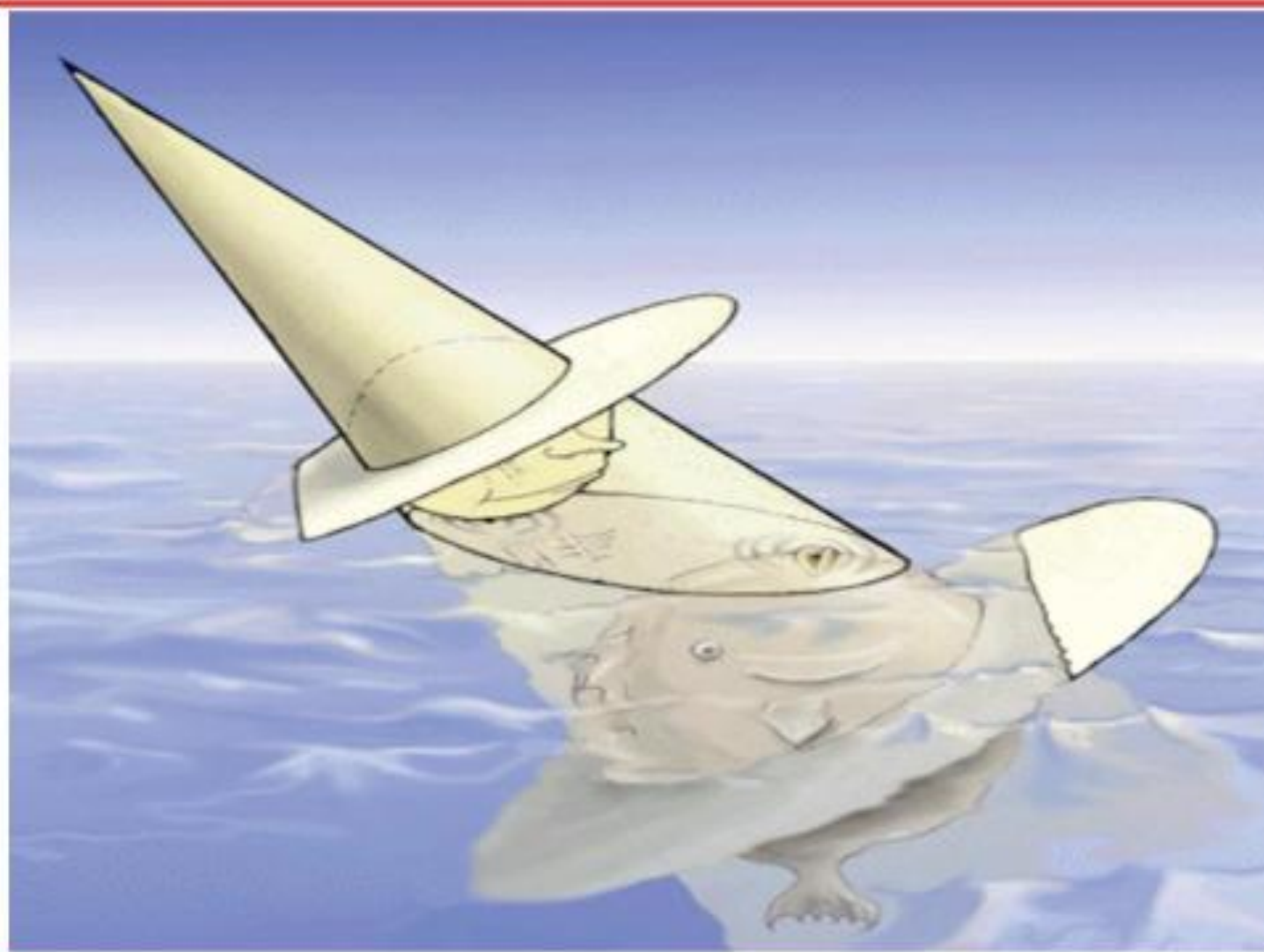


150
ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β ΛΥΚΕΙΟΥ Ο.Π.



2016-2017

Περιεχόμενα

1. Τυπολόγιο στα Διανύσματα.....σελ.4
2. Ενδοσχολικά Θέματα στα Διανύσματα.....σελ.5
3. Τυπολόγιο στην Ευθεία.....σελ.11
4. Ενδοσχολικά Θέματα στην Ευθείασελ.12
5. Τυπολόγιο στον Κύκλο.....σελ.20
6. Ενδοσχολικά Θέματα στον Κύκλο.....σελ.21

Τυπολόγιο στα Διανύσματα

1. Μέσο Τμήματος

α. Οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

β. Αν O σημείο αναφοράς τότε ισχύει $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$

2. Τμήμα με γνωστά τα άκρα

α. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

β. Η απόσταση του A από το B είναι $(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3. Μέτρο και Συντελεστής Διεύθυνσης διανύσματος

α. Αν $\vec{a} = (x, y)$ τότε το μέτρο του είναι: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

β. Αν $\vec{a} = (x, y)$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του είναι $\lambda_{\vec{a}} = \frac{y}{x}$

γ. Η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x'x είναι $\epsilon\phi\omega = \lambda_{\vec{a}} = \frac{y}{x}$

4. Παράλληλα Διανύσματα

α. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

β. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$. Αν $\lambda > 0$ τα διανύσματα είναι ομόρροπα και $\lambda < 0$ αντίρροπα

γ. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} = \lambda_{\vec{\beta}}$

δ. Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BG}$

5. Κάθετα Διανύσματα

α. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

β. Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1$

6. Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

α. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{a}, \vec{\beta})$

β. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ όπου $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

γ. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα τότε και μόνο τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}|$

δ. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα τότε και μόνο τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| |\vec{\beta}|$

7. Γωνία δύο Διανυσμάτων

α. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι: $\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$

β. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα $\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{\beta}) = 0^\circ$

γ. Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα $\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{\beta}) = 180^\circ$

8. Προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{a}$

α. Ισχύει $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \vec{a}$

β. Ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$

Ενδοσχολικά Θέματα στα Διανύσματα

Πηγή: lisari.blogspot.gr

1.1 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω το τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = 4\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. Αν Μ μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

γ. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{AM}, \vec{\alpha})$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2009)

1.2 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3), \vec{\beta} = (-1, 4)$

α. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\beta}$

β. Να βρείτε το μέτρο $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}|$ (ΓΕΛ 2009)

1.3 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω το τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{AG} = -3\vec{\beta}$

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. Αν Μ μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι $\vec{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

γ. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{AM}, \vec{\alpha})$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2010)

1.4 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} = (1, -3), \vec{\beta} = (1, 2)$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$.

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$ και τις συντεταγμένες του $\vec{\gamma}$

β. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$

γ. Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}$

δ. Αν $\vec{u} = (\lambda^2 - 4, -\lambda)$ να βρείτε το λ ώστε $\vec{u} \perp \vec{\alpha}$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2010)

1.5 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ και $f(x) = |x\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ με $f(2) = 3$.

