Κεφάλαιο 1ο

Διανύσματα

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο των διανυσμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση:

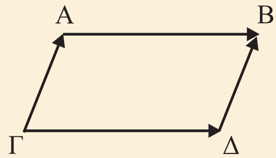
- ✓ Να δίνει τον ορισμό του διανύσματος και των εννοιών που είναι “κλειδιά” όπως: κατεύθυνση φορά ή διεύθυνση, μηδενικό διάνυσμα, μέτρο διανύσματος, συγγραμμικά διανύσματα. ομόρροπα, αντίρροπα, σημείο αναφοράς, διάνυσμα θέσης, γραμμικός συνδυασμός, συντελεστής διεύθυνσης.
- ✓ Να βρίσκει και να δικαιολογεί την ισότητα δύο διανυσμάτων, γεωμετρικά και αναλυτικά.
- ✓ Να βρίσκει την γωνία δύο διανυσμάτων γεωμετρικά και αναλυτικά.
- ✓ Να διατυπώνει, να αποδεικνύει και να εφαρμόζει τις πράξεις μεταξύ διανυσμάτων και μεταξύ των μέτρων τους.
- ✓ Να βρίσκει και να εξηγεί πότε ή γιατί δύο ή περισσότερα διανύσματα είναι συγγραμμικά ή κάποια σημεία είναι συνευθειακά.
- ✓ Να κάνει βασικές πράξεις και να υπολογίζει συντεταγμένες σημείων και διανυσμάτων στο επίπεδο.
- ✓ Να υπολογίζει τα μέτρα των διανυσμάτων.
- ✓ Να διατυπώνει τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων και να δικαιολογεί την αναλυτική του έκφραση.
- ✓ Να διατυπώνει, να δικαιολογεί και να εφαρμόζει όπου χρειάζεται τις βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.
- ✓ Να αναλύει ένα διάνυσμα σε συνιστώσες παράλληλες σε γνωστές εκ των προτέρων διευθύνσεις.
- ✓ Να προβάλει ένα διάνυσμα πάνω σε ένα άλλο διάνυσμα.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ : Τύποι - Βασικές έννοιες

Έννοια διανύσματος - Πράξεις

• ***Ισότητα Διανυσμάτων***

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όταν είναι ομόρροπα κι έχουν ίσα μέτρα.



• $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{BA}$

• Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ διανύσματα με $\lambda,\mu\in R$ τότε:

1. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$	**2.** $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$
3. $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$	**4.** $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$
5. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\vec{\beta}$	**6.** $\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$
7. $\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}=-\vec{\alpha}$	**8.** $-(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=(-\vec{\alpha})+(-\vec{\beta})$
9. Αν Ο σταθερό σημείο του χώρου $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$	
10. $\left\|\,\|\vec{\alpha}\|-\|\vec{\beta}\|\,\right\| \le \|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\| \le \|\vec{\alpha}\|+\|\vec{\beta}\|$ ***Ειδικές περιπτώσεις:*** • $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|=\|\vec{\alpha}\|+\|\vec{\beta}\|$ • $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \left\|\,\|\vec{\alpha}\|-\|\vec{\beta}\|\,\right\|=\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|$	
11. $0\cdot\vec{\alpha}=\vec{0}$, $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$	**12.** $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$
13. $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$	**14.** $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$
15. $1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$	**16.** $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$
17. $(-\vec{\lambda})\vec{\alpha}=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$	**18.** $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$
19. $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$	**20.** Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$
21. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ τότε $\lambda=\mu$	

Ισχύουν επίσης:

• $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ για $\lambda\in R$, $\vec{\beta}\neq\vec{0}$

• Αν $\vec{\alpha}\not\parallel\vec{\beta}$ και το $\vec{\gamma}$ ανήκει στο διανυσματικό επίπεδο των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τότε υπάρχουν μοναδικοί $\lambda,\mu\in R$ ώστε $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$. Τότε το $\vec{\gamma}$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός των** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$.

• Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ τότε: $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ (Ο σημείο αναφοράς)

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

• Αν Oxy ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα σ' αυτό, τότε γράφουμε $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ όπου τα x_1, y_1 είναι οι μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους $\vec{\alpha}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}$.

1. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1), \vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow x_1=x_2$ και $y_1=y_2$

2. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1), \vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

3. Για $\lambda\in R$ και $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ είναι $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

4. Αν $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου τότε:

• $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ • $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

• Αν M(x,y) το μέσο του AB τότε: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

5. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1), \vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε: • $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

• $\lambda_{\vec{\alpha}}=\dfrac{y_1}{x_1}$, $\lambda_{\vec{\beta}}=\dfrac{y_2}{x_2}$ για $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$ • $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$, εφόσον $\lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_{\vec{\beta}}$ ορίζονται

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

• $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0})$. Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$

• Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1),\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ τότε: $\left\{\begin{array}{l}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2\\ \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\end{array}\right\}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

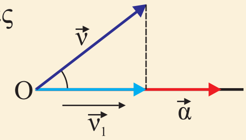
1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ **2.** $(\lambda\vec{\alpha})\vec{\beta}=\lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta})=\vec{\alpha}(\lambda\vec{\beta})$ **3.** $\vec{\alpha}(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

4. $\vec{\alpha}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2$. Η ιδιότητα αυτή μας μεταφέρει από διανύσματα σε μέτρα και αντίστροφα.

5. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ **6.** $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

7. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ **8.** $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$

9. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}}=-1$ εφόσον ορίζονται οι συντελεστές $\lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_{\vec{\beta}}$



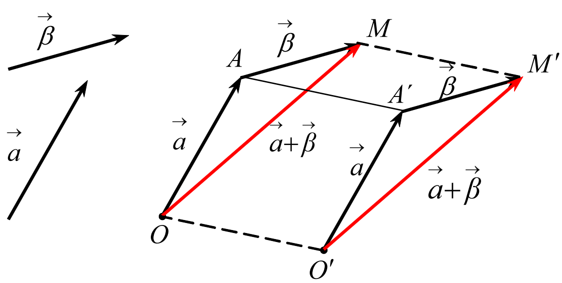
10. $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\vec{v}_1$ (όπου $\vec{v}_1=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$)

ΘΕΩΡΙΑ 1 ***Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τυχαίο σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Ο. Περιγράψτε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.***

Απόδειξη

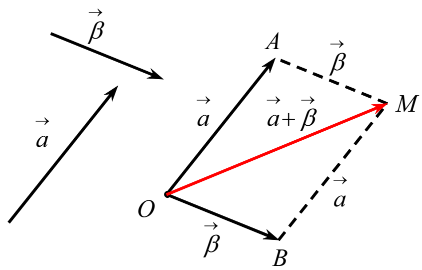
Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\vec{AM}=\vec{\beta}$.

Εστω O' είναι ένα άλλο σημείο και ας θεωρήσουμε τα διανύσματα $\vec{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\vec{A'M'}=\vec{\beta}$.Επειδή $\vec{OA}=\vec{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\vec{AM}=\vec{A'M'}=\vec{\beta}$,προκύπτει $\vec{OO'}=\vec{AA'}$ και $\vec{AA'}=\vec{MM'}$. Επομένως, $\vec{OO'}=\vec{MM'}$, που σημαίνει ότι και $\vec{OM}=\vec{O'M'}$.



Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με τον *κανόνα του παραλληλόγραμμου*, ο οποίος περιγράφεται ως εξής :

Αν με αρχή ένα σημείο O θεωρήσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB.



ΘΕΩΡΙΑ 2 ***Αποδείξτε τις επόμενες ιδιότητες για το άθροισμα διανυσμάτων.***

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

(2) $(\alpha+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

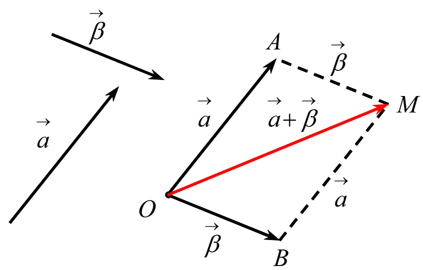
Απόδειξη

(1) Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$$

και

$$\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}.$$



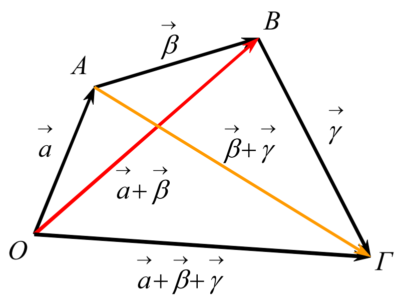
Άρα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

(2) Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$$

και

$$\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}.$$



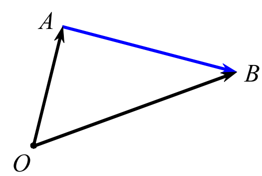
Άρα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{a}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 ***Τι ονομάζουμε διάνυσμα θέσεως σημείου Α ή διανυσματική ακτίνα του Α. Αποδείξτε ότι:***

Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής".

Απόδειξη

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου. Για κάθε σημείο A του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του A** ή **διανυσματική ακτίνα του A**.



Έστω O ένα σημείο αναφοράς.Τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ ισχύει $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$ και ισοδύναμα $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 ***Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα*** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ***ισχύει***

$$\boxed{\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$

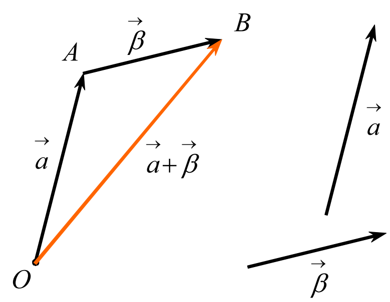
Απόδειξη

Στο διπλανό σχήμα ,στο τρίγωνο ΟΑΒ από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε ότι:

$$|(OA)-(AB)| \leq (OB) \leq (OA)+(AB)$$

και συνεπώς

$$\boxed{\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$



ΘΕΩΡΙΑ 5 ***Αποδείξτε ότι αν*** $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ***είναι δύο διανύσματα, με*** $\vec{\beta}\neq\vec{0}$***, τότε***

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

Απόδειξη

Αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα. (εξ ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα).Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε:

$$\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}.$$

Αν τώρα θέσουμε $\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, παίρνουμε $|\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$ και συνεπώς:

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$.

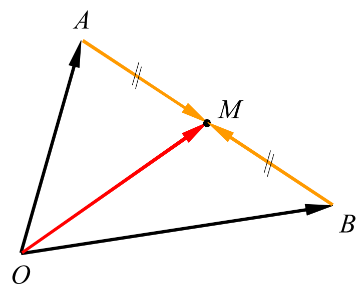
Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει λ και μάλιστα μοναδικός, τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 ***Αποδείξτε ότι για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M ευθύγραμμου τμήματος AB ισχύει :***

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O.



Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M του τμήματος AB έχουμε:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ (1) και $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ (2)

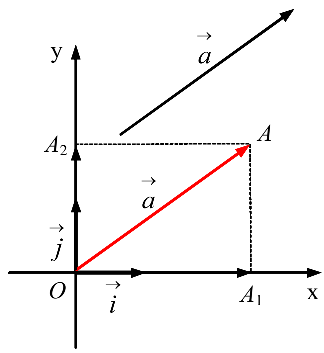
Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Άρα $\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}}$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 ***Αποδείξτε ότι το οποιοδήποτε διάνυσμα ,έστω $\vec{\alpha}$, του επιπέδου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ και $\vec{j}$ και μάλιστα κατά μοναδικό τρόπο.***

Απόδειξη

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου. Με αρχή το O γράφουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε:



$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2} \qquad (1)$$

Αν x, y είναι οι συντεταγμένες του A , τότε ισχύουν: $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$. Επομένως η ισότητα (1) γράφεται

$$\boldsymbol{\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2)}$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι το $\vec{\alpha}$ είναι **γραμμικός συνδυασμός** των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

Οι αριθμοί x και y στην παραπάνω γραφή είναι **μοναδικοί.** Θα αποδείξουμε τώρα ότι και η έκφραση του $\vec{\alpha}$ ως γραμμικού συνδυασμού των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδική. Πράγματι, έστω ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται και ως εξής::

$$\vec{\alpha} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \quad (3)$$

Τότε από (2) και (3) ισχύει: $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$$(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$$

Αν υποθέσουμε ότι $x \neq x'$, δηλαδή ότι $x - x' \neq 0$, τότε θα ισχύει $\vec{i} = \dfrac{y' - y}{x - x'}\vec{j}$

Η σχέση αυτή, όμως, δηλώνει ότι $\vec{i} \,//\, \vec{j}$, που είναι άτοπο, αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $x = x'$, που συνεπάγεται ότι και $y = y'$.

