

Γεωμετρία Β' Λυκείου

1 Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας την κατάλληλη ένδειξη Σ για το σωστό Λ για το λάθος:

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} < 90^\circ$ ισχύει $a^2 = b^2 + \gamma^2 + 2b\gamma \sin A$. Σ Λ

β) Αν ΑΔ ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), τότε $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}$ Σ Λ

γ) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο της ομοιότητάς τους. Σ Λ

δ) Το εμβαδόν τραπέζιου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος. Σ Λ

Β. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις::

α) Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει $AD^2 = \dots\dots\dots$,

β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ ισχύει: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\dots\dots\dots$

Γ. Έστω ένας κύκλος (Ο, R).

α) Στον κύκλο (Ο, R) να εγγράψετε κανονικό εξάγωνο.

β) Να υπολογίσετε την πλευρά λ_6 και το απόστημα α_6 ως συνάρτηση της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου στο κανονικό εξάγωνο.

~ • ~

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ τέτοιες ώστε $3\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\hat{A} < 90^\circ$.

β) Να εκφράσετε την διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α .

~ • ~

3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \sqrt{19}$, $\beta = 5$ και $\gamma = 3$.

α) Να υπολογίσετε την γωνία $\hat{A}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο.

~ • ~

4 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$.

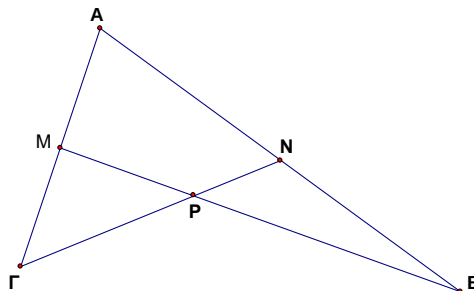
α) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των βάσεων ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα και Κ τυχαίο σημείο του τμήματος ΜΝ, τότε να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΚΓ έχουν ίσα εμβαδά.

β) Αν Ο είναι το μέσο του τμήματος ΜΝ, να δείξετε ότι ισχύει: $(ΑΟΔ) = \frac{1}{4} (ΑΒΓΔ)$.

5 Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Μ, Ν είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\frac{(ΑΜΒ)}{(ΑΝΓ)} = 1$

β) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΓΝ και ΒΜ τότε $(ΜΡΓ) = (ΡΝΒ)$.



~ • ~

6 Α. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των καθετών πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινουσας.

Β. Ένα κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία του (πλευρά λ_6 , απόστημα α_6 , περίμετρος P_6 , εμβαδόν E_6) που βρίσκονται στην στήλη Α με το ίδιο τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. λ_6	α. $R\sqrt{3}$
2. α_6	β. $6R$
3. P_6	γ. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
4. E_6	δ. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$
	ε. R

Γ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ < ΑΓ$) με διάμεσο ΑΜ και ύψος ΑΔ, να συμπληρώσετε τη σχέση $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = \dots$ ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα διαμέσων.

~ • ~

7 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 5$, $\gamma = 3$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = \sqrt{19}$.

β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες.

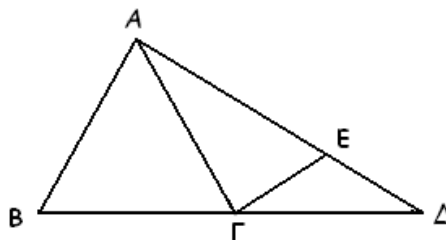
γ. Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς β στην γ.

δ. Να υπολογίσετε την διάμεσο μ_a .

~ • ~

8 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά ευθύγραμμο τμήμα $ΓΔ = ΒΓ$.

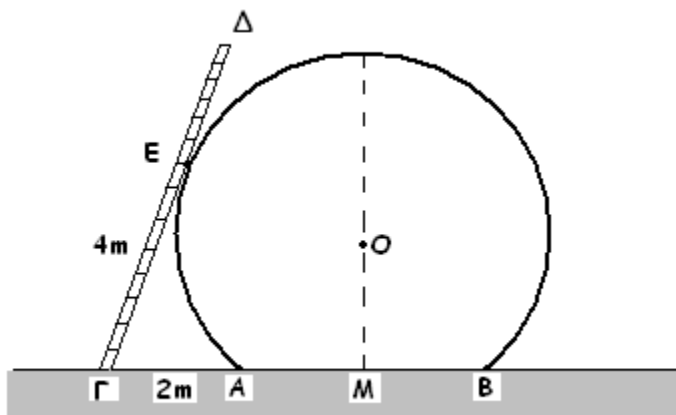
α. Να αποδείξετε ότι: $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 + 2ΒΓ^2$.



