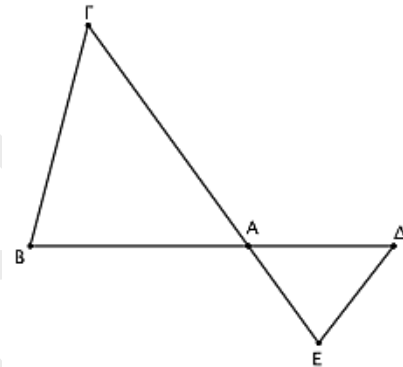
$\frac{(ADE)}{(AB\Gamma)}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι $AD = \frac{1}{\lambda}AB$ και $AE = \frac{\lambda}{\mu}AG$ όπου λ, μ είναι θετικοί

ακέραιοι, να αποδείξετε ότι ο λόγος $\frac{(ADE)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος

από την τιμή του λ .

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(ADE) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



(Μονάδες 10)

18371. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της AG . Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

α) i. Να αποδείξετε ότι $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$. (Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος

$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν $\Delta = \Gamma$, ως εντός εναλλάξ

των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού

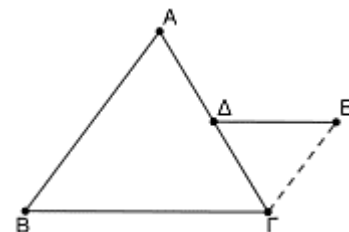
$\frac{\Delta\Gamma}{AG} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους Δ, Γ ίσες, τα τρίγωνα

θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς

τους $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος.

Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)



3^ο Θέμα

19037. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E, Z των πλευρών $AB, B\Gamma, AG$ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB, E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma, Z\Gamma = \frac{1}{2}AG.$$

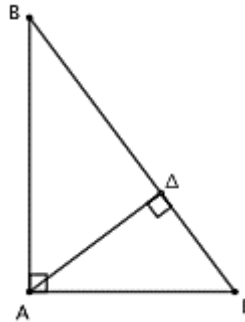
- α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(\Delta BE)}{(\Delta B\Gamma)}, \frac{(\Delta ΓΖ)}{(\Delta B\Gamma)}, \frac{(\Delta ΖΑΔ)}{(\Delta B\Gamma)}$. (Μονάδες 15)
- β) Αν είναι $(\Delta B\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ . (Μονάδες 10)

Κανονικά πολύγωνα

1^ο Θέμα

16097.α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.
- ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
- iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα BΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



- iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.
 - v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι. (Μονάδες 10)
- β)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του. (Μονάδες 15)

Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

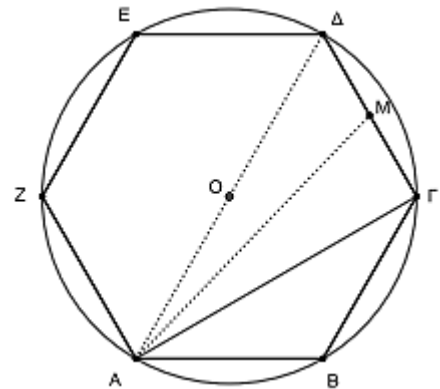
4^ο Θέμα

17600. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ABΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $(ABΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

β) $(AMΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (Μονάδες 6)

γ) $(AMΔΕΖ) = R^2\sqrt{3}$. (Μονάδες 12)



Μήκος κύκλου

4^ο Θέμα

16928. Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. (Μονάδες 08)

γ) Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{30}{\pi}, \frac{15\sqrt{3}}{\pi}, P_{12}, P_{24}$ και 10. (Μονάδες 07)

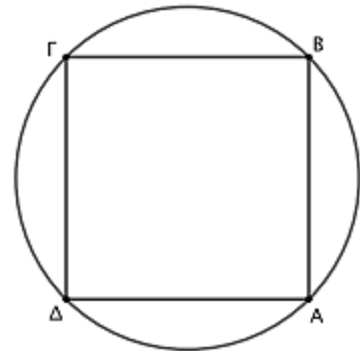
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2^ο Θέμα

18097. Τετράγωνο ABΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$. (Μονάδες 12)

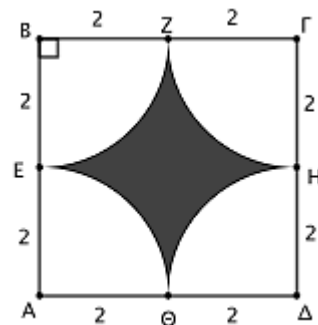


18098. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς $a = 4$.

Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$. (Μονάδες 12)



18099. Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$. (Μονάδες 7)

