

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Κεφάλαιο 1

Θέματα Β

Οριζόντια βολή

1. (16039) Δύο σώματα Α και Β εκτοξεύονται ταυτόχρονα οριζόντια από σημεία που απέχουν από το έδαφος ύψη h και $9h$ αντίστοιχα.

(α) Το Α σώμα θέλει τριπλάσιο χρόνο από το Β σώμα για να φτάσει στο έδαφος.

(β) Το Β σώμα θέλει τριπλάσιο χρόνο από το Α σώμα για να φτάσει στο έδαφος.

(γ) Τα δύο σώματα Α και Β φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος.

Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα y .

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2y}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}. \quad (1)$$

Σώμα Α

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι : $y_A = h$

$$\xrightarrow{(1)} t_A = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (2)$$

Σώμα Β

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι : $y_B = 9h$

$$\xrightarrow{(1)} t_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 9h}{g}} \Rightarrow t_B = 3\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει : $t_B = 3t_A$.

εναλλακτικός τρόπος

Κάθε σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα y .

Γράφουμε την εξίσωση της μετατόπισης για κάθε σώμα.

Σώμα Α

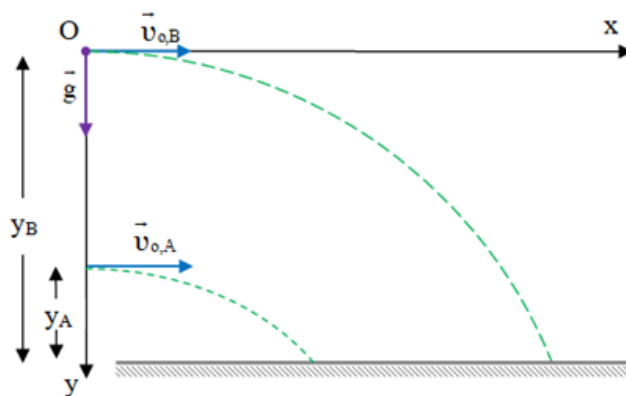
$$y_A = \frac{1}{2}gt_A^2 \xrightarrow{y_A=h} h = \frac{1}{2}gt_A^2. \quad (1)$$

Σώμα Β

$$y_B = \frac{1}{2}gt_B^2 \xrightarrow{y_B=9h} 9h = \frac{1}{2}gt_B^2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει :

$$\frac{1}{2}gt_B^2 = 9 \cdot \frac{1}{2}gt_A^2 \Leftrightarrow t_B^2 = 9t_A^2 \Leftrightarrow t_B = 3t_A.$$



Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

2. (16049) Μικρή σφαίρα αφήνεται να πέσει από μικρό ύψος h από το έδαφος, εκτελώντας ελεύθερη πτώση. Μια ίδια σφαίρα βάλλεται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος με οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_0 . Έστω Δt_1 και Δt_2 τα χρονικά διαστήματα που κάνουν η πρώτη και η δεύτερη σφαίρα, αντίστοιχα, για να φτάσουν στο έδαφος. Η σχέση ανάμεσα στα δύο χρονικά διαστήματα είναι:

(α) $\Delta t_1 < \Delta t_2$, (β) $\Delta t_1 = \Delta t_2$, (γ) $\Delta t_1 > \Delta t_2$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

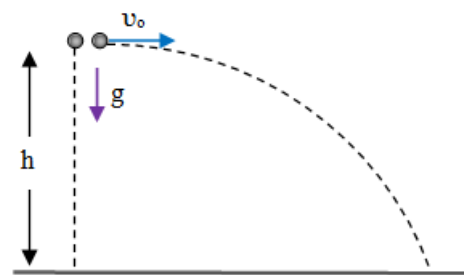
Απάντηση

Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα y .

Τη στιγμή που φτάνει η σφαίρα στο έδαφος έχει διανύσει κατακόρυφα απόσταση $y = h$.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης :

$$y = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \xrightarrow{y=h} (\Delta t)^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$



Αφού οι σφαίρες πέφτουν από το ίδιο ύψος h άρα η χρονική διάρκεια της κίνησής τους είναι ίδια, δηλαδή : $\Delta t_1 = \Delta t_2$.

