

Ορισμός (έλλειψης)

Έστω E' και E δύο σημεία του επιπέδου και ένας αριθμός a τέτοιος, ώστε $2a > (E'E)$.

Ονομάζεται **έλλειψη** με **εστίες** τα σημεία E' και E και **σταθερό άθροισμα $2a$** , ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερό και ίσο με $2a$. Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$(ME') + (ME) = 2a.$$

- Η απόσταση $(E'E)$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** και συμβολίζεται με 2γ .

- Ισχύει

$$(E'E) < (ME') + (ME)$$

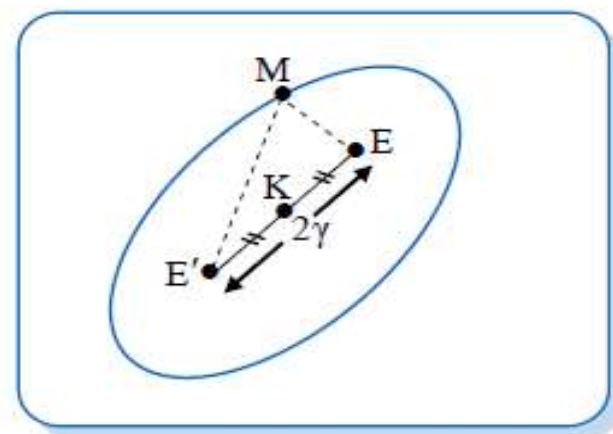
δηλαδή

$$2\gamma < 2a$$

και συνεπώς

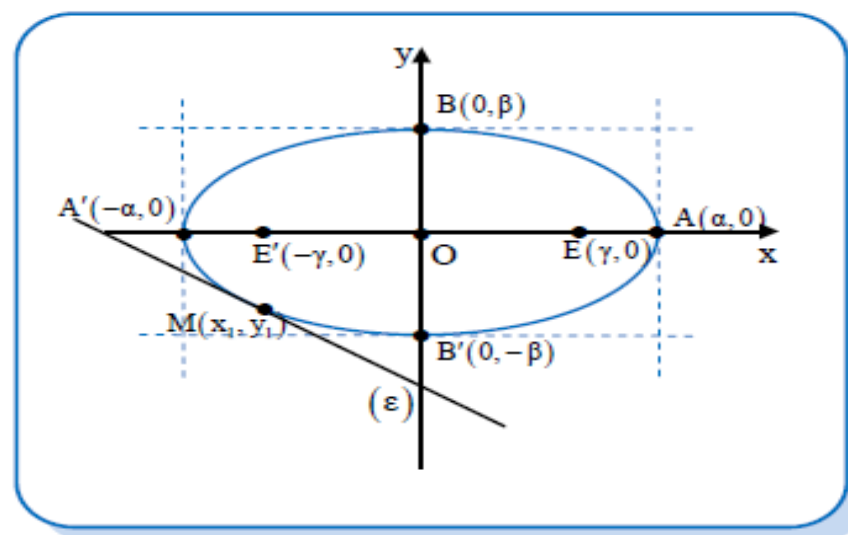
$$\gamma < a.$$

- Το μέσο K του τμήματος $E'E$ ονομάζεται **κέντρο** της έλλειψης.

