

Άσκηση 1^η

Δίνεται το σημείο $A(\alpha, \alpha)$, $\alpha \neq 0$. Τα σημεία B , Γ είναι οι προβολές του σημείου A στους άξονες

$x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

A. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει του α , την εξίσωση :

ι) του εγγεγραμμένου κύκλου C_1 του τετραγώνου $OBA\Gamma$

ii) του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τετραγώνου $OBA\Gamma$

B. Να βρείτε τους κύκλους C_1 , οι οποίοι εφάπτονται στην ευθεία $3x + 4y = 1$

Γ. Να προσδιορίσετε το σημείο A , αν οι εφαπτόμενες του κύκλου C_2 στο σημείο A διέρχονται από το σταθερό σημείο $M(2,1)$.

(μονάδες: $A: 12 + 12$, $B: 12$, $\Gamma: 14$)

Άσκηση 2^η

Δίνεται η εξίσωση $C_\lambda: x^2 + \psi^2 - 2(\lambda + 1)x + 2\lambda\psi + 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0, \lambda \in R$

A. ι) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ίσους κύκλους για κάθε $\lambda \in R$
και ιι) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου τους και την ακτίνα τους

B. Να προσδιορίσετε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων

Γ. ι) Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων όλων των κύκλων

και ιι) να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $x + \psi = 1$ είναι μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

ιιι) Να γραμμοσκιάσετε το τμήμα του επιπέδου μέσα στο οποίο βρίσκονται όλοι οι κύκλοι C_λ .

(μονάδες: A: 9 + 9, B: 14, Γ: 8 + 8 + 2)

Καλή Επιτυχία

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση (1): $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$, όπου $x, y \in R$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1: x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 3 = 0$.
(9 μονάδες)

Γ2. Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 .
(7 μονάδες)

Γ3. Να αποδείξετε ότι, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία η απόστασή τους από την ευθεία ε_1 είναι διπλάσια της απόστασή τους από την ευθεία ε_2 , είναι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α
(9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ και η εξίσωση:

$$(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + (\lambda - 1)^2, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι, οι οποίοι διέρχονται από τα σημεία A και B , έχουν εξίσωση της μορφής (1)

Δ2. Να εξετάσετε αν ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην παραπάνω οικογένεια κύκλων (1).

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = -x + \sqrt{2}$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $(C_1): x^2 + y^2 = 1$.

Δ4. Να βρείτε την εξίσωση (C) του κύκλου, ο οποίος είναι συμμετρικός του κύκλου (C_1) ως προς την ευθεία ε και να ελέγξετε αν αυτός ανήκει στην οικογένεια (1).

Δ5. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων M του κύκλου $(C): (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1$ και των σημείων N του κύκλου $(C_1): x^2 + y^2 = 1$.

ΘΕΜΑ

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 + \psi^2 + \lambda(\psi - \chi - 1) - (\chi + \psi + 2) = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι:

ί. Η (1) παριστάνει για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ κύκλο.

ίί. Τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (1) βρίσκονται πάνω σε ευθεία γραμμή που είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση:

$$\chi + \psi + 2 = 0$$

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , αν υπάρχουν στις περιπτώσεις που:

i. Η ακτίνα του κύκλου (1) ισούται με $\sqrt{2}$

ίί. Ο κύκλος (1) εφαπτεται με την ευθεία $4\chi - 3\psi + 6 = 0$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ και $B(\alpha-2, \beta+1)$.

B1. Να αποδείξετε ότι αν το σημείο A κινείται στον κύκλο $C_1: \chi^2+\psi^2=1$ τότε το σημείο B κινείται σε κύκλο C_2 με κέντρο $K(-2,1)$ και ακτίνα ίση με 1.

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο $\Gamma(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

B3. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΔZ του κύκλου C_1 που είναι παράλληλη στην εφαπτομένη ε του κύκλου στο σημείο Γ και ορίζει στον κύκλο ευθύγραμμο τμήμα με μήκος 1cm.

ΘΕΜΑ

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 + \psi^2 + \lambda(\psi - \chi - 1) - (\chi + \psi + 2) = 0$ (1)

Δ1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που ορίζονται από την (1) είναι η ευθεία $\psi = -\chi + 1$

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες του.

Δ4. i) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε ο κύκλος (1) να εφάπτεται στην ευθεία $\psi = \chi$

ii) Να αιτιολογήσετε ότι υπάρχει πάντα κύκλος που ορίζεται από την (1), ώστε να εφάπτεται σε ευθεία της μορφής $\psi = \chi + \kappa$,