ΘΕΩΡΙΑ 8 ***Αν γνωρίζετε τις συντεταγμένες δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του καρτεσιανού επιπέδου, τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του αθροίσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, του γινομένου $\lambda\vec{\alpha}$, $\lambda\in\mathbf{R}$ και να εκφράσετε τις συντεταγμένες κάθε γραμμικού συνδυασμού των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.***

Απόδειξη

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε έχουμε:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$
- $\lambda\vec{\alpha}=\lambda(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})=(\lambda x_1)\vec{i}+(\lambda y_1)\vec{j}$

Επομένως $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ και $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

ή ισοδύναμα $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$$\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$$

Γενικότερα, για το γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ έχουμε:

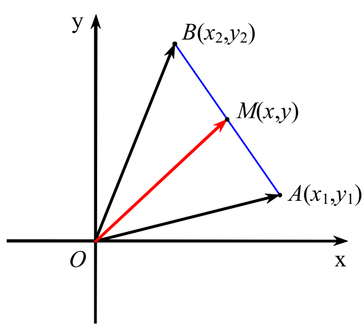
$$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\mu x_2,\mu y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2).$$

ΘΕΩΡΙΑ 9 ***Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x,y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Αποδείξτε ότι ισχύει***

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\quad \textbf{και}\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x,y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB.



Γνωρίζουμε ότι:

$\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$, και $\vec{OM}=(x,y)$, $\vec{OA}=(x_1,y_1)$, $\vec{OB}=(x_2,y_2)$,

Επομένως $(x,y)=\frac{1}{2}[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

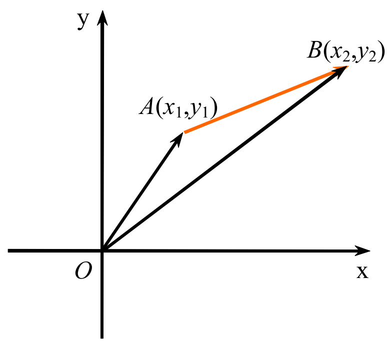
Δηλαδή

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{και} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

ΘΕΩΡΙΑ 10 ***Αποδείξτε ότι οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις : $x=x_2-x_1$ και $y=y_2-y_1$.***

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x,y) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$.



Επειδή, $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$, $\vec{AB}=(x,y)$,

$\vec{OB}=(x_2,y_2)$, και $\vec{OA}=(x_1,y_1)$,

έχουμε:

$(x,y)=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

Επομένως:

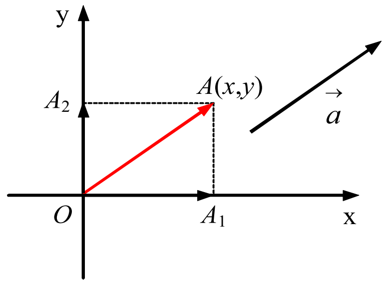
Οι συντεταγμένες (x,y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x=x_2-x_1 \quad \text{και} \quad y=y_2-y_1.$$

ΘΕΩΡΙΑ 11 ***Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου. Αποδείξτε ότι το μέτρο του διανύσματος είναι ίσο με:***

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Απόδειξη



Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και A το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Έστω ακόμη A_1 και A_2 οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως.Επειδή το σημείο A έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, θα ισχύει $(OA_1)=|x|$ και $(OA_2)=|y|$. Έτσι από το τρίγωνοOA_1A έχουμε:

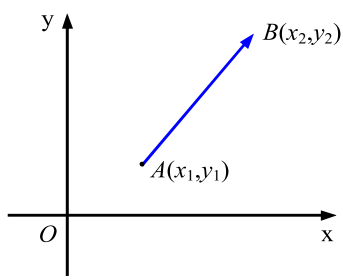
$|\vec{\alpha}|^2=(OA)^2=(OA_1)^2+(A_1A)^2=(OA_1)^2+(OA_2)^2=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2$.

Επομένως:

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

ΘΕΩΡΙΑ 12 ***Αποδείξτε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.***

Απόδειξη



Θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων A και B είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, σύμφωνα με γνωστό τύπο θα ισχύει:

$$(AB)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Επομένως:

Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

ΘΕΩΡΙΑ 13 ***Αποδείξτε ότι αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως τότε :*** $\boxed{\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2}$

Απόδειξη

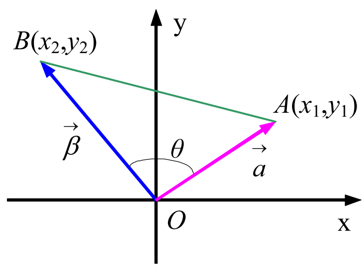
Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως , έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2 .$$

ΘΕΩΡΙΑ 14 **Πώς μπορούμε να εκφράσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους .**

Απόδειξη

Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε την ισότητα



$$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία O,A,B είναι συνευθειακά.
Όμως είναι

$$(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,\ (OA)^2=x_1^2+y_1^2 \text{ και } (OB)^2=x_2^2+y_2^2 .$$

Επομένως, έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

και επειδή $(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, έχουμε τελικά:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$$

ΘΕΩΡΙΑ 15 **Αποδείξτε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :**

- $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\ \lambda\in\mathbf{R}$
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$,όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\nparallel y'y)$

Απόδειξη

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

$(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και

$$\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}).$$

Άρα,

$$(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})&=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)\\&=(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)\\&=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}.\end{aligned}$$

$$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$$

ΘΕΩΡΙΑ 16 **Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία *θ*. Αποδείξτε ότι $\text{συν}\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.**

Απόδειξη

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\theta$ και επομένως $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$.

