ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=3λ, ΑΓ = 4λ και $\hat{A}=30^\circ$ (λ>0).
   α) Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ.
   β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
   γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ του τριγώνου.
   δ) Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το γινόμενο ΑΗ · ΑΕ.

2. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ ώστε ΑΒ $=\lambda_3$ και ΒΓ $=\lambda_6$.
   Αν η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ, τότε:
   (α) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΓ.
   (β) Να υπολογίσετε το ΜΔ ως συνάρτηση της ακτίνας R.
   (γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΔ.

3. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και χορδή του ΑΒ$=\lambda_3$. Αν Μ είναι σημείο του κυρτογώνιου τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ώστε ΑΜ = 2 και ΜΒ = 5 να υπολογίσετε:
   α) την ακτίνα R
   β) το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις χορδές ΑΜ και ΜΒ.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°). Να αποδείξετε ότι:
   i. $\alpha + \upsilon_\alpha > \beta + \gamma$ ii. τα $\beta + \gamma$, υ_α , $\upsilon_\alpha + \alpha$ αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \sqrt{7}\,\gamma$ και $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ = ΑΜ.
   α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2\gamma$.
   β) Αν ΒΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:
      i. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{A\Delta}{A\Gamma}$
      ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{(ABM)}{(A\Delta M)}$

6. Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε: $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$, ΒΓ $=\lambda_{12}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60^\circ$. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τραπεζίου ΑΒΓΔ.

7. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και τυχαία ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο του. Θεωρούμε δύο σημεία Α, Β της ευθείας ε, εκατέρωθεν του Ο, έτσι ώστε ΟΑ=ΟΒ$=\alpha_3$. Αν Μ τυχαίο σημείο του κύκλου και οι ευθείες ΜΑ, ΜΒ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{MA}{A\Gamma} + \dfrac{MB}{B\Delta} = \dfrac{10}{3}$.

8. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν (ΜΒΓ) = (ΜΑΔ), όπου Μ το σημείο τομής των διαγωνιών του, να αποδείξετε ότι ΑΒ$/\!/$ΓΔ, δηλαδή ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΓΔ. Αν Ε είναι σημείο της ΓΔ, έτσι ώστε $\dfrac{E\Gamma}{E\Delta}=3$ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η, να αποδείξετε ότι :
   i. $(B\Delta H) = \dfrac{1}{5}\,(AB\Gamma)$ ii. $(EH\Gamma) = \dfrac{9}{40}\,(AB\Gamma)$

10. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Γ_x και την κάθετο ΑΜ στην Γ_x.
    α) Να αποδείξετε ότι $(B\Gamma M) = (A\Gamma M) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}$
    β) Να βρείτε το ύψος ΓΗ του τριγώνου ΒΓΜ.

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°). Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και φέρουμε την κάθετο ΔΕ στη ΒΓ και ισχύει ότι (ΒΔΕ) = $\frac{3}{8}$ (ΑΔΓ), να υπολογίσετε τη γωνία Β.

12. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) . Αν Κ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΜ.

13. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ρ, ΒΓ = ρ και Ε το μέσο του ΑΒ. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο το ΑΒ και τα τεταρτοκύκλια (Α, ρ), (Β, ρ) τα οποία τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία Η και Κ αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΕΗΚ.

14. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Έστω Δ το μέσο της ΒΓ και Ε το μέσο του $\overset{\frown}{ΑΓ}$. Αν η ΕΔ τέμνει τον κύκλο (Ο, R) στο σημείο Η, να υπολογίσετε το ΔΗ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ διάμεσος και Ε τυχαίο σημείο της ΒΔ. Φέρουμε την παράλληλη από το Δ προς την ΑΕ, που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι (ΒΕΗ) = (ΑΔΓ).

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ = $\frac{2}{3}$ ΑΒ και ΑΕ = $\frac{3}{4}$ ΑΓ. Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι (ΑΒΗ) = (ΒΔΕΓ).

17. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και χορδή του ΑΒ=R. Στο σημείο Α φέρουμε την εφαπτομένη Αx του κύκλου και ΒΓ κάθετη στην Αx. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ.

18. Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ = $λ_4$ και ΔΓ = $λ_6$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τραπεζίου ΑΒΓΔ.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και Θ το βαρύκεντρό του, έτσι ώστε να ισχύει ΑΘ = $\frac{α\sqrt{3}}{3}$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΘΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ = 2 και $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ.
β) Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας $\hat{Β}$.
γ) Αν φέρουμε κάθετη ΑΕ στην πλευρά ΒΓ, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΒΕ}{ΑΒ}$.
δ) Να βρείτε τη γωνία $\hat{Β}$.