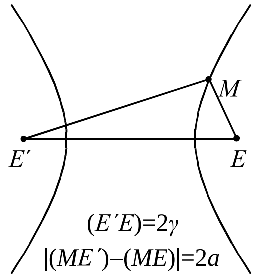
ΥΠΕΡΒΟΛΗ

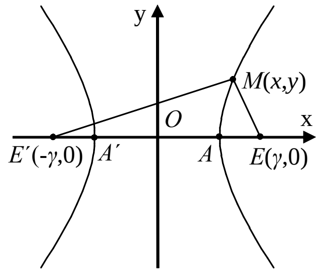
Ορισμός: Υπερβολή με εστίες Ε΄ και Ε λέγεται ο γεωμ. τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα Ε΄ και Ε είναι σταθερή και μικρότερη του Ε΄Ε.



Τη **σταθερή** αυτή διαφορά τη συμβολίζουμε **2 α** και την **εστιακή απόσταση** Ε΄Ε με **2γ.**
Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό ένα σημείο *Μ* είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν $\mathbf{|(ME')-(ME)|=2\alpha}$.

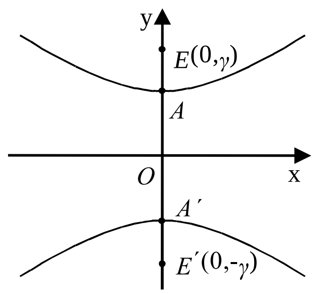
Ισχύει $|(\text{ME}')-(\text{ME})|<(\text{E}'\text{E})$ δηλαδή $2\alpha<2\gamma$, οπότε $\boldsymbol{\alpha<\gamma}$.

Εξίσωση Υπερβολής



Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε΄(-γ,0), Ε(γ,0) και διαφορά 2 α είναι:

$$\frac{\mathbf{x}^2}{\alpha^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\beta^2}=\mathbf{1},\ \textbf{όπου}\ \boldsymbol{\beta}=\sqrt{\boldsymbol{\gamma}^2-\boldsymbol{\alpha}^2}\ .$$

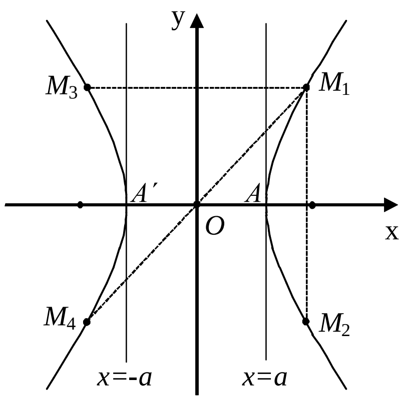


Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε΄(0,-γ), Ε(0,γ), και διαφορά 2 α είναι:

$$\frac{\mathbf{y}^2}{\boldsymbol{\alpha}^2}-\frac{\mathbf{x}^2}{\beta^2}=\mathbf{1},\ \textbf{όπου}\ \boldsymbol{\beta}=\sqrt{\boldsymbol{\gamma}^2-\boldsymbol{\alpha}^2}\ .$$

Αν **α=β** , τότε η υπερβολή λέγεται **ισοσκελής** και η εξίσωσή της γράφεται: $\mathbf{x^2\text{-}y^2=\alpha^2}$ ή $\mathbf{y^2\text{-}\ x^2=\alpha^2}$ αντίστοιχα**.**

Ιδιότητες Υπερβολής



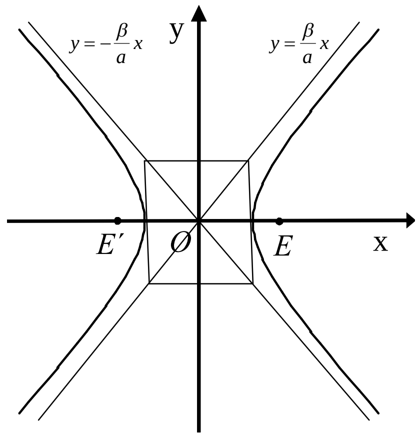
Έστω μια υπερβολή *C*, η οποία ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων *Oxy* έχει εξίσωση $\frac{\mathbf{x}^2}{\alpha^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\beta^2}=\mathbf{1}$.