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -2$

β. Να βρείτε την $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

γ. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

δ. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = -2\vec{\beta}$ (4^ο ΓΕΛ ΚΑΤΕΡΙΝΗΣ 2010)

1.6 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (1, -2)$ και $3\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (7, 6)$. Να βρείτε:

α. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β. τον πραγματικό αριθμό k ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ να είναι παράλληλα

γ. τον πραγματικό αριθμό x ώστε $|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| = 5$ (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2011)

1.7 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{5}{8} \vec{\alpha}$

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ. Αν $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, να βρείτε το μέτρο του. (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

1.8 Έστω το σημείο $A(-1, 2)$ και τα διανύσματα $\vec{AB} = (3, -3), \vec{v} = (20, 13), \vec{u} = (\mu - 1, 2)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B

β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{AB}$ με τον άξονα x'

γ. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα

δ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\vec{AB} \parallel \vec{u}$ (ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2013)

1.9 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε:

α. το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $5\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

γ. το μέτρο $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ (ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2013)

1.10 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α. το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. τον πραγματικό αριθμό x ώστε να ισχύει $(\vec{\alpha} + x\vec{\beta})(\vec{\alpha} - x\vec{\beta}) = 12$

γ. το μέτρο $|\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|$ (4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2013)

1.11 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta}$ ώστε να ισχύουν $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 5$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

α. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$

β. Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\beta}$

γ. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ είναι κάθετα

δ. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (12, \lambda)$ το οποίο να είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha}$ (1^ο ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

1.12 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Θεωρούμε και τα διανύσματα

$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α. το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

γ. το γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$

δ. το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ (14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

1.13 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Θεωρούμε και τα διανύσματα

$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε :

α. το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

γ. το γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$

δ. το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

ε. να βρεθεί το x ώστε $\vec{v} \perp \vec{w} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΥ 2013)

1.14 Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(7, 4)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB

β. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

δ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AF}$ (ΓΕΛ 2013)

1.15 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}, |\vec{\gamma}| = 5$.

α. Αν ισχύει η σχέση $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{1}{4}\vec{\alpha}$ (ΖΑΝΕΙΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΙΑ 2013)

1.16 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Θεωρούμε και τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε :

α. το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. τα μέτρα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$

γ. το γινόμενο $\vec{u}\vec{v}$ (1^ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2014)

1.17 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = -1$

β. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

δ. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$ (ΓΕΛ ΣΑΝΤΟΡΙΝΗΣ 2014)

1.18 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 4, |\vec{\beta}| = 2, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$

α. Να βρείτε το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε να είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$

γ. Για $\kappa=1$ να βρείτε την γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ και την προβολή του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ (ΟΕΦΕ 2014)

1.19 Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$ και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

α. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 3$

β. Να βρείτε το μέτρο $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$ (3^ο ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

1.20 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 5\sqrt{3}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Να βρείτε :

α. το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. το μέτρο $|5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})$

δ. τη γωνία $(\vec{\alpha}, 2\vec{\beta} - 5\vec{\alpha})$ (2^ο ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

1.21 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 3$

β. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

γ. Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2015)

1.22 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (0, 5)$ και $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (3, 1)$. Να βρείτε :

α. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

β. τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ. την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ (ΟΕΦΕ 2015)

1.23 Δίνονται τα σημεία $A(\kappa, \kappa+1)$, $B(1, \kappa)$, $\Gamma(0, \kappa+2)$

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ ώστε τα σημεία A, B, Γ να σχηματίζουν τρίγωνο

β. Για $\kappa=1$, να βρείτε

β1. Το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$

β2. Την τιμή της παράστασης $\overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{GA})$ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΕΡΙΗΓΗΤΗΣ 2015)

1.24 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, 1)$ και $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2\vec{\alpha}^2 + 3\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. Να βρείτε την τιμή των λ, μ ώστε το $\vec{\gamma}$ να είναι κάθετο στο $\vec{\gamma} = (1, 1)$ και να έχει μέτρο $7\sqrt{2}$.

γ. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (2, 5)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ (1^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

1.25 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 7$. Να αποδείξετε ότι :

α. $\vec{\alpha}\vec{\beta} = 6$

β. $\sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -1$

γ. $\vec{\alpha} = -\frac{2}{3}\vec{\beta}$

δ. $|\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4$ (2^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

1.26 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε :

α. το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\eta} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ. το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

δ. τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\gamma}, \vec{\alpha}$ (1^ο ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

1.27 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -\sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (2, 2\sqrt{3})$

α. Να βρείτε το $\vec{\alpha}\vec{\beta}$

β. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ. Αν $\vec{x} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{y} = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να βρείτε τα μέτρα τους και να δείξετε ότι είναι κάθετα μεταξύ τους. (1^ο ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2015)

1.28 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (2, 3)$. Να βρείτε :

α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

β. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με τον άξονα $x'x$

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (\kappa^2 - \kappa, \kappa)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

1.29 Δίνεται το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν

$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 5$ και $\vec{\beta} \cdot (3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 10$. Να βρείτε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ καθώς και το μέτρο του $\vec{\beta}$

β. τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ. το εσωτερικό γινόμενο $(5\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$

δ. τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$

1.30 Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 2, |\vec{\alpha}| - 1)$ το οποίο δεν είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$, καθώς και τα διανύσματα $\vec{\beta} = (2, 6)$ και $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

α. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$

β. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$

γ. Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{v}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $(\vec{v} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\gamma}$ και $(\vec{v} + \vec{\gamma}) \perp \vec{\beta}$. Να βρείτε:

γ1. Τις συντεταγμένες του $\vec{v}$

γ2. Την προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

1.31 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (\lambda^2 - 4, \lambda)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

β. Να βρείτε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

γ. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

(6ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

1.32 Αν ισχύει $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 1, |\vec{u} - \vec{v}| = 2$ τότε :

α. Να δείξετε ότι $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

β. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι ομόρροπα

γ. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$

(ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2016)

1.33 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3, 4), \vec{\beta} = (8, 6)$

α. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

β. Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

γ. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

δ. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{j}$ να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$

(ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2016)

1.34 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{u} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{u})$.

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β. Να δείξετε ότι $\vec{u} = -\frac{1}{6}\vec{\alpha} + \frac{1}{3}\vec{\beta}$

γ. Να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{u}$

δ. Και αν επιπλέον ένα διάνυσμα $\vec{x}$ του επιπέδου ισχύει $\vec{u} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = 3\vec{\beta} + \mu \vec{u}$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού μ

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2016)

1.35 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (-\sqrt{3}, 3), \vec{\beta} = (1, \sqrt{3})$.

α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β. Να υπολογισθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \sqrt{3}\vec{\beta}$

γ. Αν $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{OT} = \vec{\gamma}$ τότε να δείξετε ότι $\vec{AT} \parallel \vec{OB}$

(ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

1.36 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Να βρείτε :

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β. τον πραγματικό αριθμό κ αν ισχύει $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$

γ. την γωνία των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$

(2ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

1.37 Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{3}), |\vec{\beta}| = 3, \vec{v} = 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Να βρείτε :

α. το μέτρο $|\vec{\alpha}|$ και τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$

β. το μέτρο $|\vec{v}|$ και την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{v})$

γ. το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$

(ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΥ 2016)

1.38 Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ του επιπέδου .

α. Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}} \vec{\alpha}$

β. Αν επιπλέον ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = 3 \vec{\beta}$ και $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{1}{4} \vec{\alpha}$ τότε :

β₁. Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3} |\vec{\beta}|$

β₂. Να βρείτε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

β₃. Αν $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ να βρείτε το μέτρο του $\vec{w} = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} - \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}$ (1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

1.39 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} = (3, -4)$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 5$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 5$

β. Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\beta}$

γ. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ είναι κάθετα .

δ. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το $\vec{\gamma} = (12, \lambda)$ να είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha}$
(ΓΕΛ ΛΙΜΕΝΑΡΙΩΝ ΘΑΣΟΥ 2016)

1.40 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ Θεωρούμε και τα διανύσματα

$\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

α. τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{u} \cdot \vec{v}$

β. τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

γ. τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

δ. την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta})$ (ΓΕΛ ΜΑΝΤΟΥΔΙΟΥ 2016)

1.41 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ και $\vec{\epsilon}$ ώστε $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $\vec{\gamma} = (1, -2)$, $\vec{\delta} = (1, 3)$, $\vec{\epsilon} = (4, -3)$ και επιπλέον ισχύει $(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 3$.

α. Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν

β. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$

γ. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

δ. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\epsilon}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ (ΓΕΛ ΜΥΤΔΟΝΙΑΣ 2016)

1.42 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$

β. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 6$

γ. Να βρείτε τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\beta})$. Τι παρατηρείτε για τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$;

(1^ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016)

1.43 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (-6, 0)$

α. Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\alpha}$

β. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6$

γ. Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$

δ. Αν επιπλέον $\vec{\gamma} = \kappa \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ να βρείτε τον αριθμό κ και το $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$

(ΠΡΟΤΥΠΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΝΑΒΡΥΤΩΝ)

Τυπολόγιο στην Ευθεία

1. Συντελεστής Διεύθυνσης ευθείας

- Αν ω η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, τότε $\lambda_\varepsilon = \tan \omega$
- Είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ όπου $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία της ευθείας (ε)
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0$
- Ισχύει η ισοδυναμία $\varepsilon \perp x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \text{δεν ορίζεται}$

2. Εξίσωση Ευθείας

- Είναι $\varepsilon : y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, όπου $A(x_0, y_0)$ σημείο της ευθείας (ε) και λ ο συντελεστής διεύθυνσής της.
- Κατακόρυφη Ευθεία: $x = x_0$
- Οριζόντια Ευθεία: $y = y_0$
- Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων: $y = \lambda x$
- Διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων : $y = x$
- Διχοτόμος της δεύτερης και τέταρτης γωνίας των αξόνων : $y = -x$

3. Η Εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$

- παριστάνει ευθεία αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$
- έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$
- είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$
- είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$

4. Απόσταση Σημείου από Ευθεία

- Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, όπου $K(x_0, y_0)$ σημείο και $\varepsilon : Ax + By + \Gamma = 0$ ευθεία.

5. Εμβαδόν Τριγώνου

- Είναι : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma})$

Ενδοσχολικά Θέματα στην Ευθεία

Πηγή: lisari.blogspot.gr

2.1 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 2y + 3 = 0$

- α. Να βρεθεί η ευθεία που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το $A(-3, 5)$
- β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της προβολής του A στην ε .
- γ. Να βρεθεί το συμμετρικό του A ως προς την ε . (ΓΕΛ 2009)

2.2 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$. Η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $x - 2y + 1 = 0$ και του ύψους BD είναι $x + 2y + 3 = 0$. Να βρείτε:

- α. την κορυφή B
- β. την εξίσωση της πλευράς AG
- γ. το μήκος του AK , αν AK είναι ύψος (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2009)

2.3 Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$, $B(6, -4)$, $\Gamma(1, 5)$, $\Delta(-1, 2)$. Να βρείτε:

- α. την εξίσωση της ευθείας AB
- β. την απόσταση του Γ από την AB
- γ. την γωνία που σχηματίζουν τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
- δ. την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο του $\Gamma\Delta$ και είναι κάθετη στην AB
- ε. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2010)

2.4 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με την εξίσωση του ύψους από το A είναι $x = 2$. Επίσης γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της πλευράς AB είναι $y = x + 2$ και $\Gamma(6, -2)$

- α. Να βρείτε τα A , B καθώς και την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
- β. Να βρείτε την απόσταση του Γ από την ευθεία AB
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BE
- δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (2^ο ΓΕΛ ΚΑΡΔΙΤΣΑΣ 2011)

2.5 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(1, 2)$, $B(2, -2)$ και κέντρο $O(2, 0)$

- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ , Δ
- β. Να βρείτε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$
- γ. Να βρεθεί η εξίσωση της AG
- δ. Να βρείτε την προβολή του $\overrightarrow{AB}$ στο $\overrightarrow{AD}$ (1^ο ΓΕΛ ΖΑΚΥΝΘΟΥ 2011)

2.6 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 5 = 0$ (1)

- α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες
- β. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων ευθειών
- γ. Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δύο ευθειών (ΓΕΛ ΓΕΡΑΣ 2011)

2.7 Δίνονται τα σημεία $A(7, 3)$, $B(-5, 4)$ και $\Gamma(\lambda + 1, 2\lambda - 3)$

- α. Να αποδείξετε ότι το Γ κινείται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση
- β. Για $\lambda = 2$ να βρείτε:
 - β1. Την εξίσωση της διαμέσου BM του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου M το μέσο της πλευράς AG
 - β2. Την απόσταση του σημείου A από την $B\Gamma$
 - β3. Την προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{BM}$ πάνω στο $\overrightarrow{B\Gamma}$ (ΒΕΝΕΤΟΚΛΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2011)

2.8 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x+y+1=0$ και $\varepsilon_2: 3x-4y+10=0$

α. Να βρεθεί το σημείο τομής K των δύο ευθειών

β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο K και απέχουν από το σημείο $A(2, 3)$ απόσταση ίση με 4. **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)**

2.9 Δίνεται η εξίσωση $(\kappa+1)x+(\kappa-1)y+4\kappa-2=0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού κ

β. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

γ. Για ποια τιμή του κ η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ. Για ποια τιμή του κ η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

ε. Για ποια τιμή του κ η ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: y=x+5$

ζ. Για ποια τιμή του κ η ευθεία διέρχεται από το $A(-2, 0)$ **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)**

2.10 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: ax-2y-4=0$ και $\delta: x-2y+\beta=0$

α. Να βρείτε τα α, β αν οι ευθείες είναι παράλληλες και η απόσταση αυτών είναι $\frac{2}{\sqrt{5}}$

β. Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των ε και δ **(ΓΕΛ ΠΟΛΙΧΝΙΤΟΥ 2011)**

2.11 Δίνονται τα σημεία $A(3, 8), B(-7, 2)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το μέσο του AB και είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x+y-2011=0$

β. Να βρεθεί η απόσταση του O από την ε **(ΓΕΛ ΠΕΤΡΑΣ 2011)**

2.12 Δίνονται τα σημεία $A(0, 2), B(8, -4)$. Η κάθετη στην AB στο A τέμνει την $\varepsilon: y=2x-2$ στο Γ .

α. Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$

γ. Να δείξετε ότι $\Gamma(6, 10)$

δ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

ε. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ **(ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2011)**

2.13 Δίνεται η εξίσωση $x-y+2+\lambda(2x-y+1)=0$ (1) και η ευθεία $\varepsilon: 2x+y=-4$

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματικό αριθμό λ

β. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο M

γ. Αν K είναι το σημείο τομής της (ε) με την ευθεία που προκύπτει από την (1) για $\lambda=0$

να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OKM είναι 3 τ.μ. **(ΓΕΛ ΠΑΜΦΙΛΙΩΝ 2011)**

2.14 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 2), B(3, -2), \Gamma(1, -1)$. Να βρείτε:

α. τις εξισώσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$.

β. την εξίσωση του ύψους AD

γ. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ **(14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2012)**

2.15 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 + \alpha + 2)x + (\alpha - 3)y - (3\alpha^2 + 5\alpha) = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του α και ότι δεν υπάρχει ευθεία που να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο

γ. Να βρείτε την ευθεία ε της (1) που είναι κάθετη στην $\eta: x+2y+5=0$ **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)**

2.16 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y=2x-4$ και το σημείο $A(5, 1)$

α. Να βρείτε ευθεία ζ κάθετη στην ε που να διέρχεται από το A

β. Να βρείτε την απόσταση του A από την ευθεία ε

γ. Να βρείτε το σημείο τομής των ε και ζ

δ. Να βρείτε το συμμετρικό του A ως προς την ε **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)**

2.17 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: -x+2y-5=0$ και $\varepsilon_2: 3x+y-6=0$

α. Να βρείτε το σημείο τομής M των δύο ευθειών

β. Να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την ευθεία $\delta: 4x-3y=1$

γ. Να βρείτε ευθεία κάθετη στην δ που να διέρχεται από το M (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

2.18 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 4x + 4 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1: x-y+2=0$ και $\varepsilon_2: x+y+2=0$

β. Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών M καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν οι ευθείες με τον άξονα $y'y$

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής M και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 2. (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

2.19 Έστω ε_1 η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(-1, 3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα, ώστε το P να είναι το μέσο του AB .

α. Να αποδείξετε ότι είναι $\varepsilon_1: y=3x+6$

β. Θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(-5, 1)$ και $\Delta(2\alpha-7, 5-4\alpha)$ και το σημείο Δ ανήκει στην ευθεία ε_1

β1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $P\Gamma\Delta$

β2. Για $\alpha=2$ να βρείτε την μεσοκάθετη ε_2 του τμήματος $\Gamma\Delta$

β3. Για $\alpha=2$ να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΛ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ 2013)

2.20 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ και η εξίσωση $6\vec{\alpha}\vec{\beta}x - 4|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|y - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία (ε)

β. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ να δείξετε ότι η ευθεία ε είναι ο άξονας $x'x$

γ. Αν η (ε) διέρχεται από το $B(3, 2)$, τότε να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2013)

2.21 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(4, 3), B(2, 5), \Gamma(2, -1)$. Να βρείτε :

α. την εξίσωση της πλευράς AB

β. την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$

γ. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

δ. το συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία AB

(1^ο ΓΕΛ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)

2.22 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1: x+y+2=0$ και $\varepsilon_2: x+y-2=0$

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες

γ. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών

δ. Αν $A(-1, -1)$ σημείο της ευθείας ε_1 και B, Γ τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με τους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (ΓΕΛ 2013)

2.23 Δίνεται η εξίσωση $x+y-5+\lambda(2x+y-7)=0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ και ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που ορίζεται από την (1) και διέρχεται από το $A(4, 1)$

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\eta: -x+y+1=0$ δεν ανήκει στην παραπάνω οικογένεια ευθειών.

δ. Να βρείτε την ευθεία ε_2 που ορίζεται από την (1) και είναι κάθετη στην (η) (ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΥ 2013)

2.24 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : 3x+y+\alpha=0$ και τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$

α. Αν η απόσταση του σημείου A από την (ε) είναι ίση με το μήκος του τμήματος AB , να βρείτε το α

β. Για $\alpha=4$ να βρείτε :

β1. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$

β2. Το σημείο της (ε) που απέχει την μικρότερη απόσταση από το O . (1^ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2013)

2.25 Δίνονται τα σημεία $A(3, 2)$, $B(5, \alpha-1)$, $\Gamma(4, 1)$

α. Για ποιες τιμές του α είναι κορυφές τριγώνου;

β. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με 2, να βρείτε τις τιμές του α

γ. Για $\alpha=3$, να βρείτε τις εξισώσεις των $B\Gamma$ και της διαμέσου AM (2^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2013)

2.26 Δίνεται η εξίσωση $2x+y-5+\lambda(x+y-3)=0$ (1)

α. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία ε

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει λ για το οποίο η ε να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°

(14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)

2.27 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-2)x+(\lambda^2-5\lambda+6)y-\lambda+2=0$ (1)

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η (1) παριστάνει ευθεία

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε.

γ. Να βρείτε το λ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (1) με τους άξονες να είναι $\frac{1}{2}$

δ. Για $\lambda=4$ αν βρείτε την απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από την ευθεία. (3^ο ΓΕΛ ΑΛΕΞ/ΛΗΣ 2014)

2.28 Δίνεται η εξίσωση $2x+y-2+\lambda(x-y+5)=0$ (1) και η ευθεία $\zeta : 2x-y+11=0$

α. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε.

γ. Να βρείτε την ευθεία (ε) που ορίζεται από την (1) και είναι παράλληλη στην ευθεία ζ .

δ. Αν $\varepsilon : 2x-y+6=0$ να βρείτε την απόσταση των παραλλήλων ε και ζ . (ΓΕΛ ΣΑΝΤΟΡΙΝΗΣ 2014)

2.29 Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ (1) και

$(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + (\lambda^2 + 1)y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$ (2)

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο κάθετες ευθείες των οποίων να βρείτε και το σημείο τομής τους.

β. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (2) παριστάνει ευθεία

γ. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (2) διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε (ΟΕΦΕ 2014)

2.30 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2\lambda = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

2.31 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda - 1)y + \lambda^2 - 1 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , η (1) παριστάνει ευθεία

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο K

γ. Αν το K είναι κέντρο τετραγώνου του οποίου η μια πλευρά βρίσκεται στην ευθεία $3x-4y+2=0$, να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

2.32 Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2 + 2\alpha)x - (\alpha^2 + \alpha + 1)y - \alpha^2 - 2 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α , η (1) παριστάνει ευθεία

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (1) που είναι:

γ1. Κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : x-y+3=0$

γ2. Παράλληλη στον άξονα $x'x$

(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)

2.33 Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1, 3)$, $B(-2, -7)$ και $\Gamma(4, -1)$. Να βρείτε:

- α. την εξίσωση του ύψους AD , καθώς και τις συντεταγμένες του D
- β. την εξίσωση της διαμέσου AM
- γ. την οξεία γωνία των AM και AD
- δ. το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

(2^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)

2.34 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 0)$, $B(-3, 4)$ και $\Gamma(3, 2)$.