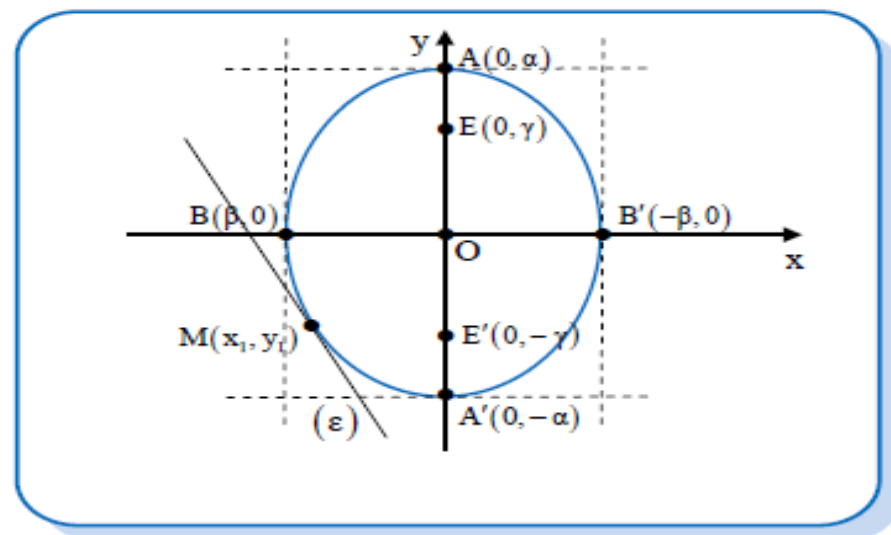


Έλλειψη με Κέντρο $O(0,0)$ και

Εστίες στον Άξονα $x'x$



Εστίες στον Άξονα $y'y$



Εξίσωση Έλλειψης

Η εξίσωση της έλλειψης (c) με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$ είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Η εξίσωση της έλλειψης (c) με εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$ και σταθερό άθροισμα $2a$ είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

$$\text{όπου } \beta^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-3,0)$, $E(3,0)$ και σταθερό άθροισμα $2a=10$.

Λύση

Έχουμε $\gamma=3$ και $2a=10$, οπότε $a=5$. Επομένως, $\beta=\sqrt{a^2-\gamma^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης

$$c: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Λύση

Έχουμε $a^2=9$ και $b^2=5$. Οπότε $\gamma=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2$. Άρα, οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$.

Παράδειγμα

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(0, -3)$, $E(0, 3)$ και σταθερό άθροισμα $2a = 10$.

Λύση

Έχουμε $\gamma = 3$ και $2a = 10$, οπότε $a = 5$. Επομένως, $\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης

$$c: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1.$$

Λύση

Έχουμε $a^2 = 13$ και $\beta^2 = 4$. Οπότε $\gamma = \sqrt{a^2 - \beta^2} = \sqrt{13 - 4} = 3$. Άρα, οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $E'(0, -3)$ και $E(0, 3)$.

Εφαπτομένη Έλλειψης

Η εφαπτομένη της έλλειψης (c) στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$



$$\frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$$

Παράδειγμα

Η εφαπτομένη της έλλειψης c: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της $M(3,1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{x \cdot 3}{12} + \frac{y \cdot 1}{4} = 1$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

Ι

$$y = -x + 4.$$

Σημεία Τομής Έλλειψης με τους Άξονες

Από την εξίσωση της έλλειψης (c) για $y = 0$ βρίσκουμε $x = \pm a$, ενώ για $x = 0$ βρίσκουμε $y = \pm b$.