- Η υπερβολή έχει τους άξονες *x'x* και *y'y* άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων Ο κέντρο συμμετρίας. Το σημείο *Ο* λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

- η υπερβολή **τέμνει τον άξονα** *x'x* στα σημεία $A'(-\alpha,0)$, και $A(\alpha,0)$. Τα σημεία αυτά λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. Η υπερβολή ***C* δεν τέμνει** τον άξονα $\boldsymbol{y'y}$.

- τα σημεία της υπερβολής *C* βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $x=-\alpha$ και $x=\alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

Ασύμπτωτες Υπερβολής



Η υπερβολή $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{\alpha^2}}-\frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{\beta^2}}=\mathbf{1}$ *έχει ασύμπτωτες τις ευθείες* $y=\pm\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\chi$.

Η υπερβολή $\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{\alpha^2}}-\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{\beta^2}}=\mathbf{1}$ *έχει ασύμπτωτες τις ευθείες* $y=\pm\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\chi$.

Εκκεντρότητα Υπερβολής

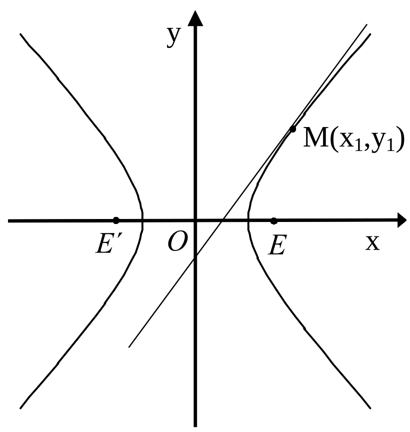
Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, και τη συμβολίζουμε με ***ε***, το λόγο

$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\alpha}}>\mathbf{1}$. Ισχύει ότι: $\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^2-\mathbf{1}}$

Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και τείνει να γίνει ίση με 1, τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Στην περίπτωση της ***ισοσκελούς υπερβολής*** είναι $\alpha=\beta$, οπότε $\boldsymbol{\varepsilon}=\sqrt{\mathbf{2}}$.

Εφαπτομένη Υπερβολής



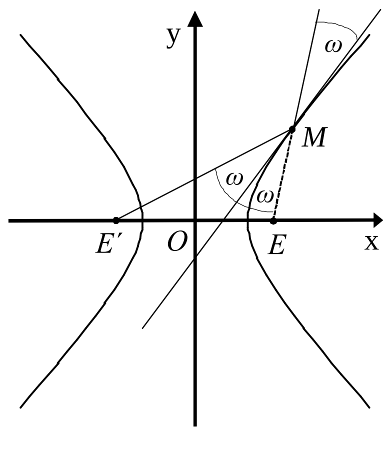
- Έστω μια υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και ένα σημείο $M_1(x_1,y_1)$ αυτής.

Η **εφαπτομένη** της υπερβολής στο σημείο $M_1(x_1,y_1)$ αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση:

$$\boxed{\frac{\mathbf{xx_1}}{\boldsymbol{\alpha^2}}-\frac{\mathbf{yy_1}}{\boldsymbol{\beta^2}}=\mathbf{1}}$$

- Αν μια υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$,τότε η εφαπτομένη της στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ θα έχει εξίσωση:

$$\boxed{\frac{\mathbf{yy_1}}{\boldsymbol{\alpha^2}}-\frac{\mathbf{xx_1}}{\boldsymbol{\beta^2}}=\mathbf{1}}$$



- Α*νακλαστική ιδιότητα της υπερβολής*.

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E',E οι εστίες της υπερβολής.