β. Αν Ε σημείο της πλευράς ΑΔ ώστε $AE=2ED$ να δείξετε ότι $(\Gamma\Delta E) = \frac{1}{6} AB\Delta$.

~ • ~

9 Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τούνελ σε σχήμα τόξου κύκλου ακτίνας 6m για τη διέλευση ενός δρόμου πλάτους AB. Εξωτερικά του τούνελ ένας τεχνίτης τοποθέτησε μια σκάλα ΓΔ έτσι ώστε η βάση Γ της σκάλας να απέχει από την άκρη Α του τούνελ 2m και να ακουμπά σε αυτό στο σημείο Ε. Το τμήμα ΓΕ της σκάλας έχει μήκος 4m.



α. Να υπολογίσετε το πλάτος AB του δρόμου.

β. Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος του τούνελ στο μέσο Μ του δρόμου.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος της εγκάρσιας τομής του τούνελ όπως φαίνεται στο σχήμα.

~ • ~

10 Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) $B\Gamma=7$, $A\Gamma=5$ και $AB=3$.

α) Ναδειχθεί ότι $\hat{A}=120^\circ$.

β) Ναδειχθεί ότι $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

γ) Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου ΒΑΓ.

~ • ~

11 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=a$, $\Delta\Gamma=7a$ και $A\Delta=B\Gamma=5a$.

α) Να υπολογισθεί το ύψος του τραπεζίου.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν το τραπεζίου.

~ • ~

12 Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί τον προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας την κατάλληλη ένδειξη Σ για το σωστό Λ για το λάθος:

- α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$ Σ Λ
- β) Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο, R) ορίζεται με τον τύπο $\Delta_{(O,R)}^P = R^2 + OP^2$. Σ Λ
- γ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$.
- δ) Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_n και απόστημα α_n ισχύει η σχέση $\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2$. Σ Λ
- ε) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο ομοιότητας. Σ Λ

~ • ~

13 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=3, ΑΓ=5 και $\hat{A} = 60^\circ$. Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ. Να βρεθούν:

- α) Η πλευρά ΒΓ.
 β) Η διάμεσος ΑΜ.
 γ) Η προβολή της διαμέσου ΑΜ πάνω στην ΒΓ.

~ • ~

14 Α. Διατυπώστε το Πυθαγόρειο θεώρημα. (Σχήμα – σχέση)

Β. Σημειώστε σωστό ή λάθος :

α. Εάν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ τότε $\hat{A} > 90^\circ$. Σ Λ

β. Όταν δυο χορδές ΑΒ, ΑΓ ενός κύκλου τέμνονται σε σημείο Ρ τότε ισχύει $PA \cdot PB = PG \cdot PD$. Σ Λ

γ. Το 1^ο θεώρημα διαμέσων περιγράφεται από την σχέση $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_a^2 + \frac{\alpha^2}{2}$. Σ Λ

δ. Το μήκος κύκλου δίνεται από τον τύπο $L = 2\pi R$. Σ Λ

Γ. Σε κάθε σχήμα της στήλης Α αντιστοιχίστε τον τύπο του Εμβαδού του που βρίσκεται στην στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α

1. τρίγωνο

2. τετράγωνο

3. ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

4. τραπέζιο

5. παραλληλόγραμμο

ΣΤΗΛΗ Β

i. $\alpha \beta$

ii. $\beta \nu$

iii. $\frac{\beta \nu}{2}$

iv. α^2

v. $\frac{(B + \beta) \nu}{2}$

~ • ~

15 Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ όπου ΑΒ//ΔΓ, ΑΒ=4 cm ΔΓ=7 cm και ΑΔ=4 cm. Να βρεθούν:

- i) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
- ii) Το μήκος της πλευράς ΒΓ.
- iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

~ • ~

16 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και κέντρου Ο παίρνουμε σημείο Γ ώστε ΑΓ= 6cm και ΒΓ= 8cm.