Είναι όμως

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2,\quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\quad \text{και}\quad |\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

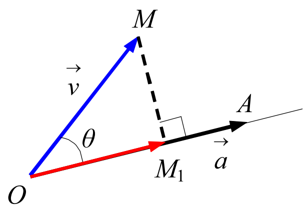
Επομένως,

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}$$

ΘΕΩΡΙΑ 17 **Έστω $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Αποδείξτε ότι** $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

Απόδειξη

Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$. Από το M φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου.



Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ το λέμε **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** το συμβολίζουμε με **$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$** και γράφουμε :

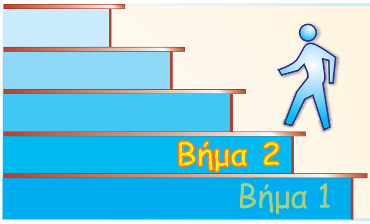
$$\overrightarrow{OM_1}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}.$$

(Η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O).
Για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M})=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}=\vec{\alpha}\cdot\ \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$$

Επομένως:

$$\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}}$$



Επαναλαμβάνουμε τις ασκήσεις “κλειδιά”

Α. Από το σχολικό βιβλίο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

§ 1.3	Α΄ Ομάδα:	6, 7, 9
	Β΄ Ομάδα:	5, 6, 8
§ 1.4	Α΄ Ομάδα:	3, 5, 6, 8
	Β΄ Ομάδα:	2, 3, 5
§ 1.5	Α΄ Ομάδα:	6, 7, 12, 13
	Β΄ Ομάδα:	2, 4, 5
Γενικές ασκήσεις:		1, 3

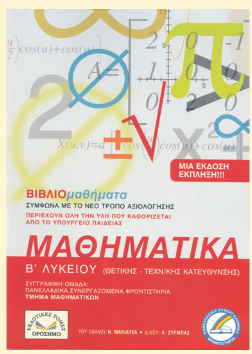
Β. Από τα Βιλιομαθήματα

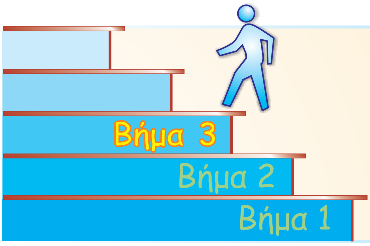
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
εκδόσεις “ΟΡΟΣΗΜΟ”

Βιβλιομάθημα 1ο:
Λυμένες ασκήσεις: 3, 5
Προτεινόμενες ασκήσεις: 7, 11

Βιβλιομάθημα 2ο:
Λυμένες ασκήσεις: 3
Προτεινόμενες ασκήσεις: 1, 5, 6

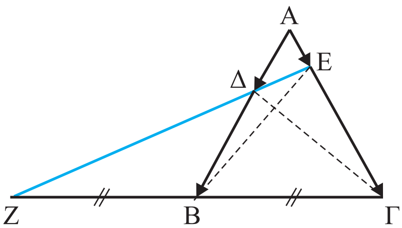
Βιβλιομάθημα 3ο:
Λυμένες ασκήσεις: 1, 3, 5, 7, 8, 12
Προτεινόμενες ασκήσεις: 3, 4, 5





Λύνουμε περισσότερες ασκήσεις

1. **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς x και τα διανύσματα:**



$$\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \quad \vec{AE} = \frac{1}{5}\vec{A\Gamma}, \quad \vec{BZ} = -\vec{B\Gamma}$$

i. **Εκφράστε τα $\vec{Z\Delta}$ και $\vec{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και δείξτε ότι τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά.**

ii. **Εκφράστε τα $\vec{BE}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και δείξτε ότι $BE \perp \Gamma\Delta$.**

Λύση:

Ισχύουν:
- $\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{\alpha}$
- $\vec{AE} = \frac{1}{5}\vec{A\Gamma} = \frac{1}{5}\vec{\beta}$
- $\vec{BZ} = \vec{\Gamma B} = \vec{\Gamma A} + \vec{AB} = \vec{AB} - \vec{A\Gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

i. • $\vec{Z\Delta} = \vec{ZB} + \vec{B\Delta} = -\vec{BZ} - 2\vec{A\Delta} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} - \frac{2}{3}\vec{\alpha} = \vec{\beta} - \frac{5}{3}\vec{\alpha}$

• $\vec{\Delta E} = \vec{\Delta A} + \vec{AE} = \vec{AE} - \vec{A\Delta} = \frac{1}{5}\vec{\beta} - \frac{1}{3}\vec{\alpha} = \frac{1}{5}\left(\vec{\beta} - \frac{5}{3}\vec{\alpha}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{5}\vec{Z\Delta}$

Άρα $\vec{Z\Delta} \parallel \vec{\Delta E}$ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Δ βρίσκονται στον ίδιο φορέα άρα Δ, Ε, Ζ συνευθειακά.

ii. • $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} = \frac{1}{5}\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ • $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\Gamma A} + \vec{A\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{A\Gamma} = \frac{1}{3}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

• $\vec{BE} \cdot \vec{\Gamma\Delta} = \left(\frac{1}{5}\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right)\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$

$$\frac{1}{15}\vec{\alpha}\vec{\beta}-\frac{1}{5}\vec{\beta}^2-\frac{1}{3}\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\vec{\beta}=\frac{16}{15}\vec{\alpha}\vec{\beta}-\frac{1}{5}|\vec{\beta}|^2-\frac{1}{3}|\vec{\alpha}|^2$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά x οπότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}60^0=\frac{x^2}{2}$.

