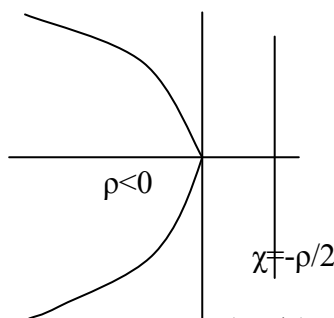
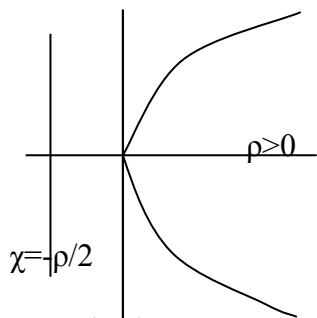


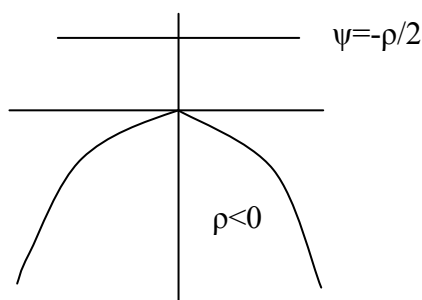
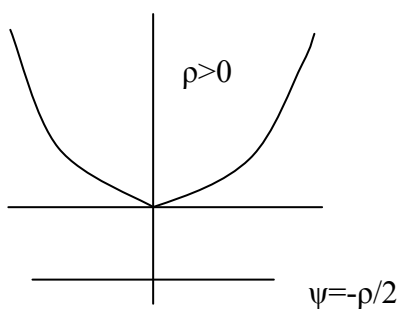
ΠΑΡΑΒΟΛΗ

Ορισμός: Έστω μια σταθερή ευθεία του επιπέδου (διευθετούσα) και ένα σταθερό σημείο (εστία) εκτός αυτής. Ο γεωμετρικός τόπος (το σύνολο των σημείων του επιπέδου) των σημείων που ισαπέχουν από την εστία και την διευθετούσα καλείται παραβολή.

Έστω $M(x, y)$ σημείο της παραβολής. Αν η εστία είναι η $E(p/2, 0)$ και η διευθετούσα είναι η $x = -p/2$, τότε η εξίσωση της παραβολής είναι η $y^2 = 2px$ και η κορυφή της είναι το $(0, 0)$.



Έστω $M(x, y)$ σημείο της παραβολής. Αν η εστία είναι η $E(0, p/2)$ και η διευθετούσα είναι η $y = -p/2$, τότε η εξίσωση της παραβολής είναι η $x^2 = 2py$ και η κορυφή της είναι το $(0, 0)$.



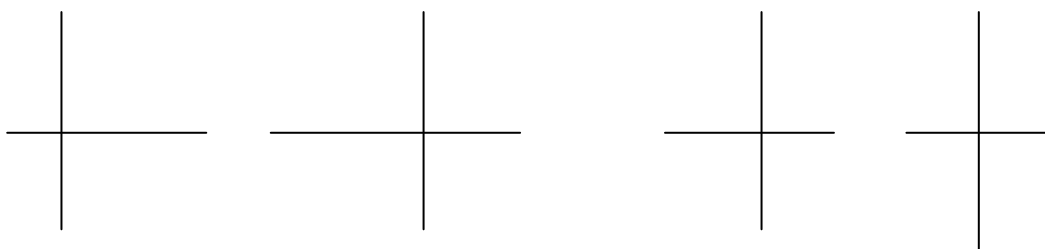
Στα παραπάνω σχήματα, σημειώστε τη θέση της εστίας.

Δίνονται οι εξισώσεις:

a. $y^2 = 4x$ **b.** $y^2 = -6x$ **c.** $x^2 = 10y$ **d.** $x^2 = -8y$

Βρείτε για καθεμία από αυτές τις παραβολές, την εστία και τη διευθετούσα τους.