- α. Να δείξετε ότι η γωνία A είναι ορθή
- β. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD
- γ. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

(ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2015)

2.35 Δίνονται τα σημεία $A(4, 0)$ και $B(0, 4)$

- α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα A και B , καθώς και την γωνία που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$
- β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην (ε)
- γ. Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών (ε) και (δ) καθώς και το εμβαδό του τριγώνου OMB , όπου O η αρχή των αξόνων

(ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

2.36 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2, -3)$, $B(6, 6)$

- α. Αν η εξίσωση του ύψους AD είναι $2x+y=2$, να βρείτε την εξίσωση της $B\Gamma$
- β. Αν η εξίσωση της διαμέσου AM είναι $x=3$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ
- γ. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$

(3^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ)

2.37 Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2y^2 - 3xy + 10y - 8 = 0$ (1)

- α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1: -x+2y-2=0$, $\varepsilon_2: -2x-y+4=0$
- β. Έστω A το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $x'x$ και B το σημείο τομής της ε_2 με τον άξονα $x'x$
- β1. Βρείτε τις συντεταγμένες των A, B
- β2. Βρείτε σημείο Δ της ευθείας ε_1 του πρώτου τεταρτημορίου, ώστε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Delta$ να είναι ίσο με 6
- β3. Έστω (ε) η ευθεία που είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(MB)=d(M, \varepsilon)$

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑΣ 2015)

2.38 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 3)$. Η εξίσωση του ύψους BD είναι $x+2y-13=0$ και η εξίσωση της διαμέσου BM είναι $4x-3y+3=0$.

- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του B
- β. Αν $B(3, 5)$ να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB και $A\Gamma$
- γ. Αν η $A\Gamma$ έχει εξίσωση $y=2x+1$ να βρείτε το Γ

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑΣ 2015)

2.39 Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda-1)x-y+4=0$, $\varepsilon_2: (3-\lambda)x-y+\lambda=0$

- α. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 διέρχονται από το σημείο $A(0, 4)$
- β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_2 διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο να βρείτε
- γ. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες
- δ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε:
 - δ1. την απόσταση των παραλλήλων ευθειών
 - δ2. Το εμβαδό του τετραγώνου που έχει τις δύο απέναντι πλευρές του, τις ευθείες αυτές

(ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΣ 2015)

2.40 Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-3, 2)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(4, 1)$.

α. Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά δεν είναι συνευθειακά

β. Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος $B\Gamma$ είναι η $y = x - 1$

γ. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την (ε)

(ΟΕΦΕ 2015)

2.41 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο κάθετες ευθείες

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής M των παραπάνω ευθειών βρίσκεται σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Αν $\lambda = 1$ και A το σημείο τομής της $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ με τον άξονα $y'y$ και B το σημείο τομής της $\varepsilon_2: x + y + 1 = 0$ με τον άξονα $x'x$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABM

δ. Ποια από τις παραπάνω ευθείες απέχει μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο K , το οποίο είναι το σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες με εξίσωση $(\alpha^2 + \alpha + 2)x + (\alpha - 3)y - (3\alpha^2 + 5\alpha) = 0$.

(ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ 2015)

2.42 Δίνεται η εξίσωση $\eta\mu^2\theta \cdot x + \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot y - 1 = 0$. (1)

α. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει για κάθε πραγματικό αριθμό θ .

β. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1), διέρχονται από σταθερό σημείο A

γ. Για $\theta = \frac{\pi}{4}$, να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε_1 και μετά τα σημεία τομής της με τους άξονες.

δ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $A'B\Gamma$ όπου Γ το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $x'x$, B το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $y'y$ και A' είναι το συμμετρικό του A ως προς την αρχή των αξόνων

ε. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που ανήκει στην ευθεία $x + y - 2 = 0$ και απέχει από το σημείο $\Delta(-1, 2)$ την ελάχιστη απόσταση.

ζ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M ώστε να ισχύει $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{M\Gamma} \cdot \overline{OA}$

(ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2015)

2.43 Αν το σημείο $A(1 - \beta, 2\alpha\beta - \beta^2)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3y = 4x + \alpha^2 + 4\beta^2$ τότε:

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 6$ και $\beta = 2$

β. Ποιο το συμμετρικό N του σημείου $M(-2, 5)$ ως προς την ευθεία ε .

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων που εφάπτεται στην ευθεία ε .

δ. Πόσα κοινά σημεία έχει ο κύκλος με την ευθεία MN (6^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

2.44 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x + 2\lambda y - 4 + 4\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού λ

β. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

γ. Να εξετάσετε αν οι ευθείες $y = 6x + 1$, $y = \frac{1}{2}x$ ανήκουν στην οικογένεια ευθειών της (1)

δ. Βρείτε ποια ευθεία της οικογένειας ευθειών απέχει τη μέγιστη απόσταση από το $M(-6, 1)$.

Στη συνέχεια υπολογίστε την απόσταση αυτή.

(LISSARI 2016)

2.45 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, \lambda)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(-1, 0)$ με $\lambda > 0$.

α. Αν $(AB\Gamma) = 4\sqrt{3}$ τ.μ. να δείξετε ότι $\lambda = 2\sqrt{3}$

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο

γ. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους από την κορυφή Γ

δ. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η πλευρά AB με τον άξονα $x'x$

(ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2016)

2.46 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$, $B(0, -3)$, $\Gamma(4, -1)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου AM

β. Να δείξετε ότι: $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = 4 |\overline{AM}|$

(3^ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

2.47 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-3, 3), B(1, 5), \Gamma(3, 3)$

α. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$

β. Να δείξετε ότι $d(A, B\Gamma) = 3\sqrt{2}$

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ όπου $A\Delta$ το ύψος του. (ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)

2.48 Δίνονται τα σημεία $A(2, 3), B(2\kappa + 1, \kappa), \kappa \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: x - 2y - 1 = 0$

β. Να βρείτε την προβολή M του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε)

γ. Αν $M(3, 1)$ να βρείτε το συμμετρικό σημείο Γ του A ως προς την ευθεία (ε)

δ. Να βρείτε το κ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο στο B (1^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

2.49 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + (\lambda^2 + \lambda - 2)y + 4(\lambda - 1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}. (1)$

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η (1) παριστάνει ευθεία

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει ευθεία από την (1) που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο M

δ. Ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με εμβαδόν $E = 8$ τ.μ. έχει την πλευρά του AB πάνω στην ευθεία που ορίζει η (1) για $\lambda=0$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά του $\Gamma\Delta$.

(ΓΕΛ ΚΟΡΙΝΘΟΣ 2016)

2.50 Δίνονται τα σημεία $A(-3, 1), B(\kappa, \lambda), M(-1, \frac{5}{2})$

α. Αν M μέσο της AB να βρείτε τα κ και λ

β. Για $\kappa = 1$ και $\lambda = 4$ να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB

γ. Να βρείτε την απόσταση της αρχής των αξόνων από την μεσοκάθετο του AB

(1^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

2.51 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, -2)$ και η διάμεσος BM βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 1$ και το ύψος $\Gamma\Delta$ πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = -2x - 2$

α. Να δείξετε ότι $AB: x - 2y + 1 = 0$

β. Να δείξετε ότι $B(3, 2)$

γ. Να δείξετε ότι $\Gamma(1, -4)$

(2^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

2.52 Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(-5, -6)$

α. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB καθώς και ο συντελεστής διεύθυνσής του.

β. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ε) του τμήματος AB .

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής της ευθείας AB με τους άξονες.

(ΓΕΛ ΛΙΜΕΝΑΡΙΩΝ ΘΑΣΟΥ 2016)

2.53 Δίνονται τα σημεία $A(1, -\frac{3}{2}), B(2, -1), \Gamma(\kappa, \frac{\kappa-4}{2}), \kappa \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας αυτής.

β. Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ είναι αμβλεία.

γ. Αν $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \cdot |\overrightarrow{B\Gamma}|^2$ να βρείτε τον αριθμό κ .

(ΓΕΛ ΛΙΜΝΗΣ ΕΥΒΟΙΑΣ 2016)

2.54 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες κάθετες .

β. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής M των παραπάνω ευθειών βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

γ. Αν K , είναι το σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες με εξίσωση

$(3\alpha^2 + \alpha + 2)x - (\alpha^2 + \alpha + 1)y + (6\alpha + 3) = 0$ να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η απόσταση (MK) να γίνεται ελάχιστη

δ. Για το λ που βρήκατε να βρείτε το εμβαδόν του (OKM) (ΓΕΛ ΛΙΜΝΗΣ ΕΥΒΟΙΑΣ 2016)

2.55 Δίνονται τα σημεία B(-3 , 7) και Γ(3 , 1) και οι ευθείες $\varepsilon : 3x - y + 2 = 0$, $\eta : 2x + y - 7 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο A . Να βρείτε :

α. τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία BΓ με τον άξονα x'x

β. τις συντεταγμένες του σημείου A

γ. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

δ. την εξίσωση της διαμέσου AM

ε. την γωνία των ευθειών AM και BΓ

(ΓΕΛ ΜΑΝΤΟΥΔΙΟΥ 2016)

2.56 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(-5 , 4) , B(-1 , 6) , Γ(1 , 1) και σημείο M της πλευράς AB

ώστε $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M

γ. Αν M(-3 , 5) , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Γ και M

δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y = -x + 2$ με τον x'x (ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟ 2016)

Τυπολόγιο στον Κύκλο

1. Εξίσωση Κύκλου

- Με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ : $x^2 + y^2 = \rho^2$
- Με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

2. Η Εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

- Παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$
- Έχει κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$
- Έχει ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

3. Εφαπτομένη Κύκλου

- Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $M(x_1, y_1)$ είναι $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$

Ενδοσχολικά Θέματα στον Κύκλο

Πηγή: lisari.blogspot.gr

3.1 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 + 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0$. (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία

γ. Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων (ΓΕΛ ΠΟΛΙΧΝΙΤΟΥ 2011)

3.2 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ (1) και οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x-4$, $\varepsilon_2: 3x+2y-7=0$

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται σε σημείο του προηγούμενου κύκλου

γ. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ε_1 (ΓΕΛ ΠΕΤΡΑΣ 2011)

3.3 Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-6\alpha x-8\alpha y=0$ (1) με $\alpha \neq 0$

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων

γ. Να βρείτε τα $\alpha \neq 0$ ώστε αν A, B τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $y=x+1$, να ισχύει $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ (ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2011)

3.4 Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2=2(\eta\mu\theta)x+2(\sigma\upsilon\nu\theta)y$, (1) με $0 \leq \theta < 2\pi$

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε θ όταν $0 \leq \theta < 2\pi$

β. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

γ. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι ο μοναδιαίος κύκλος (4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2011)

3.5 Δίνονται τα σημεία $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $\Gamma(3, -7)$. Να βρείτε:

α. την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα A, B

β. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

γ. την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ε

δ. την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Γ ο οποίος εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$ (ΓΕΛ ΜΟΥΔΡΟΥ 2011)

3.6 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 + 2\lambda x - 2\lambda y - 4 = 0$. (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ

β. Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε μια σταθερή ευθεία

γ. Να βρείτε εκείνον τον κύκλο που έχει κέντρο $K(2, -2)$

δ. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από τον κύκλο του τρίτου ερωτήματος (ΓΕΛ ΓΕΡΑΣ 2011)

3.7 Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-6x+4y+\lambda=0$ (1)

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο

β. Να βρείτε το λ ώστε ο παραπάνω κύκλος να έχει ακτίνα ίση με 1

γ. Για $\lambda=12$ να δείξετε ότι το σημείο $M(4, 2)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου και στην συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το M (ΓΕΛ ΑΓ.ΕΥΣΤΡΑΤΙΟΥ 2011)

3.8 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\mu x + 4y + 5 = 0$ (1)

α. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων

γ. Για $\mu = 3$ να αποδείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $y = x - 1$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

3.9 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(2, 3)$ και $\lambda \neq -2$

α. Να δείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία

β. Αν $\lambda = 2$ να βρείτε

β1. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

β2. την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην BΓ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2011)

3.10 Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2\lambda(x + 2y - 5)$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq 0$

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων

γ. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο (14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2012)

3.11 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + (2\lambda - 6)y + 5 - 2\lambda = 0$. (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων

γ. Να βρείτε ποιος από τους παραπάνω κύκλους εφάπτεται στον άξονα $y'y$

δ. Να βρείτε ποιο σημείο του γεωμετρικού τόπου των κέντρων των κύκλων απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

3.12 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$. (1)

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλους των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων

γ. Για $\lambda = 0$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου από την αρχή των αξόνων (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

3.13 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(2\kappa - 1, 3\kappa + 2)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(2, 3)$.

α. Να βρείτε που κινείται το A καθώς το κ μεταβάλλεται

β. Για $\kappa = 1$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην BΓ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

3.14 Δίνεται η εξίσωση $(2x - 1)^2 + 4y^2 = 4$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β. Να δείξετε ότι το $A(0, \frac{1}{2})$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου με μέσο το A (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2012)

3.15 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + 4\lambda^2 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για $\lambda \neq 0$ του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα

β. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος που προκύπτει από την (1) εφάπτεται στον άξονα $y'y$

γ. Να αποδείξετε ότι όλα τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε παραβολή της οποίας να βρείτε την εστία και την διευθετούσα

δ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) να εφάπτονται στον άξονα $x'x$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

3.16 Δίνονται τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(3, 4)$

- α. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο AB
- β. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο B
- γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες
- δ. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ η οποία διέρχεται από το σημείο $K(1, 2)$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

3.17 Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $\Gamma(5, 2)$. Να βρείτε:

- α. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
- β. τις εξισώσεις των πλευρών AB και ΑΓ
- γ. τα ύψη ΒΔ και ΓΕ καθώς και το ορθόκεντρο του τριγώνου
- δ. την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΓΕ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

3.18 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 8\lambda x - 2\lambda y + 17\lambda^2 - 2 = 0$ (1)