$\left(|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=x\right)$ Άρα $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\frac{16}{15}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{3}x^2=0$. Άρα $BE\perp\Gamma\Delta$

2. Δίνονται τα σημεία Α(6,-1), Β(1,3), Γ(1,2), Δ(-1,-1) και Ε(1,-1).

i. Να βρεθούν συναρτήσει του λ οι συντεταγμένες του σημείου Μ αν $\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MA}$, $\lambda\neq-1$.

ii. ΝΑ υπολογίσετε το λ αν τα σημεία Γ, Δ και Μ είναι συνευθειακά.

iii. Αν Γ, Δ και Μ συνευθειακά και ακόμα ισχύει $\overrightarrow{\Delta E}=\kappa\cdot\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{\Gamma B}=\nu\cdot\overrightarrow{\Gamma E}$ και $\overrightarrow{MA}=\tau\cdot\overrightarrow{MB}$, να δείξετε ότι $\kappa\cdot\nu\cdot\tau=1$.

Λύση:

i. Έστω Μ(x,y).

$$\overrightarrow{BM}=\lambda\cdot\left(\overrightarrow{MA}\right)\Leftrightarrow(x-1,y-3)=\lambda(6-x,-1-y)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\lambda(6-x)\\y-3=\lambda(-1-y)\end{cases}$$

απο όπου παίρνουμε: $x=\frac{1+6\lambda}{1+\lambda}$ και $y=\frac{3-\lambda}{1+\lambda}$ (1)

ii. Είναι $\overrightarrow{\Gamma M}=(x-1,y-2)$ και $\overrightarrow{\Delta M}=(x+1,y+1)$

$\overrightarrow{\Gamma M}\parallel\overrightarrow{\Delta M}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-2\\x+1 & y+1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3x-2y+1=0$ η οποία λόγω της (1) γράφεται:

$$3\frac{1+6\lambda}{1+\lambda}-2\frac{3-\lambda}{1+\lambda}+1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{21}$$

iii. $\overrightarrow{\Delta E}=k\cdot\overrightarrow{\Delta A}\Leftrightarrow(2,0)=k(7,0)\Leftrightarrow\kappa=\frac{2}{7}$

$$\overrightarrow{\Gamma B}=\nu\cdot\overrightarrow{\Gamma E}\Leftrightarrow(0,1)=\nu(0,-3)\Leftrightarrow\nu=-\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{MA}=\tau\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\left(\frac{105}{23},-\frac{84}{23}\right)=\tau\left(-\frac{10}{23},\frac{8}{23}\right)\Leftrightarrow\tau=-\frac{21}{2}$$

Άρα: $\kappa\cdot\nu\cdot\tau=\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{21}{2}\right)=1$

3.i. Να βρεθεί το συμμετρικό Α ΄του σημείου Α (3,2) ως προς κέντρο συμμετρίας το Β (-1, 4).

ii. Αν Γ(κ,5) να βρεθεί το κ ώστε τα σημεία Α ,Α΄ και Γ να είναι συνευθειακά.

Λύση:

i. Έστω Α΄(x,y) το συμμετρικό του Α ως προς Β. Τότε το Β είναι το μέσο του ΑΑ΄ και ισχύει:

$$\left.\begin{aligned}-1=\frac{3+x}{2}\Leftrightarrow 3+x=-2\Leftrightarrow x=-5\\ 4=\frac{2+y}{2}\Leftrightarrow 2+y=8\Leftrightarrow y=6\end{aligned}\right\}\text{Άρα }\ A'(-5,6)$$

ii. Αφού τα Α, Α΄, Γ είναι συνευθειακά ισχύει :

$$\overrightarrow{AA'}\parallel\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0 \qquad (1)$$

Επειδή $\overrightarrow{AA'}=(-8,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\kappa-3,\,3)$ απο την (1) έχουμε:

$$\begin{vmatrix}-8 & 4\\ \kappa-3 & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -24-4\kappa+12=0\Leftrightarrow 4\kappa=-12\Leftrightarrow \kappa=-3$$

4. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και ανά δύο μη συγγραμμικά. Αν $\vec{\alpha}\parallel\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ και $\vec{\beta}\parallel\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)$ να δείξετε ότι: $\vec{\gamma}\parallel\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$.

Λύση:

Επειδή $\vec{\alpha}\parallel\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ τότε υπάρχει $\lambda\in R$ τέτοιος ώστε: $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}$ (1)

Επειδή $\vec{\beta}\parallel\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)$ τότε υπάρχει $\mu\in R$ τέτοιος ώστε: $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\mu\vec{\beta}$ (2)

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε: $\vec{\beta}+\cancel{\vec{\gamma}}-\vec{\alpha}-\cancel{\vec{\gamma}}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\beta}$

$$\vec{\beta}+\mu\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{\alpha}\Leftrightarrow(1+\mu)\vec{\beta}=(\lambda+1)\vec{\alpha}\qquad(3)$$

Αν οι αριθμοί $1+\mu$ και $1+\lambda$ δεν είναι και οι δύο μηδέν, για παράδειγμα αν $1+\mu\neq0$

τότε η (3) γράφεται: $\vec{\beta}=\frac{(\lambda+1)}{1+\mu}\vec{\alpha}$ δηλ. $\vec{\beta}\parallel\vec{\alpha}$, που είναι άτοπο.

Άρα: $1+\mu=0\Leftrightarrow\mu=-1$ και $1+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=-1$,

οπότε από (1): $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=-(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ δηλ. $\vec{\gamma}\parallel(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

5. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(x_1,y_1)$ με $B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ έτσι ώστε: $x_2-x_1=x_3-x_2$. Αν λ_1, λ_2, λ_3 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι: $\lambda_1+\lambda_2=2\lambda_3$

Λύση:

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, $\lambda_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(x_3-x_2,y_3-y_2)$, $\lambda_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$,

$\overrightarrow{A\Gamma}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$, $\lambda_3=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_2-y_1+y_3-y_2}{x_2-x_1}\quad(\text{αφού } x_2-x_1=x_3-x_2)\quad(1)$$

Επίσης: $x_2-x_1=x_3-x_2\Leftrightarrow 2x_2=x_1+x_3\Leftrightarrow x_2=\frac{x_1+x_3}{2}$ (2)

Έτσι η (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{y_3-y_1}{\frac{x_1+x_3}{2}-x_1}=\frac{y_3-y_1}{\frac{x_3-x_1}{2}}=2\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=2\cdot\lambda_3$$

6. Αν $\hat{\varphi}$, $\hat{\omega}$ οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(3,1)$ με τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι: $\hat{\varphi}+\hat{\omega}=\frac{\pi}{4}$.