εναλλακτικός τρόπος

Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση στον κατακόρυφο άξονα y .

Τη στιγμή που φτάνει η σφαίρα στο έδαφος έχει διανύσει κατακόρυφα απόσταση $y = h$.

Γράφουμε την εξίσωση της μετατόπισης για κάθε σφαίρα μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Σφαίρα 1

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2. \quad (1)$$

Σφαίρα 2

$$h = \frac{1}{2}gt_2^2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : $\frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Leftrightarrow t_1^2 = t_2^2 \Leftrightarrow t_1 = t_2$.

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

3. (16085) Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από κάποιο ύψος με ταχύτητα μέτρου v_0 . Ο χρόνος που περνά για να γίνει το μέτρο της ταχύτητας του σώματος ίσο με $3v_0$ είναι ίσος με :

(α) $t = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g}$ (β) $t = \frac{2v_0 \sqrt{2}}{g}$ (γ) $t = \frac{v_0}{g}$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στον άξονα x η ταχύτητα είναι σταθερή :

$$v_x = v_0. \quad (1)$$

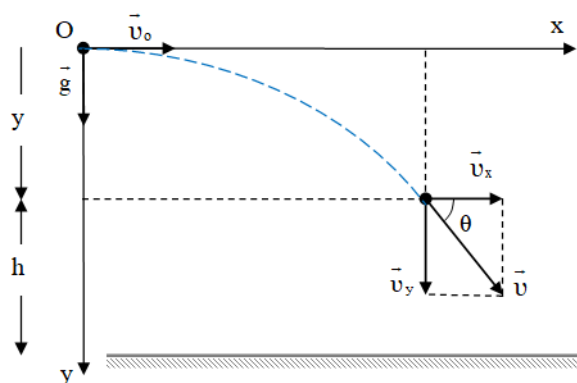
Στον άξονα y το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, άρα :

$$v_y = gt. \quad (2)$$

Για το μέτρο της συνισταμένης ταχύτητας ισχύει :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \xrightarrow{(1),(2)} (3v_0)^2 = v_0^2 + (gt)^2 \Leftrightarrow$$

$$9v_0^2 - v_0^2 = g^2 t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{8v_0^2}{g^2} \Leftrightarrow t = \frac{2\sqrt{2}v_0}{g}.$$



Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

4. (16098) Αν για ένα σώμα που εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 , το οριζόντιο βεληνεκές είναι ίσο με S , τότε το ύψος H από το οποίο εκτοξεύθηκε το αντικείμενο είναι:

(α) $\frac{2v_0^2}{g}$, β) $\frac{2v_0^2}{gs^2}$, (γ) $\frac{gs^2}{2v_0^2}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Να θεωρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας σταθερή και αμελητέες τις δυνάμεις που ασκεί ο ατμοσφαιρικός αέρας.

Απάντηση

άξονας x : Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

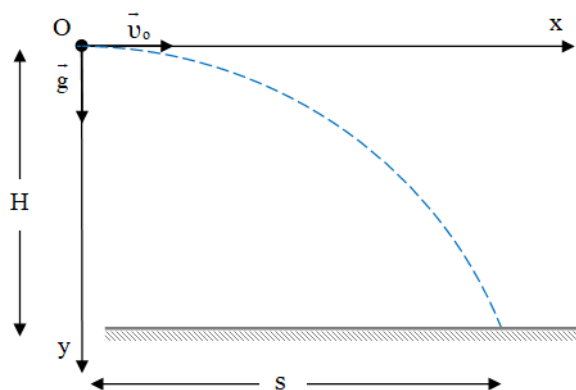
Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, έχει διανύσει οριζόντια απόσταση : $s = v_0 t_{ολ}$. (βεληνεκές)

Από τη σχέση αυτή προκύπτει : $t_{ολ} = \frac{s}{v_0}$. (1)

άξονας y : Το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση :

$$H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \xrightarrow{(1)} H = \frac{1}{2} g \left(\frac{s}{v_0} \right)^2 \Leftrightarrow H = \frac{1}{2} g \frac{s^2}{v_0^2} \Leftrightarrow H = \frac{gs^2}{2v_0^2}.$$