- α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα
- β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων και να δείξετε ότι σχηματίζει οξεία γωνία με τον $x'x$
- γ. Να βρείτε τον λ ώστε ένας κύκλος της (1) να εφάπτεται στην $\varepsilon: -x+y+1=0$ (ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2013)

3.19 Δίνονται τα σημεία $M(4\kappa+3, 3\kappa-1)$, $A(7, -3)$, $B(3, -6)$

- α. Να δείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν σε μια ευθεία ε της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση
- β. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην ευθεία ε
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB και να δείξετε ότι είναι παράλληλη στην ευθεία ε
- δ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι σταθερό (BENETOKΛΕΙΟ ΡΟΔΟΥ 2013)

3.20 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$. (1)

- α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
- β. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποια η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων
- γ. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η (1) ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση (4^ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ 2013)

3.21 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(\lambda + 1)x + (2\lambda - 1)y + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$. (1)

- α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
- β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
- γ. Για $\lambda = -1$ να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C_1 καθώς και η σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon: 3x+4y-5=0$ ως προς τον κύκλο C_1 (ΓΕΛ ΑΙΔΗΨΟΣ 2013)

3.22 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 2)y - 4 - 3\lambda = 0$. (1)

- α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα
- β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
- γ. Να βρείτε το λ αν το κέντρο των κύκλων της (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3x+y-9=0$
- δ. Για $\lambda = -4$ να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο $P(1, 5)$ (1^ο ΓΕΛ ΓΙΑΝΝΙΤΣΩΝ 2013)

3.23 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda y + \lambda^2 - 1 = 0$. (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β. Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στην ευθεία $y = -x$

γ. Για $\lambda = 7$ να βρείτε τις ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο που προκύπτει από την (1) και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. **(ΜΟΥΣΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ 2013)**

3.24 Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ και $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

α. Να δείξετε ότι ο C_2 παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β. Να βρείτε την σχετική θέση των δύο κύκλων

γ. Αν M και N σημεία των δύο κύκλων, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των M και N . **(2^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2013)**

3.25 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x - 4(\lambda + 1)y + 8\lambda + 4 = 0$. (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων

γ. Να δείξετε ότι οι κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη την $x - 2y + 4 = 0$ **(14^ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ 2013)**

3.26 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2(1 + \lambda)y + 1 + 2\lambda = 0$. (1) με $\lambda \neq 0$

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα

β. Να δείξετε ότι καθένας από τους παραπάνω κύκλους εφάπτεται στην ευθεία $x + y + 1 = 0$

γ. Για $\lambda = 1$ να βρείτε το σημείο επαφής με την παραπάνω ευθεία **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)**

3.27 Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(5, 1)$, $B(5, 7)$, $\Gamma(13, 1)$

α. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB και της διαμέσου AM

β. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ καθώς και του ύψους $\Gamma\Delta$

γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

δ. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του $AB\Gamma$ **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)**

3.28 Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 3)x - (\lambda + 2)y - 4 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού λ

β. Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες της (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

γ. Να δείξετε ότι η ευθεία ε_1 που προκύπτει από την (1) για $\lambda = 1$ εφάπτεται στον κύκλο $C: (x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25$

δ. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του $\Gamma(-3, 3)$ από ένα σημείο της ε_1 **(ΓΕΛ ΡΕΘΥΜΝΟΥ 2014)**

3.29 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x + y + \lambda(x + y + 1) = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε λ πραγματικό αριθμό

β. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία $A(0, -1)$, $B(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

γ. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής AB

δ. Για $\lambda = -1$ να βρείτε κέντρο και ακτίνα του κύκλου που περιγράφει η (1) καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο A **(ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ 2014)**

3.30 Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 + 12x - 6y - 5 = 0$ (1)

α. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο του $A(1, 2)$

γ. Αν ο κύκλος $C': (x - 6)^2 + y^2 = 64$ να βρείτε την σχετική θέση των 2 κύκλων **(3^ο ΓΕΛ ΣΕΡΡΩΝ 2015)**

3.31 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6x - 4y + \kappa = 0$ (1)

α. Να βρεθεί ο κ ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση κύκλου

β. Να βρεθεί ο κ ώστε ο παραπάνω κύκλος να έχει ακτίνα 1

γ. Για $\kappa=12$ να δείξετε ότι το $M(1, 2)$ είναι εξωτερικό του κύκλου (ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

3.32 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με $|\vec{u}| = 1, |\vec{v}| = 2$ και να σχηματίζουν γωνία 60° . Να βρείτε:

α. την ακτίνα και το κέντρο του κύκλου : $x^2 + y^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v} + 3)x - 6y - |2\vec{u} - \vec{v}| - 10 = 0$

β. την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(-1, -1)$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

3.33 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-3, -8), B(-2, 0)$ και το μέσο $M(2, 2)$ της πλευράς $B\Gamma$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς AG είναι $4x - 3y - 12 = 0$

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο M και εφάπτεται στην πλευρά AG

δ. Να δείξετε ότι ο προηγούμενος κύκλος εφάπτεται στον άξονα $y'y$ (ΓΕΛ ΒΟΛΟΣ 2015)

3.34 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\mu + 1)x + (\mu - 1)y + \mu^2 + 3\mu + 3 = 0$. (1)

α. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ , ώστε να παριστάνει κύκλο.

β. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου από το οποίο να διέρχονται όλοι οι κύκλοι της (1)

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων

δ. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\epsilon_1: y=x-1$ και $\epsilon_2: y=x+3$. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1)

βρίσκονται στην ζώνη που ορίζεται από τις παράλληλες ϵ_1, ϵ_2 (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑΣ 2015)

3.35 Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + y^2 + (\lambda - 6)x + (\lambda - 8)y + 21 - 5\lambda = 0$. (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλους για κάθε πραγματικό αριθμό λ των οποίων να βρείτε τα κέντρα και την ακτίνα

β. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B

γ. Αν $A(3, 2)$ και $B(1, 4)$ τότε :

γ1. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων

γ2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_0 που είναι παράλληλες στην AB

(ΜΠΑΧΑΡΑΚΗΣ 2016)

3.36 Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x+2)^2 = (5-y) \cdot (5+y)$ και $C_2: 4x^2 + (2y-3)^2 = 25$

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλους και στη συνέχεια να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων

β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και να δείξετε ότι το σημείο τομής τους είναι το $M(2, 3)$

γ) Να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο του M ως προς κάθε κύκλο

δ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων

ε) Να βρείτε τα σημεία των δύο κύκλων που απέχουν την μέγιστη απόσταση μεταξύ τους

(LISARI 2016)

3.37 Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(4, 1)$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) που διέρχεται από τα A και B έχει εξίσωση $x+y-5=0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (δ) που είναι κάθετη στο μέσο M του AB είναι $-x+y+1=0$

γ) Να βρείτε το σημείο τομής Γ της ευθείας (δ) με τον άξονα $x'x$

δ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Γ και εφάπτεται στην ευθεία (ϵ)

(ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ 2016)