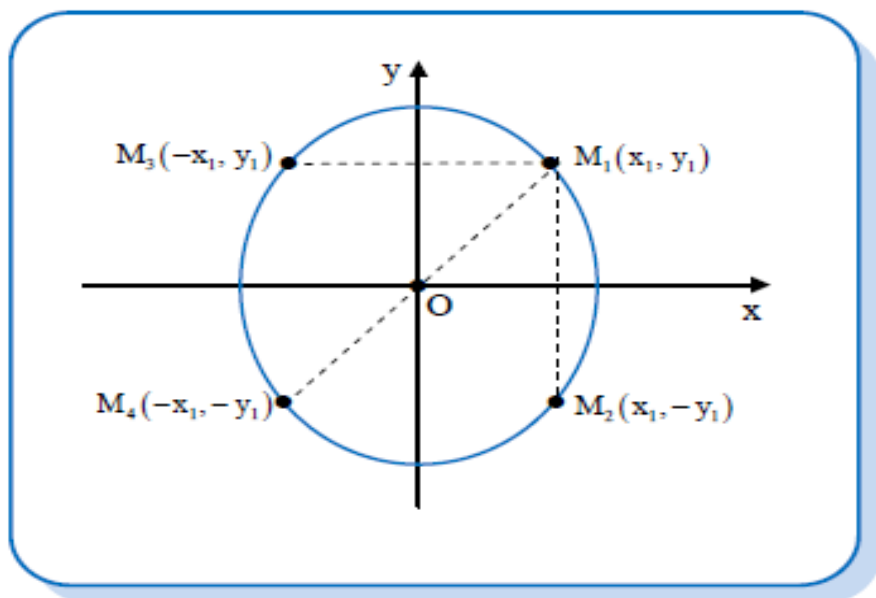
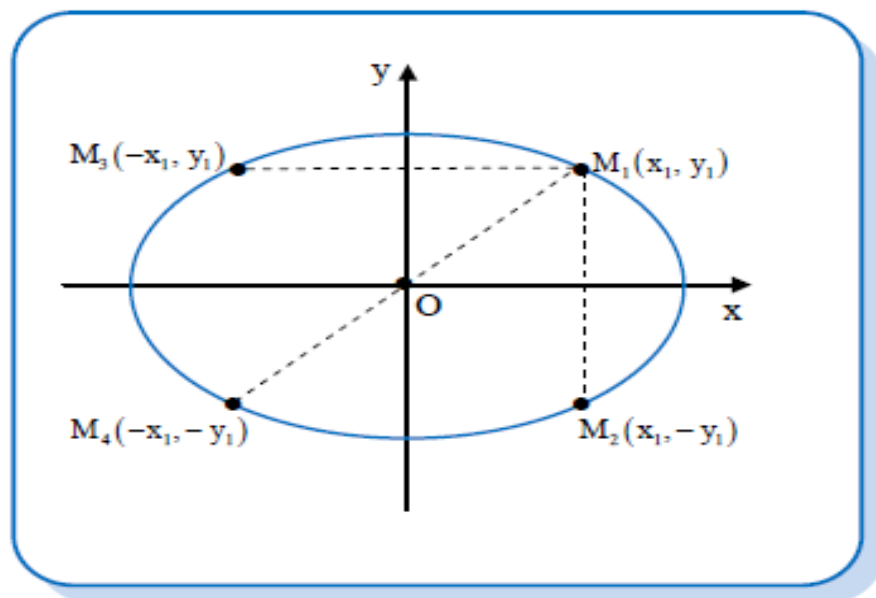
Άρα, η έλλειψη (c) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-a, 0)$ και $A(a, 0)$ ενώ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0, -b)$ και $B(0, b)$.

Από την εξίσωση της έλλειψης (c) για $y = 0$ βρίσκουμε $x = \pm b$, ενώ για $x = 0$ βρίσκουμε $y = \pm a$.

Άρα, η έλλειψη (c) τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B'(-b, 0)$ και $B(b, 0)$ ενώ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $A'(0, -a)$ και $A(0, a)$.

- Τα σημεία A', A, B', B λέγονται **κορυφές** της έλλειψης.
- Τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$ που έχουν μήκη $(A'A) = 2a$ και $(B'B) = 2b$ λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** της έλλειψης αντίστοιχα.

Συμμετρίες Έλλειψης



Για κάθε σημείο $M_1(x_1, y_1)$ της έλλειψης (c) τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ ανήκουν επίσης στη (c) , αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή τους. Άρα, οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης, ενώ η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κέντρο συμμετρίας της. Γι' αυτόν τον λόγο το σημείο $O(0,0)$ λέγεται **κέντρο** της έλλειψης (c) .

Διάμετρος Έλλειψης

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο σημεία M και M' της έλλειψης (c) τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της O λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.