5. (16118) Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 εκτοξεύονται οριζόντια με την ίδια ταχύτητα από σημεία Α και Β αντίστοιχα που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και σε ύψη από το έδαφος h_1 και h_2 αντίστοιχα για τα οποία ισχύει $h_1 = 4h_2$. Αν η οριζόντια μετατόπιση από το σημείο εκτόξευσης των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 μέχρι το σημείο πρόσκρουσης στο έδαφος (δηλαδή το βεληνεκές), είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει:

(α) $x_1 = 4x_2$, (β) $x_1 = \sqrt{2}x_2$, (γ) $x_1 = 2x_2$.

Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Γράφουμε τις εξισώσεις της μετατόπισης σε κάθε άξονα και τις συνδυάζουμε απαλοίζοντας το χρόνο.

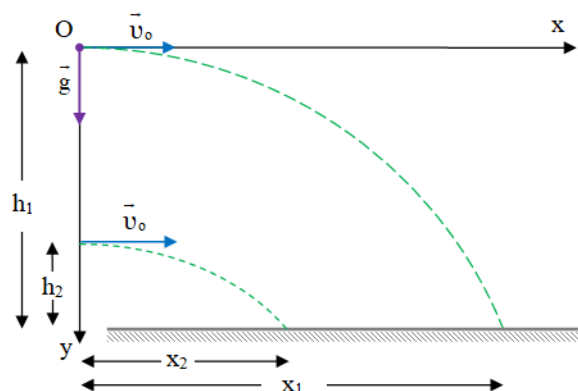
άξονας x

$$x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0} \quad (1)$$

άξονας y

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{(1)} y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \Leftrightarrow y = \frac{g x^2}{2 v_0^2} \quad (2)$$

(εξίσωση τροχιάς)



Σφαίρα Σ_1

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος ισχύει: $y_1 = h_1 \xrightarrow{(2)} h_1 = \frac{g x_1^2}{2 v_0^2} \quad (3)$

Σφαίρα Σ_2

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος ισχύει: $y_2 = h_2 \xrightarrow{(2)} h_2 = \frac{g x_2^2}{2 v_0^2} \quad (4)$

Ισχύει: $h_1 = 4h_2 \xrightarrow{(3),(4)} \frac{g x_1^2}{2 v_0^2} = 4 \frac{g x_2^2}{2 v_0^2} \Leftrightarrow x_1^2 = 4x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2.$

Σχόλιο: Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

6. (16206) Από σημείο O που βρίσκεται σε ύψος H από το έδαφος βάλλεται οριζόντια ένα σώμα μάζας m με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 , έχοντας κινητική ενέργεια K_0 (η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σταθερή με τιμή g και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα).

Τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του σώματος είναι διπλάσια από την αρχική, το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας είναι v_y και της οριζόντιας συνιστώσας είναι v_x .

Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων $\frac{v_x}{v_y}$ του σώματος εκείνη τη στιγμή είναι ίσος με:

(α) $\frac{1}{2}$,

(β) 2,

(γ) 1.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της οριζόντιας βολής, σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει η σχέση :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2. \quad (1)$$

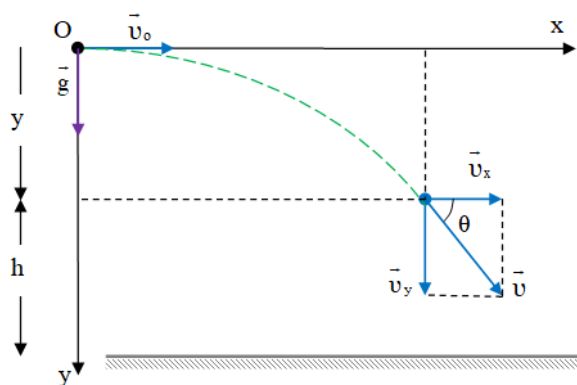
Για τις κινητικές ενέργειες ισχύει :

$$K = 2K_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v^2 = 2v_0^2 \xrightarrow{(1)}$$