Εφαρμογή

Το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου $\boldsymbol{M_1(x_1,y_1)}$ της υπερβολής $\boldsymbol{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1}$ από τις ασύμπτωτες είναι σταθερό.

Σχετική Θέση Ευθείας και Κωνικής

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία $y=\lambda x+\beta$ και μία κωνική τομή $Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0$.
Για να βρούμε τα κοινά σημεία της ευθείας με την κωνική λύνουμε το σύστημα:

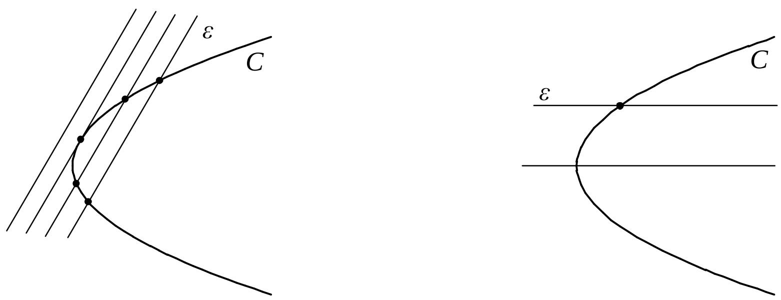
$$\begin{cases} y=\lambda x+\beta & (1) \\ Ax^2+By^2+\Gamma x+\Delta y+E=0 & (2) \end{cases}$$

Για την επίλυση του συστήματος θέτουμε στη (2), όπου $y=\lambda x+\beta$, οπότε προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

— Αν η εξίσωση αυτή έχει ***δύο ρίζες άνισες ή μια απλή ρίζα*** (όταν είναι 1ου βαθμού), τότε η ευθεία και η κωνική ***τέμνονται*** σε δύο ή σε ένα σημείο αντίστοιχα.

— Αν η εξίσωση έχει ***δύο ρίζες ίσες***, δηλαδή αν είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=0$, τότε αποδεικνύεται ότι η ευθεία ***εφάπτεται*** της κωνικής.

—Τέλος, αν η εξίσωση ***δεν έχει ρίζες***, τότε η ευθεία και η κωνική ***δεν έχουν κοινά σημεία.***



Για ***παράδειγμα,*** έστω η ευθεία $y=x+1$ και η παραβολή $y^2=4x$.

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y^2=4x \end{cases}$$

Αν στην εξίσωση της παραβολής θέσουμε όπου $y=x+1$, βρίσκουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση $(x+1)^2=4x \Leftrightarrow x^2+2x+1=4x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$, η οποία έχει τη διπλή ρίζα $x=1$. Άρα, η ευθεία εφάπτεται της κωνικής και το σημείο επαφής είναι το $M(1,2)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ - ΠΟΛ/ΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{2}$. **Σ** **Λ**

2. Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = 0$ παριστάνει υπερβολή για κάθε $\kappa, \lambda \in R$. **Σ** **Λ**

3. Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. **Σ** **Λ**

---

4. Μια ασύμπτωτη της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 400$ είναι

Α. $y = \frac{5}{4}x$ **Β.** $y = \frac{4}{5}x$ **Γ.** $y = \frac{16}{25}x$ **Δ.** $y = \frac{25}{16}x$

Ε. καμία από τις προηγούμενες.

---

5. Μια υπερβολή έχει εξίσωση C: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Τότε

Α. η C έχει τις εστίες της στον άξονα $y΄y$ **Β.** έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm \frac{4}{3}x$

Γ. έχει εστίες Ε΄ (- 5, 0), Ε (5, 0) **Δ.** είναι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$

Ε. έχει κορυφές Α΄ (- 3, 0), Α (3, 0).

---

6. Η εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda y^2 = \mu$ με $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$ παριστάνει πάντα υπερβολή με

Α. $\mu = 1$ **Β.** $\kappa.\lambda < 0$ **Γ.** $\mu < 0$ **Δ.** $\kappa \neq \lambda$ **Ε.** $\kappa = \mu$ ή $\lambda = \mu$.