3.38 α) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ με $|\vec{v}| = 1$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\beta y - 1 = 0$ είναι εξίσωση κύκλου για κάθε τιμή των πραγματικών α, β και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Αν $\vec{v} = (1, 0)$ τότε :

β) να γράψετε την εξίσωση του κύκλου και να βρείτε το κέντρο του και την ακτίνα

γ) να δείξετε ότι η ευθεία $(\epsilon) : x - y + 1 = 0$ είναι εφαπτομένη του προηγούμενου κύκλου

δ) αν τα σημεία $M(\mu, \kappa)$ και $N(\nu, \lambda)$ είναι σημεία του κύκλου,

να δείξετε ότι $0 \leq (\mu - \nu)^2 + (\kappa - \lambda)^2 \leq 8$ **(ΓΕΛ ΒΟΛΟΥ 2016)**

3.39 α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα του

β) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες (δ) και (ζ) που είναι κάθετες στην ευθεία $\epsilon : x + y - 1 = 0$

γ) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις ευθείες (δ) και (ζ) στα σημεία A και B αντίστοιχα, να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου KAB **(3^ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)**

3.40 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6\alpha x - 8\alpha y = 0$ όπου $\alpha \neq 0$

α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρεθεί το α ώστε η ευθεία $\epsilon : 3x + 4y - 5 = 0$ να εφάπτεται στον κύκλο

γ) Να βρείτε την τιμή του α έτσι, ώστε αν A, B τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία (ϵ)

να ισχύει : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

(3^ο ΓΕΛ ΔΡΑΜΑΣ 2016)

3.41 Δίνεται η εξίσωση $4x \cdot (x - y) + y \cdot (y - \beta) + 2\beta x = 0$ (1) με $\beta > 0$

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες

Ένα τετράγωνο έχει τις δύο πλευρές του πάνω στις ευθείες $\delta : y = 2x$ και $\zeta : y = 2x + \beta$

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 20 τ.μ. να δείξετε ότι $\beta = 10$

Θεωρούμε κύκλο C που έχει το κέντρο του στην ευθεία (δ) και εφάπτεται στην (ζ)

γ) Αν $A(5, 4)$ σημείο του επιπέδου και B, Γ τα σημεία τομής της (δ) με τον κύκλο C να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που προκύπτουν αν η γωνία ΓAB είναι ορθή

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2016)

3.42 Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 25$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά

β) Αν η εφαπτόμενη του κύκλου C_2 στο σημείο του $A(-1, 0)$ τέμνει τον κύκλο C_1 στα σημεία B και Γ αντίστοιχα να υπολογισθούν οι εφαπτόμενες του C_1 στα σημεία αυτά

γ) Αν ο C_2 τέμνει τον θετικό ημιάξονα $y'y$ στο σημείο Δ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C_2 στο σημείο Δ . **(ΓΕΛ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ 2016)**

3.43 Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, y)$, $\vec{\beta} = (1, 2)$, $\vec{\gamma} = (2\lambda, y)$ και $\vec{\delta} = (x, 4\lambda)$ με $\lambda \neq 0$

α) Αν ισχύει $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} - 10\lambda$ (1), να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του

β) Αν ο παραπάνω κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 4(\lambda + 1)y + 10\lambda + 5 = 0$:

β1) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των παραπάνω κύκλων

β2) να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

(1^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

3.44 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4y + 2\lambda = 0$ (1) και η ευθεία $(\epsilon) : y = x - 2 - \lambda$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας (ϵ) ως προς τον κύκλο της (1)

γ) Αν η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα A και B και ισχύει $|\vec{OA} - \vec{OB}| = 2\sqrt{3}$, να βρείτε το λ

δ) Για $\lambda = 1$ να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην (ϵ)

(2^ο ΓΕΛ ΚΟΖΑΝΗΣ 2016)

3.45 α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου C_1 ο οποίος διέρχεται από το σημείο $P(2, 1)$, έχει ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{2}$ και η ευθεία $(\varepsilon) : x - y + 1 = 0$ τον τέμνει στα σημεία A και B έτσι ώστε $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$

β) Να βρεθεί κύκλος C_2 που εφάπτεται εξωτερικά στον $C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ και έχει κέντρο το $\Lambda(4, 5)$

γ) Να αποδείξετε ότι το κοινό σημείο των $C_1 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ και $C_2 : (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8$ είναι το $M(2, 3)$ και στη συνέχεια να βρείτε την κοινή τους εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C_1 που διέρχονται από το σημείο $A(1 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$ και στη συνέχεια να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους.
(2^ο ΓΕΛ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ 2016)

3.46 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 6y = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

β) Αν $\lambda = 0$ να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : 4x - 3y = 0$ τέμνει τον κύκλο και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας και το κύκλου

γ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $\varepsilon : 4x - 3y = 0$ να είναι εφαπτόμενη του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής
(ΓΕΛ ΛΙΜΕΝΑΡΙΩΝ ΘΑΣΟΥ 2016)

3.47 Δίνονται οι κύκλοι C_1 που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon : 24x - 7y - 100 = 0$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4(x + y - 6)$. Να βρείτε :

α) τις εξισώσεις των δύο κύκλων

β) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του C_1 που είναι παράλληλες στην ευθεία $\sqrt{3}x + y + 6 = 0$

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης του C_2 στο σημείο $A\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$ (ΓΕΛ ΜΥΓΔΟΝΙΑΣ 2016)

3.48 Δίνονται οι ίσοι κύκλοι C_1, C_2 με κέντρα $O(0, 0), K(2, -4)$ αντίστοιχα, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κύκλων

β) Να βρείτε το σημείο επαφής M των δύο κύκλων

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτόμενης στο σημείο $M(1, -2)$

δ) Να υπολογίσετε το σημείο της ευθείας $\varepsilon : 2x + y - 7 = 0$ από το οποίο οι εφαπτόμενες του κύκλου $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ να είναι κάθετες
(1^ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ 2016)

3.49 Δίνονται τα σημεία $M(2\eta\mu\theta + 1, 2\sigma\upsilon\nu\theta)$ με θ πραγματικό αριθμό.

α. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι κύκλος C με κέντρο $K(1, 0)$ και $\rho = 2$

β. Να βρείτε τις κατακόρυφες εφαπτόμενες του κύκλου C

γ. Εξετάστε αν το σημείο $\Sigma(2, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο C και να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη του κύκλου C στο Σ με τον άξονα $x'x$.

δ. Να βρείτε σημείο A του άξονα $x'x$ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου KAS να είναι ίσο με $2\sqrt{3}$.
(6^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

3.50 Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - 4y + 12 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x - 4y + 22 = 0$. Να βρείτε:

α. την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των 2 ευθειών

β. την απόσταση των 2 παραλλήλων ευθειών

γ. την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$
(1^ο ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)

3.51 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4y + 5 = 0$ (1).

α. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο

β. Να βρείτε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: y=x-1$

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που παριστάνει η (1)

δ. Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τον κύκλο C που ορίζεται από την (1) για $\lambda=2$ και $(M_1M_2) = 2\sqrt{3}$ τότε να υπολογίσετε το $|\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}|$ (1° ΓΕΛ ΑΓΡΙΝΙΟΥ 2016)