Λύση:

$\varepsilon\varphi\varphi=\lambda_1=\frac{1}{2}$ και $\varepsilon\varphi\omega=\lambda_2=\frac{1}{3}$

$$\varepsilon\varphi(\varphi+\omega)=\frac{\varepsilon\varphi\varphi+\varepsilon\varphi\omega}{1-\varepsilon\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\omega}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$$

Άρα $\hat{\varphi}+\hat{\omega}=\frac{\pi}{4}$.

7. Αν για διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$, $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{6}$ και $(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το μέτρο του $\sqrt{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}$ και να γραφεί το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση:

$$\left|\sqrt{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}\right|^2=\left(\sqrt{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}\right)^2=3\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+4\vec{\gamma}^2+2\sqrt{3}\vec{\alpha}\vec{\beta}-4\sqrt{3}\vec{\alpha}\vec{\gamma}-4\vec{\beta}\vec{\gamma}=$$

$$=3|\alpha|^2+|\beta|^2+4|\gamma|^2-4\sqrt{3}|\vec{\alpha}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\gamma})-4|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta},\vec{\gamma})$$

$$=3\cdot1+1+4\cdot1-4\sqrt{3}\cdot1\cdot1\frac{\sqrt{3}}{2}-4\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=8-6-2=0.$$

Άρα $\left|\sqrt{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}\right|=0$ οπότε $\sqrt{3}\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$.

8. Έστω ότι τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x},\vec{y}$ είναι διανύσματα ενός επιπέδου, μη μηδενικά, με $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$.

α. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\alpha}\cdot\vec{y}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{x}=\vec{\beta}\cdot\vec{y}$, τότε ποια απάντηση είναι σωστή;

i. $\vec{x}\nparallel\vec{y}$ ii. $\vec{x}\perp\vec{y}$ iii. $\vec{x}=\vec{y}$

β. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, να δείξετε ότι: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\neq\vec{\beta}^2$

Λύση:

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\vec{\alpha}\cdot\vec{y}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{x}-\vec{\alpha}\cdot\vec{y}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}(\vec{x}-\vec{y})=0\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{x}=\vec{y}$ ή $\vec{\alpha}\perp(\vec{x}-\vec{y})$

και $\vec{\beta}\cdot\vec{x}=\vec{\beta}\cdot\vec{y}\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\vec{\beta}\cdot\vec{y}=0\Leftrightarrow\vec{\beta}(\vec{x}-\vec{y})=0\Leftrightarrow$

$$\vec{\beta}=\vec{0} \text{ ή } \vec{x}=\vec{y} \text{ ή } \vec{\beta}\perp(\vec{x}-\vec{y}).$$

- Η περίπτωση $\vec{\alpha}=0$ ή $\vec{\beta}=0$ απορρίπτεται διότι $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ μη μηδενικά
- Η περίπτωση $\vec{\alpha}\perp(\vec{x}-\vec{y})$ και $\vec{\beta}\perp(\vec{x}-\vec{y})$ απορρίπτεται διότι τότε θα ήταν $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ ως κάθετα στο ίδιο διάνυσμα.

Άρα $\vec{x}=\vec{y}$.

β. Έστω $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\beta}^2$ τότε $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|^2=|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow\left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right|^2=|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$

$$|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2\left|\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right|^2=|\vec{\beta}|^2\overset{|\alpha|=1}{\Leftrightarrow}\left|\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\right|^2=1$$

$\Leftrightarrow\text{συν}^2(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1\Leftrightarrow\text{συν}(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\pm1$ άρα $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ **άτοπο**. Άρα $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\neq\vec{\beta}^2$

9. Δίνονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε να ισχύει: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\cdot\kappa+\vec{\beta}\cdot\lambda=\vec{\alpha}$ (1) και $\vec{\alpha}\cdot\kappa+\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\cdot\lambda=\vec{\beta}$ (2) να δείξετε ότι: $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

Λύση:

Από την (1) παίρνουμε: $\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\cdot\kappa+\vec{\alpha}\vec{\beta}\lambda=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\overset{\theta.\text{προβολών}}{\longrightarrow}$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\kappa+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\lambda=\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}(\kappa+\lambda)=|\vec{\alpha}|^2 \quad (3)$$

Από την (2) παίρνουμε: $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\cdot\kappa+\vec{\beta}\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\cdot\lambda=\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}\overset{\theta.\text{προβολών}}{\longrightarrow}$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\kappa+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\lambda=\vec{\beta}^2\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}(\kappa+\lambda)=|\vec{\beta}|^2 \quad (4)$$

Από (3) και (4) συνάγουμε ότι: $|\vec{\alpha}|^2=|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$.

10. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

α. Να βρεθεί ο λ για τον οποίο ισχύει: $2\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{v}=-\vec{\beta}$.

β. Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{v}$.