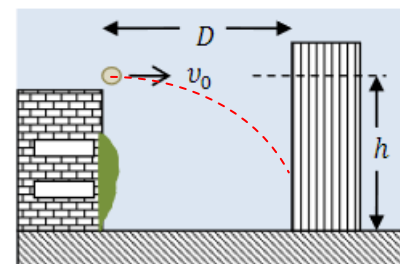
$$v_x^2 + v_y^2 = 2v_0^2.$$

Αφού $v_x = v_0$, άρα :

$$v_x^2 + v_y^2 = 2v_x^2 \Rightarrow v_y^2 = v_x^2 \Rightarrow v_y = v_x \Rightarrow \frac{v_x}{v_y} = 1.$$



7. (16249) Μικρή σφαίρα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$ από την ταράτσα ενός κτιρίου. Η ταράτσα βρίσκεται σε ύψος $h = 45 \text{ m}$ από το έδαφος, που θεωρείται οριζόντιο. Σε απόσταση $D = 20 \text{ m}$ από το κτίριο αυτό υπάρχει δεύτερο ψηλό κτίριο όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.



Ο χρόνος κίνησης μέχρι την πρώτη πρόσκρουση του σώματος (είτε στο έδαφος είτε στο απέναντι κτήριο) είναι:

- (α) 3 s , (β) 2 s , (γ) 1 s .

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Μέχρι να συγκρουστεί η σφαίρα είτε με το απέναντι κτίριο είτε με το έδαφος, εκτελεί οριζόντια βολή.

άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η μετατόπιση στον άξονα x υπολογίζεται από τη σχέση : $x = v_0 t$.

Για να διανύσει η σφαίρα την οριζόντια απόσταση D χρειάζεται χρόνο t_1 .

$$\text{Άρα : } D = v_0 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{D}{v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{20 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

άξονας y : ελεύθερη πτώση.

Η μετατόπιση στον άξονα y υπολογίζεται από τη σχέση : $y = \frac{1}{2} g t^2$.

1ος τρόπος

Για να φτάσει η σφαίρα στο έδαφος (χωρίς να συγκρουστεί με το κτίριο) θα διανύσει κατακόρυφη απόσταση h σε χρόνο t_2 .

$$\text{Άρα : } h = \frac{1}{2} g t_2^2 \Leftrightarrow t_2^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{9 \text{ s}^2} \Rightarrow t_2 = 3 \text{ s}.$$

Αφού $t_1 < t_2$, η σφαίρα θα χτυπήσει πρώτα στο απέναντι κτίριο μετά από χρόνο $t_1 = 2 \text{ s}$.

2ος τρόπος

Μετά από χρόνο $t_1 = 2 \text{ s}$ η σφαίρα έχει κατέβει κατακόρυφα κατά $y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \text{ m} = 20 \text{ m}$.

Αφού $y_1 < h$, η σφαίρα δεν έχει φτάσει στο έδαφος, άρα έχει χτυπήσει πρώτα στο απέναντι κτίριο.

Σχόλιο : Η αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ έχει διεύθυνση κάθετη στην πρόσοψη του απέναντι κτιρίου.

8. (16264) Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από κάποιο ύψος h πάνω από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα v_0 . Κάποια στιγμή η οριζόντια μετατόπιση x έχει το ίδιο μέτρο με την κατακόρυφη μετατόπιση y . Τη στιγμή αυτή, η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο:

(α) $v_0\sqrt{3}$, (β) $v_0\sqrt{5}$, (γ) $v_0\sqrt{7}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η μετατόπιση στον άξονα x υπολογίζεται από τη σχέση : $x = v_0 t$. (1)

άξονας y : ελεύθερη πτώση.