- Ο μεγάλος άξονας είναι η μεγαλύτερη διάμετρος και ο μικρός άξονας η μικρότερη. Δηλαδή, για κάθε διάμετρο MM' ισχύει

$$2\beta \leq (MM') \leq 2\alpha.$$

Εκκεντρότητα Έλλειψης

Ορισμός

Ονομάζεται **εκκεντρότητα** της έλλειψης (c) και συμβολίζεται με ε ο λόγος

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a}.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης

$$c: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

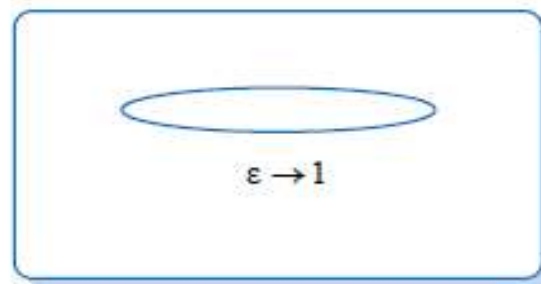
Λύση

Έχουμε $a = 5$ και $b = 4$. Οπότε $\gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Άρα, η ζητούμενη εκκεντρότητα είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{3}{5}$.

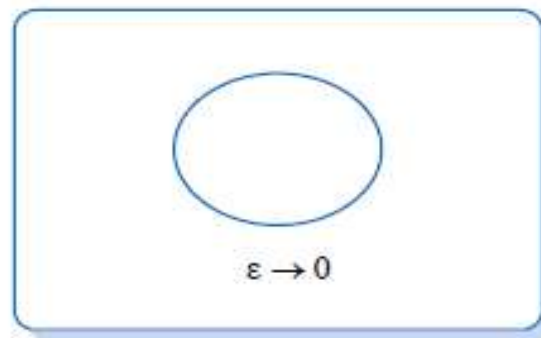
- Ισχύει $0 < \varepsilon < 1$.
- Έχουμε $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - \beta^2}}{a}$. Οπότε $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - \beta^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{\beta}{a}\right)^2$. Επομένως,

$$\frac{\beta}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

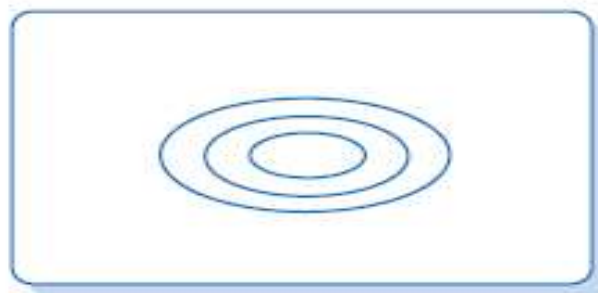
- Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα, δηλαδή όσο πλησιάζει στο 1, τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{a}$, πλησιάζοντας στο 0. Δηλαδή, ο αριθμός β πλησιάζει στο 0 και η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.



- Όσο μικραίνει η εκκεντρότητα, δηλαδή όσο πλησιάζει στο 0, τόσο μεγαλώνει ο λόγος $\frac{\beta}{a}$, πλησιάζοντας στο 1. Δηλαδή ο αριθμός β πλησιάζει στον αριθμό a και η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε κύκλο.



- Δύο ελλείψεις λέγονται **όμοιες**, αν και μόνο αν έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Αν δύο ελλείψεις είναι όμοιες, τότε η μία είναι ομοιόμορφη μεγέθυνση ή σμίκρυνση της άλλης.



Παράδειγμα

- Στην έλλειψη $c_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ έχουμε $a^2 = 16$ και $b^2 = 12$ και συνεπώς

$$a = 4, \quad b = 2\sqrt{3} \text{ και } \gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$$

Επομένως η εκκεντρότητά της είναι $e_1 = \frac{\gamma}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

- Στην έλλειψη $c_2: \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ έχουμε $a^2 = 36$ και $b^2 = 27$ και συνεπώς

$$a = 6, \quad b = 3\sqrt{3} \text{ και } \gamma = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 27} = 3$$

Επομένως η εκκεντρότητά της είναι $e_2 = \frac{\gamma}{a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι

$$e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$$

οπότε, οι παραπάνω ελλείψεις είναι όμοιες.