- α. Αποδείξτε ότι η ακτίνα του κύκλου είναι R=5cm.
- β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
- γ. Να βρείτε το εμβαδόν και το μήκος του ημικύκλιου.

~ • ~

17 Α. Να αποδείξετε ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι **ίση** ή **παραπληρωματική** με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχει τις γωνίες αυτές.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Β1. Αν α,β,γ είναι οι πλευρές τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

Β2. Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = \lambda$.

Β3. Αν η δύναμη ενός σημείου Σ ως προς κύκλο με κέντρου Ο και ακτίνας R είναι θετική, τότε το σημείο Σ είναι εξωτερικό του κύκλου.

~ • ~

18 Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6, ΒΓ=12 και ΓΑ=8.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.
- β) Να υπολογίσετε τη διάμεσό του ΑΜ.
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στη πλευρά ΒΓ.

~ • ~

19 Α. Να αποδείξετε ότι: αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Β. Να δώσετε τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):

- α) Αν το σημείο Ρ είναι εσωτερικό του κύκλου (0,R) τότε ισχύει $\Delta_{(0,R)}^P > 0$.

β) Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha M\Delta$, όπου $M\Delta$ είναι η προβολή της διαμέσου AM πάνω στην $B\Gamma$.

γ) Αν E το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ τότε $E = \tau\rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

δ) Σε κύκλο (O, R) το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα μ^0 δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$

ε). Στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι $\lambda_3 = R\sqrt{2}$.

~ • ~

20 Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB=10\text{cm}$ $A\Delta=8\text{cm}$ και M τυχαίο σημείο της $\Delta\Gamma$ τότε:

α. Να βρεθούν: i) Το εμβαδόν του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ABM

β. Αποδείξτε ότι $(A\Delta M) + (B\Gamma M) = (AMB)$.

~ • ~

21 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$, $A\Gamma=8$ και $B\Gamma=10$.

α) Να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε το ύψος u_a .

γ) Να βρείτε την προβολή της πλευράς AB πάνω στην $B\Gamma$.

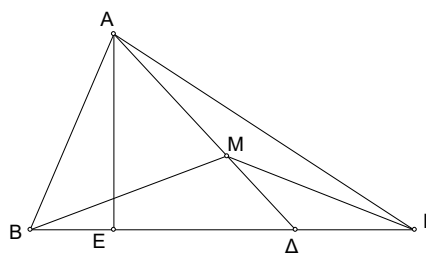
δ) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου

~ • ~

22 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε: $B\Delta=3\Delta\Gamma$. Αν M τυχαίο σημείο της $A\Delta$ και AE το ύψος προς τη $B\Gamma$ ναδειχθεί ότι:

α) $(A\Delta\Gamma) = \frac{1}{4} (AB\Gamma)$.

β) $\frac{(AMB)}{(B\Delta M)} = \frac{(AM\Gamma)}{(\Delta M\Gamma)}$.

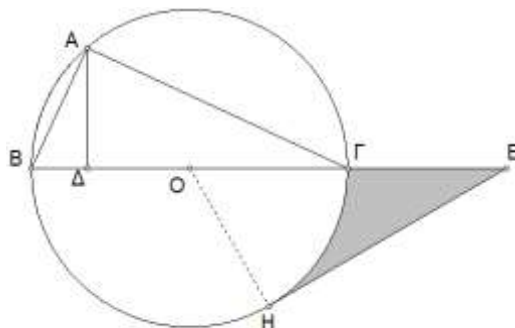


~ • ~

23 Στο διπλανό σχήμα η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου (O, R) , $AB=6$, $(AB\Gamma)=24$, $A\Delta$ ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ με $A\Delta=\frac{24}{5}$ και EH εφαπτόμενο τμήμα με $EH=\lambda_3$

α) Να αποδείξετε ότι $R=5$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Gamma E=R$



γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτό-γραμμου (γραμμοσκιασμένου) τριγώνου ΓΗΕ.