Η μετατόπιση στον άξονα y υπολογίζεται από τη σχέση : $y = \frac{1}{2}gt^2$. (2)

Ισχύει :

$$y = x \xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t = 0 \Leftrightarrow t \left(\frac{1}{2}gt - v_0 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0, \text{ απορρίπτεται} \\ \text{ή} \\ \frac{1}{2}gt = v_0 \Leftrightarrow t = \frac{2v_0}{g} \end{cases}$$

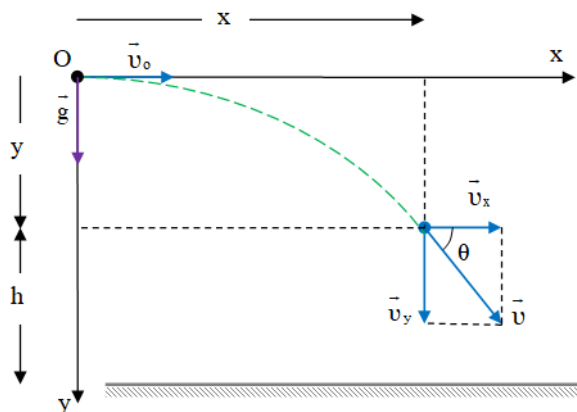
Τη χρονική στιγμή $t = \frac{2v_0}{g}$ η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_y = gt = g \cdot \frac{2v_0}{g} \Rightarrow v_y = 2v_0.$$

Την ίδια χρονική στιγμή, η (συνισταμένη) ταχύτητα έχει μέτρο :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (2v_0)^2} = \sqrt{v_0^2 + 4v_0^2} = \sqrt{5v_0^2} \Rightarrow v = v_0\sqrt{5}.$$

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.



9. (16639) Σώμα μάζας m εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u_0 από μικρό ύψος h . Η τροχιά που θα διαγράψει το σώμα θα είναι παραβολή εάν:

(α) στο σώμα ασκούνται η βαρυτική δύναμη και η αντίσταση του αέρα.

(β) η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος του.

(γ) η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι μηδενική.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Όταν το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή από μικρό ύψος h , η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

Στον οριζόντιο άξονα x το σώμα δεν δέχεται δύναμη, άρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας: $v_x = v_0$.

Για την οριζόντια μετατόπιση μετά από χρόνο t ισχύει:

$$x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0}. \quad (1)$$

Στον κατακόρυφο άξονα y το σώμα δέχεται μόνο τη (σταθερή) δύναμη του βάρους, άρα κινείται με

$$\text{σταθερή επιτάχυνση: } a_y = \frac{B}{m} = \frac{mg}{m} \Rightarrow a_y = g.$$

Αφού $v_{0,y} = 0$, η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Για την κατακόρυφη μετατόπιση μετά από χρόνο t ισχύει:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{(1)} y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \Leftrightarrow y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2. \quad [\text{εξίσωση τροχιάς}]$$

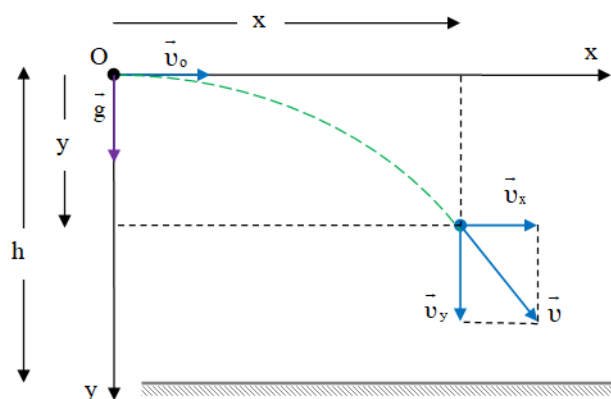
Η γραφική παράσταση αυτής της σχέσης είναι παραβολή.

Άρα, το σώμα θα διαγράψει παραβολική τροχιά όταν η μόνη δύναμη που ασκείται σ' αυτό είναι το βάρος του.

Σημείωση

Στην περίπτωση που ασκείται και η αντίσταση του αέρα (δύναμη μεταβλητού μέτρου), τότε το σώμα θα έχει μεταβλητή επιτάχυνση και στους δύο άξονες. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση δεν μπορεί να περιγραφεί με εξισώσεις και φυσικά η τροχιά δεν είναι παραβολή.

Στην περίπτωση που η συνισταμένη δύναμη είναι μηδενική, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στην οριζόντια διεύθυνση, αφού στον άξονα y η επιτάχυνση είναι μηδενική.