Λύση:

α. Είναι: $2\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{v} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{\beta}$, οπότε $\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \vec{\beta}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}) = -\frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \vec{\beta}\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}^2 = -\frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\beta}||\vec{\alpha}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})+\lambda|\vec{\beta}|^2 = -\frac{1}{2}|\vec{\beta}|^2 \quad \text{αλλά} \quad |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$$

άρα: $1\cdot 1\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\lambda\cdot 1 = -\frac{1}{2}1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\lambda = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = -1$

β. Για $\lambda = -1$ έχουμε: $\vec{v} = \vec{\alpha}-\vec{\beta}$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{v}}) = \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{v}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{v}|} \quad (1)$$

αλλά: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}-|\vec{\beta}|^2 = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2-2\frac{1}{2}+|\vec{\beta}|^2$$

$=1-1+1=1$ άρα $|\vec{v}|=1$

Οπότε από (1) έχουμε: $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\beta},\vec{v}}) = \frac{-\frac{1}{2}}{1\cdot 1} = -\frac{1}{2}$, δηλαδή: $(\widehat{\vec{\beta},\vec{v}}) = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

11. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = (-1,2) \quad \text{και} \quad \pi\rho o\beta_{\vec{\gamma}}\vec{\beta} = (2,1)$$

i. **Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.**

ii. **Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$.**

Λύση:

i. $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} \Leftrightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} \overset{\lambda\in R^*}{\Leftrightarrow} \lambda\vec{\alpha} = (-1,2)$

$\pi\rho o\beta_{\vec{\gamma}}\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma} \Leftrightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\gamma}}\vec{\beta} = \mu\vec{\gamma} \overset{\mu\in R^*}{\Leftrightarrow} \mu\vec{\gamma} = (2,1)$

Τότε: $\lambda\vec{\alpha}\cdot\mu\vec{\gamma} = (-1,2)(2,1) \Leftrightarrow$

$$\lambda\mu\cdot\vec{\alpha}\vec{\gamma} = -1\cdot 2+2\cdot 1 \Leftrightarrow \lambda\mu\cdot\vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \overset{\lambda\mu\neq 0}{\Leftrightarrow} \vec{\alpha}\vec{\gamma} = 0 \overset{\vec{\alpha},\vec{\gamma}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow} \vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$$

ii. Αν $\overrightarrow{\beta_1}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\beta_2}=\pi\rho o\beta_{\vec{\gamma}}\vec{\beta}$ αφού $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ θα ισχύει:

$$\vec{\beta}=\overrightarrow{\beta_1}+\overrightarrow{\beta_2}=(-1,2)+(2,1)=(-1+2,2+1)=(1,3)$$

12. Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και α, β, γ τα μήκη των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.

i. Να αποδειχθεί ότι: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\right)$

ii. Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{B\Delta}=\lambda\overrightarrow{B\Gamma}$**, να αποδειχθεί ότι:**

$$A\Delta^2=\lambda(\lambda-1)\alpha^2+\lambda\beta^2+(1-\lambda)\gamma^2$$

Λύση:

i. $\alpha^2=B\Gamma^2=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=\overrightarrow{B\Gamma}^2=\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{A\Gamma}^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=$

$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\beta^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}+\gamma^2$

δηλαδή: $\alpha^2=\beta^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}+\gamma^2$, οπότε $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\beta^2+\gamma^2-\alpha^2$ (1)

Ακριβώς όμοια αποδεικνύονται οι σχέσεις :

$$2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\alpha^2+\gamma^2-\beta^2 \ (2) \text{ και } 2\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 \ (3) .$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3) :

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+2\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\beta^2+\gamma^2-\alpha^2+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\Leftrightarrow$

$2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\right)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

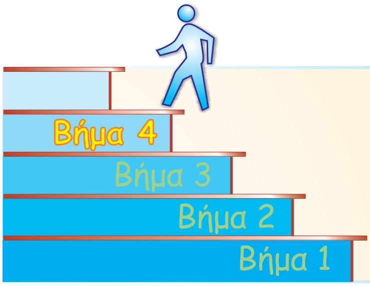
ii. Είναι $A\Delta^2=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{B\Gamma}\right)^2=$

$\overrightarrow{AB}^2+2\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\lambda^2\overrightarrow{B\Gamma}^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-2\lambda\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\lambda^2\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=\gamma^2-2\lambda\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\lambda^2\alpha^2$

και επειδή $2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\alpha^2+\gamma^2-\beta^2$ (σχέση (2) του ερωτήματος **i.**) η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$A\Delta^2=\gamma^2-\lambda\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2\right)+\lambda^2\alpha^2=\gamma^2-\lambda\alpha^2-\lambda\gamma^2+\lambda\beta^2+\lambda^2\alpha^2=$

$=\lambda(\lambda-1)\alpha^2+\lambda\beta^2+(1-\lambda)\gamma^2$.



Λύνουμε μόνοι μας

1. Αν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ να βρεθεί ο $\kappa \in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

2. Έστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που δεν είναι παράλληλα ανά δύο. Αν $\vec{\alpha} // (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} // (\vec{\gamma} - \vec{\alpha})$ να δείξετε ότι $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ, με $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\delta}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\overrightarrow{AB}$. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ να εκφράσετε τα $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{MN}$ συναρτήσει των $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta B} = 2\overrightarrow{NM}$.

....

....

4. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\alpha}$ τοτε:

i. $\overrightarrow{\Gamma A}=;$

α. $\vec{\gamma}+\vec{\alpha}$ **β.** $-(\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$ **γ.** $\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$ **δ.** $\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$

ii. $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=;$

α. $\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$ **β.** $\frac{1}{2}\vec{\gamma}+\vec{\alpha}$ **γ.** $\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ **δ.** $-\frac{1}{2}(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})$

....

....

....

....

....

....

5. Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}=(3,5+x)$ και λ_2 ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\beta}=(12,x-4)$, να βρεθεί ο x αν ισχύει ότι: $\lambda_1+2\lambda_2=3$.

....

....

....

....

....

6. Να υπολογίσετε το κέντρο του περιγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α(2,1), Β(6,4) και Γ(5,5).

....

....

....

....

....

7. Αν Α(–2,5) και $\overrightarrow{AB}=(6,4)$ το σημείο Β έχει συντεταγμένες:

α. (6,4) **β.** (8,9) **γ.** (4,9) **δ.** (8,1)

....

....

....

....

....

8. Έστω ότι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{OB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. Αν είναι γνωστό ότι $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{2}{3}\left(\vec{\beta}^2-\vec{\alpha}^2\right)$. Αν είναι επίσης γνωστό ότι $|\vec{\alpha}|=4$ και $|\vec{\beta}|=5$ να βρείτε το ημθ (όπου $\theta=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$).

....

....

....

....

....

....

9. Τα σημεία Α(α,β) και Β(β,γ) ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων. Αν $\beta\neq 0$ και $\alpha\neq\gamma$, να βρείτε την γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)$.