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- (i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$ και μεγάλο άξονα 10
 - (ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -5)$ και $E(0, 5)$ και μεγάλο άξονα 26
 - (iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12, 0)$ και $E(12, 0)$ και εκκεντρότητα $12/13$
 - (iv) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, 9/5)$
 - (v) Όταν έχει εστίες στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1, 1)$ και $M_2(2, 1/2)$.

1. (i) Είναι $2\gamma = E'E = 8$ και $2\alpha = 10$, οπότε $\gamma = 4$ και $\alpha = 5$. Άρα $\beta^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ και επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $x'x$, η έλλειψη θα έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- (ii) Είναι $2\gamma = E'E = 10$ και $2\alpha = 26$, οπότε $\gamma = 5$ και $\alpha = 13$. Άρα $\beta^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ και επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα $y'y$, η έλλειψη έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

- (iii) Είναι $\gamma = 12$, και $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{12}{13}$, οπότε $\alpha = 13$. Άρα $\beta^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, οπότε η έλλειψη θα έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

- (iv) Είναι $\gamma = 4$, οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - 16$, με $\alpha^2 > 16$. Άρα η εξίσωση της έλλειψης θα έχει τη μορφή:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - 16} = 1.$$

Αφού, τώρα, το $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ είναι σημείο της έλλειψης, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Θα έχουμε δηλαδή:

(iv) Είναι $\gamma = 4$, οπότε $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - 16$, με $\alpha^2 > 16$. Άρα η εξίσωση της έλλειψης θα έχει τη μορφή:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - 16} = 1.$$

Αφού, τώρα, το $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$ είναι σημείο της έλλειψης, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\begin{aligned} \frac{4^2}{\alpha^2} + \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\alpha^2 - 16} &= 1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2} + \frac{81}{25(\alpha^2 - 16)} = 1 \\ &\Leftrightarrow 400(\alpha^2 - 16) + 81\alpha^2 = 25\alpha^2(\alpha^2 - 16) \\ &\Leftrightarrow 25\alpha^4 - 881\alpha^2 + 6400 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{881 \pm 369}{50} = \begin{cases} 25 \\ 10,24 < 16 \end{cases} \quad (\text{απορρίπτεται}) \end{aligned}$$

Άρα, η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(v) Αφού οι εστίες είναι πάνω στον x' η εξίσωση της έλλειψης θα είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha^2 > \beta^2).$$

Τώρα, αφού τα $M_1(1,1)$ και $M_2\left(2, \frac{1}{2}\right)$ είναι τα σημεία της έλλειψης, οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα, θα έχουμε:

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 1 \\ \frac{4}{\alpha^2} + \frac{\frac{1}{4}}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

Θέτουμε $\frac{1}{\alpha^2} = \kappa$ και $\frac{1}{\beta^2} = \lambda$ και έχουμε

$$\begin{cases} \kappa + \lambda = 1 \\ 4\kappa + \frac{1}{4}\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ 4(1 - \lambda) + \frac{\lambda}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ 16 - 16\lambda + \lambda = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ 15\lambda = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 - \frac{4}{5} \\ \lambda = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{1}{5} \\ \lambda = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Άρα, $\alpha^2 = 5$ και $\beta^2 = \frac{5}{4}$, οπότε η εξίσωση της έλλειψης θα είναι:

ΓΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση
$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

Να βρείτε:

- i) τις κορυφές της έλλειψης (c)
- ii) τα μήκη των αξόνων της έλλειψης (c)
- iii) τις εστίες της έλλειψης (c)
- iv) την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

Μια έλλειψη (c) έχει εστίες τα σημεία $E'(1, 2)$ και $E(3, 4)$.