Σχόλιο: Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

10. (16737) Δύο σώματα Α και Β με μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$ αντίστοιχα, βρίσκονται στο ίδιο μικρό ύψος h από το έδαφος και εκτοξεύονται οριζόντια με ταχύτητες u_1 και $u_2 = 3u_1$ αντίστοιχα προς αντίθετες κατευθύνσεις. Αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, τότε

- (α) το σώμα Α θα φτάσει πρώτο στο έδαφος.
(β) το σώμα Β θα φτάσει πρώτο στο έδαφος.
(γ) τα δύο σώματα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος.

Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στον κατακόρυφο άξονα y κάθε σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h .

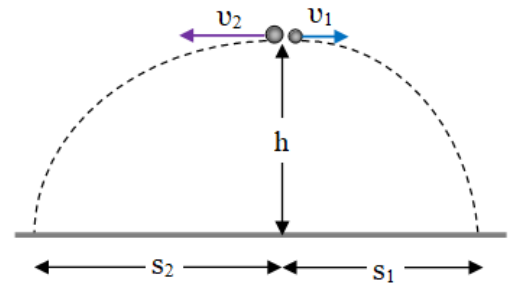
Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{y=h, t=t_{ολ}} h = \frac{1}{2}gt_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow$$

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η χρονική διάρκεια της κίνησης των δύο σωμάτων είναι ίδια.

Εφόσον εκτοξευτούν ταυτόχρονα τα σώματα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι τα σώματα εκτοξεύονται **ταυτόχρονα**.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

11. (16871) Από ύψος H πάνω από οριζόντιο δάπεδο και σε συγκεκριμένο τόπο, πετάμε μια μικρή σφαίρα, με οριζόντια αρχική ταχύτητα v_0 . Αν οι αντιστάσεις του αέρα αγνοηθούν, η τελική ταχύτητα της σφαίρας όταν φτάνει στο δάπεδο, σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία φ , η οποία είναι:

- (α) ανεξάρτητη από το μέτρο v_0 της αρχικής ταχύτητας.
 (β) εξαρτώμενη από το μέτρο v_0 της αρχικής ταχύτητας.
 (γ) πάντα ίση με 45° .

A Να επιλέξετε τι συμπληρώνει σωστά την παραπάνω πρόταση.

Μονάδες 4

B Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας έχει σταθερό μέτρο : $v_x = v_0$. (1)

άξονας y : ελεύθερη πτώση.

Το σώμα φτάνει στο έδαφος μετά από χρόνο $t_{ολ}$ έχοντας διανύσει κατακόρυφα απόσταση $y = H$.

Ισχύει :

$$H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (2)$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας τη στιγμή αυτή έχει μέτρο : $v_y = g t_{ολ}$. (3)

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει : $v_y = g \sqrt{\frac{2H}{g}} \Leftrightarrow v_y = \sqrt{2gH}$. (4)

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, η ταχύτητα $\vec{v}$ σχηματίζει με την οριζόντια γωνία φ , για την οποία

ισχύει : $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_x} \xrightarrow{(1),(4)} \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{2gH}}{v_0}$. (5)

Από τη σχέση (5) συμπεραίνουμε ότι η γωνία φ εξαρτάται από το μέτρο v_0 της αρχικής ταχύτητας.

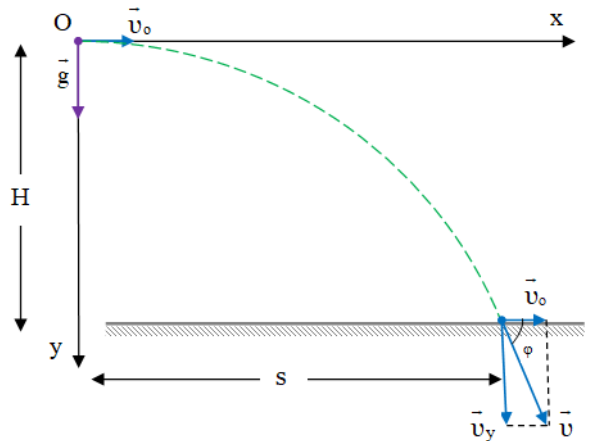
Εναλλακτικός τρόπος

Η σχέση (4) μπορεί να βρεθεί χωρίς τη χρήση των σχέσεων (2), (3) αλλά με εφαρμογή του ΘΜΚΕ :

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgH \Leftrightarrow (v_x^2 + v_y^2) - v_0^2 = 2gH \xrightarrow{(1)} v_y^2 = 2gH \Leftrightarrow$$

$$v_y = \sqrt{2gH}.$$

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.