---

7. Ένα σημείο της υπερβολής $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ είναι το Μ (1, 2). Η εφαπτομένη της στο Μ έχει εξίσωση

Α. $x + y + 1 = 0$ **Β.** $2x - y = 2$ **Γ.** $x - 2y + 2 = 0$

Δ. $2x - y = - 2$ **Ε.** $x - y + 1 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. Δίνονται οι υπερβολές: i) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$, ii) $3x^2-\psi^2=3$, iii) $2x^2-4\psi^2=1$.
Να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες και τις ασύμπτωτες τους. Να παρασταθούν γραφικά.

---

2. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει ασύμπτωτες τις ευθείες ε_1: $\psi = \frac{1}{2}x$ και ε_2: $\psi = -\frac{1}{2}x$ και διέρχεται από το σημείο Μ(10,-4).

---

3. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα x΄x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

α) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 6 και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{3}{2}$

β) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 20 και εξισώσεις ασυμπτώτων $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$.

γ) έχει εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) = 4 και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

---

4. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$.

---

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ οι οποίες είναι παράλληλες με την ευθεία $2x-y+1=0$.

---

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $7x^2-9y^2=63$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο Α(3,2).

---

7. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

---

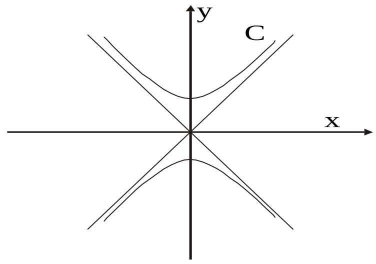
8. Δίνεται η έλλειψη C_1: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1$ και η υπερβολή C_2: $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$. Δείξτε ότι

α) Έχουν τις ίδιες εστίες.

β) Οι εφαπτόμενες στα σημεία τομής τους είναι κάθετες.

---

9. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν:



α) οι εστίες της υπερβολής

β) η εστιακή της απόσταση

γ) η εξίσωσή της

δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής

ε) η εκκεντρότητά της.

---

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία $y = 2$.

---

11. Έστω η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να δειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

---

12. Θεωρούμε την υπερβολή C: $x^2 - y^2 = 1$ και την ευθεία (ε): $x + 2y = \alpha$. Να βρεθούν οι τιμές του α, για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C.

---

13. Έστω Μ τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = \alpha^2$, (ε) η εφαπτομένη στο Μ και Α, Β τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό.

---

14. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2 - 4y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x - y = 0$.

---

15. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της $M(x_1,y_1)$ στον κλάδο C_1 ($y_1 \neq 0$).

α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) στο σημείο Μ και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

β) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον x΄x σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.

γ) Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο Μ΄ (x_2, y_2), να δείξετε ότι $y_1 . y_2 < 0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Κάθε κωνική της στήλης (Α) έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α **είδος κωνικής**	**στήλη Β** **εξίσωση γραμμής**
1) κύκλος	**Α)** $x + y = 1$
2) παραβολή	**Β)** $x^2 + y^2 = 0$
3) έλλειψη	**Γ)** $x^2 = 9 - (y - 1)^2$
4) υπερβολή	**Δ)** $9x^2 = 63 + 7y^2$
	Ε) $y^2 - 16x = 0$
	ΣΤ) $4x^2 = 100 - 25y^2$

3. Σε κάθε γραμμή της στήλης (Α) γράφεται η εξίσωση μιας κωνικής, η οποία έχει εκκεντρότητα που γράφεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο στηλών.

στήλη Α **εξίσωση κωνικής**	**στήλη Β** **εκκεντρότητα**
1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	**Α)** $\sqrt{3}$
2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	**Β)** $\frac{\sqrt{13}}{3}$
3) $4x^2 + 9y^2 = 36$	**Γ)** $\frac{\sqrt{5}}{3}$
	Δ) $-\sqrt{13}$
	Ε) $\frac{\sqrt{3}}{2}$