~ • ~

24 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=\gamma$, $B\Gamma=\gamma\sqrt{3}$ και διάμεσο $\Gamma M=\frac{3\gamma}{2}$.

α) Να δείξετε ότι η πλευρά ΑΓ είναι ίση με $\gamma\sqrt{2}$.

β) Να διαπιστώσετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

γ) Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν ΓΔ είναι η προβολή της ΑΓ στη ΒΓ, τότε να δείξετε:

$$1. \frac{(\Gamma M \Delta)}{(\Gamma M B)} = \frac{2}{3} \quad 2. \frac{(\Gamma M \Delta)}{(\Gamma A B)} = \frac{1}{3}.$$

~ • ~

25 Σε κύκλο (Ο, R) δίνονται οι διαδοχικές χορδές $AB=R\sqrt{2}$ και $B\Gamma=R\sqrt{3}$. Να υπολογισθούν συναρτήσει του R:

α) Τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΒΓ.

β) Το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου που ορίζεται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ και το τόξο ΑΓ.

γ) Η περίμετρος του προηγούμενου μικτογράμμου τριγώνου.

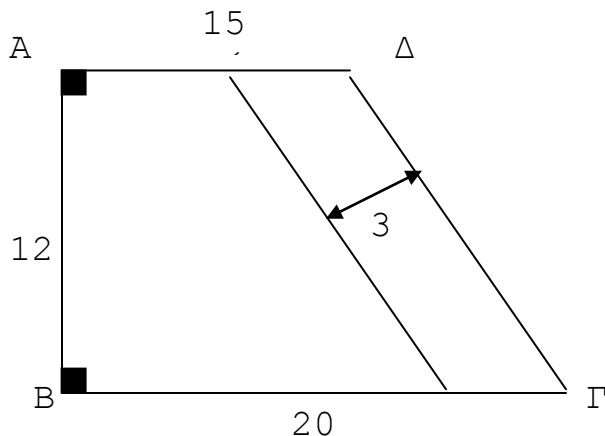
~ • ~

26 Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος τραπεζίου με $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

β) Να φέρετε το ύψος του τραπεζίου και να υπολογίσετε την ΔΓ.

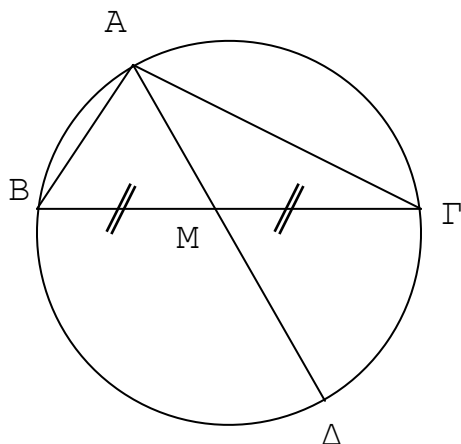
γ) Ένας καινούριος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μία λουρίδα πλάτους 3 μέτρων. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοπέδου που απομένει.



~ • ~

27 Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν $AB=3$, $A\Gamma=5$ και $B\Gamma=6$, τότε:

- Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM .
- Αν η AM προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Δ , να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $M\Delta$.



~ • ~

28 Α) Να αποδείξετε ότι, το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

β) Ένα σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν: $\Delta_{(O,R)}^P < 0$

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων ισούται με τον λόγο ομοιότητας

δ) Σε κάθε κανονικό n -γωνο ακτίνας R ισχύει: $\frac{\alpha_v^2}{4} + \lambda_v^2 = R^2$

ε) Το απόστημα α_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι:

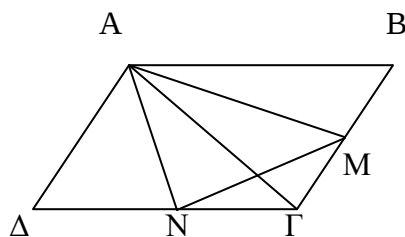
$$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

~ • ~

29 Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) (A\Gamma N) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{4}$$

$$\beta) (M\Gamma N) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$$



$\gamma) (AMN) = \frac{3(AB\Gamma\Delta)}{8}$

~ • ~