- i) Να βρείτε το κέντρο της έλλειψης (c).
- ii) Αν το σημείο $A(7, 8)$ είναι μια κορυφή της έλλειψης (c), να βρείτε:
 - α) τη δεύτερη κορυφή A' της έλλειψης (c)
 - β) την εκκεντρότητα της έλλειψης (c).

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$ και μεγάλο άξονα 26.
- ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -4)$ και $E(0, 4)$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$.

Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$ και μεγάλο άξονα 26.
- ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0, -4)$ και $E(0, 4)$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$.

3. Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.
4. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

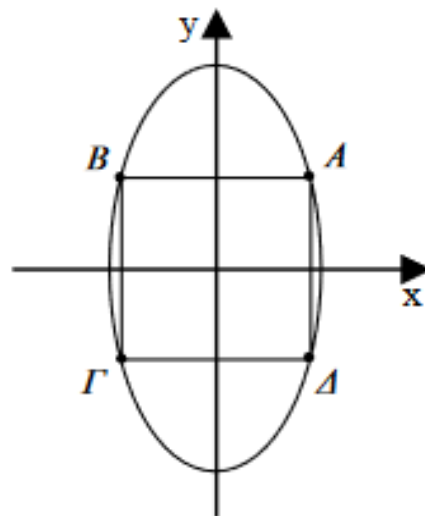
3. Έστω $AB\Gamma\Delta$ το ζητούμενο τετράγωνο. Αν (x_1, y_1) είναι οι συντεταγμένες του σημείου A , τότε οι συντεταγμένες των σημείων B, Γ και Δ θα είναι $(-x_1, y_1), (-x_1, -y_1)$ και $(x_1, -y_1)$ αντιστοίχως. Επειδή $AB = A\Delta$ θα ισχύει $2x_1 = 2y_1$ οπότε θα είναι

$$y_1 = x_1 \quad (1)$$

Αρα, οι συντεταγμένες του A θα είναι (x_1, x_1) και, επειδή επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης, θα έχουμε

$$4x_1^2 + x_1^2 = 4 \Leftrightarrow 5x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (αν } x_1 > 0 \text{)}.$$

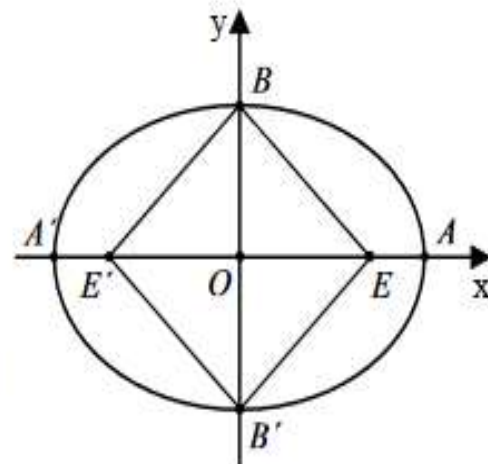
Έτσι το ζητούμενο τετράγωνο θα έχει κορυφές:



4. Η εξίσωση $x^2 + 2y^2 = 4$ γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι $a = 2, b = \sqrt{2}$ και $c = \sqrt{2}$. Επομένως, οι κορυφές B και B' έχουν συντεταγμένες $(0, \sqrt{2})$ και $(0, -\sqrt{2})$ αντιστοίχως, ενώ οι εστίες E και E' έχουν συντεταγμένες $(\sqrt{2}, 0)$ και $(-\sqrt{2}, 0)$ αντιστοίχως. Αρα, το τετράπλευρο $EBE'B'$ είναι τετράγωνο, αφού οι διαγώνιές του είναι ίσες, κάθετες και διχοτομούνται.



6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:
- (i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$
 - (ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = 1/2x$
 - (iii) διέρχονται από το σημείο $M(0, 4)$.