....

....

....

....

....

....

10. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και τα διανύσματα $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=1$. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+3\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.

....

....

....

....

....

11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha}=\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{j}$ και $|\vec{\beta}|=1$ και η γωνία τους $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{6}$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u},\vec{v}$ με $\vec{u}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$.

....

....

....

....

....

....

....

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=8$ και $(\widehat{\vec{\alpha}+2\vec{\beta},\vec{\alpha}-2\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

....

....

....

....

....

....

13. **Να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 3, 4\lambda - 1)$ και $\vec{\beta} = (-3\lambda + 9, \lambda - 3)$ να είναι κάθετα.**

....

....

....

....

....

....

14. **Οι διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ των σημείων Α, Β και Γ είναι τέτοιες ώστε να ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = \sqrt{7}$, $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$**

α. **Δείξτε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.**

β. **Βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\vec{\beta}$, $\vec{\beta}\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}\vec{\alpha}$ και την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.**

γ. **Αν για το διάνυσμα $\vec{x}$ ισχύουν $\vec{x} \parallel (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $(\vec{x} + \vec{\alpha}) \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$:**

i. **Να δείξετε ότι:** $\vec{x} = -\dfrac{21}{4}(\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ **ii.** **Να βρείτε το** $|\vec{x}|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

15. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = -3\vec{\beta}$ ενώ για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Βρείτε:**

α. **Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:**

i. $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ **ii.** $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ **και** $|4\vec{\beta}+2\vec{\alpha}|$

β. **Αν Μ μέσο της ΒΓ γράψτε τα** $\overrightarrow{AM}$**,** $\overrightarrow{B\Gamma}$ **ως γραμμικό συνδυασμό των** $\vec{\alpha}$**,** $\vec{\beta}$ **και βρείτε το γινόμενο** $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ **καθώς και την γωνία των** $\overrightarrow{AM}$ **και** $\overrightarrow{B\Gamma}$**.**

....

....

....

....

....

....

....

....

16. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0,3), Β(–2,1) και** $\Gamma\left(2\sqrt{3},1\right)$**.**

Βρείτε:

i. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ **ii.** $A\hat{\Gamma}B$ **iii.** $|\overrightarrow{AM}|$ **με Μ μέσο ΒΓ**

....

....

....

....

....

....

....

....

17. **α.** **Δίνονται τα μη συγγραμικά διανύσματα** $\vec{\alpha}$**,** $\vec{\beta}$ **δείξτε ότι** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\cdot\vec{\alpha}$

β. **Αναλύστε το διάνυσμα** $\vec{v}=(1,2)$ **σε δύο κάθετες συνιστώσες εκ των οποίων η μια να είναι παράλληλη με το** $\vec{u}=(-3,4)$**.**

γ. **Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψος ΑΔ και πλευρές (ΑΒ)=γ, (ΑΓ)=β.**

Δείξτε ότι: $(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma)\overrightarrow{B\Delta}+(\gamma\sigma\upsilon\nu B)\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$

....

....

....

....

....

....

....

....

18. **Δίνονται τα διανύσματα** $\vec{\alpha},\vec{\beta} \neq \vec{0}$ **για τα οποία ισχύουν** $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$ **,** $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{3}{8}\vec{\alpha}$ **.**

α. Δείξτε ότι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 2\vec{\beta}^2 = \frac{3}{8}\vec{\alpha}^2$

β. Δείξτε ότι: $\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

γ. Βρείτε την γωνία $\varphi = \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$**.**

δ. Αν $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ **και** $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **τέμνονται κάθετα βρείτε το** $\lambda \in R$ **.**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ελέγχουμε τη γνώση μας

Θέμα 1ο

Α.1. Αν $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και $\vec{\alpha}=(x,y)$ τότε γνωρίζουμε ότι ισχύει $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Να δείξετε ότι ο τρόπος γραφής του $\vec{\alpha}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μοναδικός.

(Μονάδες 5)

2. Έστω $\vec{\alpha}=(\lambda^2,-3\lambda+2)$ και $\vec{i}, \vec{j}$ τα πιο πάνω μοναδιαία διανύσματα. Ισχύει $\alpha \perp (i+j)$:

α. Αν $\lambda=2$

β. Αν $\lambda=1$ ή $\lambda=2$

γ. Αν $\lambda=3$

δ. Για καμία τιμή του λ

(Μονάδες 8)

Β. Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις πιο κάτω προτάσεις:

1. Τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(6,\lambda)$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία αν:

α. $\lambda = 1$ **β.** $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$

γ. $\lambda = 0$ ή $\lambda = \frac{2}{3}$ **δ.** $\lambda = 7$

....

....

....

....

....

(Μονάδες 7)

2. Να απαντήσετε με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) στις πιο κάτω προτάσεις.

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει:

α. $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ **β.** $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

γ. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ **δ.** $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

ε. $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

....

....

(Μονάδες 5)

Θέμα 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} = (3,2)$ και $\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = (9,4)$.

α. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (4,2)$ και $\vec{\beta} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

....

....

....

....

....

(Μονάδες 7)

β. Να βρεθεί ο αριθμός λ ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}+8\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

....

....

....

....

....

(Μονάδες 8)

γ. Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

....

....

....

....

....

(Μονάδες 10)

Θέμα 3ο

Α. Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|$. Να δείξετε ότι $\vec{\beta}\perp(\vec{\beta}-2\vec{\alpha})$.

....

....

....

....

....

....

(Μονάδες 10)

Β. Έστω δύο σημεία Α, Β του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(AB)=3$ και ένα τρίτο σημείο Γ διαφορετικό του Β έτσι ώστε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=9$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

....

....

....

....

....

(Μονάδες 15)

Θέμα 4⁰

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,-5)$, $\vec{\beta}=(-2,1)$ και $\vec{\gamma}=(3,-1)$. Να αναλυθεί το $\vec{\alpha}$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$ και η άλλη κάθετη στο $\vec{\gamma}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(Μονάδες 25)