Στη συνέχεια, φτιάξτε μια πρόχειρη γραφική παράσταση στους παρακάτω άξονες:



Χαράξτε σε κάθε ένα από τα σχήματα τη διευθετούσα και σημειώστε τη θέση της εστίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των παραβολών για τις οποίες δίνονται παρακάτω η εστία ή η διευθετούσα τους: α. $E(-3,0)$ β. $E(0,-5)$ γ. $E\left(\frac{5}{2},0\right)$ δ. $y=-1$ ε. $x=\frac{3}{2}$
2. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $x=\frac{1}{8}y^2$. Να βρείτε εφαπτομένη της παραβολής αυτής τέτοια ώστε: α. Να είναι παράλληλη της ευθείας $y=2x-3$. β. Να τέμνει τον $\chi\chi'$ στο σημείο -8 γ. Να είναι κάθετη της $y=-\frac{1}{2}x+5$.
3. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της παραβολής με εξίσωση $y^2=-8x$, οι οποίες άγονται από το σημείο $A(0,2)$, καθώς και τη γωνία που αυτές σχηματίζουν.
4. Η εφαπτομένη μιας παραβολής με εξίσωση $x^2=2py$ σε ένα σημείο της A , τέμνει τον $\chi\chi'$ στο B και τον άξονα $\gamma\gamma'$ στο Γ . Να δείξετε ότι το B είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$.
5. Να δείξετε ότι μια εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ σε σημείο της διαφορετικό της κορυφής της, καθώς και η κάθετη σε αυτήν την εφαπτομένη στο σημείο επαφής, τέμνουν τον άξονα $\chi\chi'$ σε σημεία συμμετρικά ως προς την εστία E της παραβολής.
6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής $y^2=6x$, οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $\chi\chi'$ γωνία 60° .
7. Θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y^2=2px$ και την ευθεία $3y=2x+2p$. Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της ευθείας με την παραβολή. Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι κάθετες ευθείες στις εφαπτόμενες της παραβολής στα A και B , τέμνονται σε σημείο που ανήκει στην παραβολή.
8. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας παραβολής που άγονται από σημείο της διευθετούσας της είναι μεταξύ τους κάθετες.
9. Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ και της παραβολής $y^2=4x$.
10. Θεωρούμε ένα σημείο A μιας παραβολής με εξίσωση $y^2=2px$ και ονομάζουμε B την προβολή του στον άξονα $\chi\chi'$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου M του τμήματος AB .
11. Μια μη κατακόρυφη ευθεία διέρχεται από την εστία E της παραβολής $y^2=4x$ και την τέμνει στα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$. Να δείξετε ότι: $y_1 \cdot y_2 = -4$ και $x_1 \cdot x_2 = 1$.
12. Έστω ότι οι εφαπτόμενες μιας παραβολής $y^2=2px$ οι οποίες άγονται από το σημείο $M(x_0,y_0)$, την τέμνουν στα σημεία A και B . Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB δίνεται από τη σχέση: $yy_0 = p(x+x_0)$. Διατυπώστε την αντίστοιχη σχέση για την παραβολή με την εστία της στον $\gamma\gamma'$.
13. Μια εφαπτόμενη ϵ της παραβολής $y^2=8x$, τέμνει τους άξονες $\chi\chi'$ και $\gamma\gamma'$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση της ϵ ώστε να ισχύει $AB=\sqrt{3}$.
14. Από ένα σημείο M της ευθείας $\epsilon: 2x-y+4=0$, φέρνουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία A και B της παραβολής $y^2=16x$. Να δείξετε ότι όταν το M κινείται πάνω στην ευθεία ϵ , η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.
15. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2=6x$ και η ευθεία (ϵ): $y=3x+\beta$.
 - α) Να βρείτε τις τιμές του β ώστε η ευθεία να τέμνει τη παραβολή σε δύο σημεία.
 - β) Αν A και B τα σημεία τομής της ευθείας με την παραβολή, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος AB .