(i) Η εφαπτομένη ε είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -3x + 1$, αν και μόνο αν

$$\frac{-3x_1}{y_1} = -3 \text{ ή, ισοδύναμα,}$$

$$y_1 = x_1.$$

Όμως το $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης. Άρα, θα έχουμε: $3x_1^2 + y_1^2 = 4$ και, επειδή $y_1 = x_1$, θα ισχύει

$$3x_1^2 + x_1^2 = 4 \Leftrightarrow 4x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1.$$

Επομένως,

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \text{ ή } (x_1, y_1) = (-1, -1).$$

Έτσι, υπάρχουν δύο ευθείες εφαπτόμενες της έλλειψης, που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -3x + 1$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι οι $3x + y = 4$ και $-3x - y = 4$.

6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:

- (i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$
- (ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = 1/2x$
- (iii) διέρχονται από το σημείο $M(0, 4)$.

(ii) Η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$, αν και μόνο αν $\frac{-3x_1}{y_1} \cdot \frac{1}{2} = -1$

ή, ισοδύναμα, $y_1 = \frac{3x_1}{2}$. Άρα, το σημείο M θα έχει συντεταγμένες $\left(x_1, \frac{3x_1}{2}\right)$ και, αφού ανήκει στην έλλειψη, θα είναι:

$$3x_1^2 + \left(\frac{3x_1}{2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 3x_1^2 + \frac{9x_1^2}{4} = 4 \Leftrightarrow 21x_1^2 = 16 \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Επομένως

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{6}{\sqrt{21}}\right) \text{ ή } (x_1, y_1) = \left(-\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{6}{\sqrt{21}}\right).$$

Άρα, οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι ευθείες:

$$\frac{3 \cdot 4}{\sqrt{21}}x + \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4 \text{ και } -\frac{3 \cdot 4}{\sqrt{21}}x - \frac{6}{\sqrt{21}}y = 4,$$

οι οποίες γράφονται

$$6x + 3y - 2\sqrt{21} = 0 \text{ και } 6x + 3y + 2\sqrt{21} = 0.$$

6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:

- (i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$
- (ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = 1/2x$
- (iii) διέρχονται από το σημείο $M(0, 4)$.

$3x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 4 = 4$ ή, ισοδύναμα, $y_1 = 1$. Επειδή το $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην έλλειψη, θα έχουμε:

$$3x_1^2 + y_1^2 = 4 \Leftrightarrow 3x_1^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1.$$

Επομένως

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \text{ ή } (x_1, y_1) = (-1, 1)$$

Άρα, θα έχουμε δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το $M(0, 4)$, τις ευθείες $3x + y = 4$ και $-3x + y = 4$.

ΓΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει κορυφές τα σημεία

$$A'(-4, 0), \quad A(4, 0), \quad B'(0, -3) \text{ και } B(0, 3).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) το σημείο $M\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$ ανήκει στην έλλειψη (c)
- ii) η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο σημείο M ορίζει με τους ημιάξονες Ox και Oy ισοσκελές τρίγωνο.

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- i) Να βρείτε τις εστίες E' και E της έλλειψης (c).
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης (c) στο σημείο της $M\left(4, \frac{9}{5}\right)$.
- iii) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ, να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία E'Γ.

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

και το σημείο της $M(-2, 1)$.

- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης (c) στο σημείο M.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) η οποία είναι κάθετη στην ευθεία (ε) στο σημείο M.
- iii) Αν K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και Λ είναι το σημείο στο οποίο η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι

$$\overrightarrow{OL} = 3\overrightarrow{MK}$$

όπου O η αρχή των αξόνων.

Δίνεται η έλλειψη (c) η οποία έχει εστίες τα σημεία

$$E'(-2, 0) \quad \text{και} \quad E(2, 0)$$

και μήκος μικρού άξονα ίσο με 4.

- i) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης (c).
- ii) Η εφαπτομένη της έλλειψης (c) σε κάποιο σημείο της $M(x_1, y_1)$ τέμνει την ευθεία $x = 4$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι

$$\widehat{MEK} = 90^\circ.$$