12. (16873) Δύο μπάλες Α και Β κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες με μέτρα v_A και v_B αντίστοιχα στην επιφάνεια ενός λείου οριζόντιου τραπέζιου που βρίσκεται σε ύψος h από το δάπεδο και πέφτουν την ίδια χρονική στιγμή από την άκρη του.

Αν $v_A > v_B$ ποια σφαίρα θα φθάσει πρώτη στο έδαφος;

(α) η Α, (β) η Β,

(γ) θα φθάσουν ταυτόχρονα

Α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

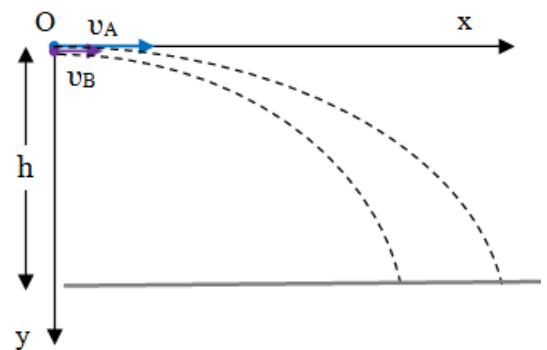
Αφού εγκαταλείψουν το τραπέζι, οι μπάλες θα εκτελέσουν οριζόντια βολή.

Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση κάθε μπάλας είναι ελεύθερη πτώση.

Τη στιγμή που φτάνει η μπάλα στο έδαφος έχει διανύσει κατακόρυφα απόσταση h .

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης :

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{y=h, t=t_{ολ}} t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$



Αφού οι μπάλες πέφτουν ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος h , θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος.

Σχόλια :

1) Στην ερώτηση «ποια σφαίρα θα φτάσει πρώτη στο έδαφος ; », δεν μπορεί να δοθεί η απάντηση «θα φτάσουν ταυτόχρονα».

Μια καλύτερη διατύπωση της ερώτησης είναι :

«Αν $v_A > v_B$, τότε

(α) θα φτάσει πρώτη στο έδαφος η Α ,

(β) θα φτάσει πρώτη στο έδαφος η Β ,

(γ) θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος».

2) Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

13. (19477) Ένα σώμα εκτοξεύεται από σημείο O την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και εκτελεί οριζόντια βολή. Η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας είναι διπλάσιο από το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας της, είναι ίση με:

- α) $\frac{v_0}{g}$ β) $\frac{2v_0}{g}$ γ) $\frac{v_0}{2g}$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

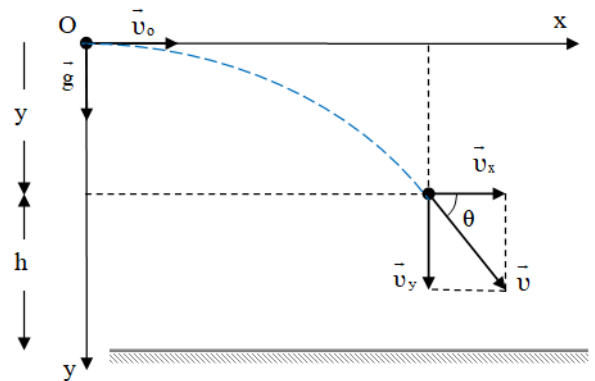
Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας έχει σταθερό μέτρο : $v_x = v_0$. (1)

άξονας y : ελεύθερη πτώση.

Τη χρονική στιγμή t_1 η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_y = gt_1. \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει : } v_y = 2v_x \xrightarrow{(1),(2)} gt_1 = 2v_0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2v_0}{g}.$$



Σχόλιο : Το σώμα εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

α) παραμένει ίδιο β) διπλασιάζεται γ) τετραπλασιάζεται
Α. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

άξονας y : ελεύθερη πτώση.

Ισχύει :

δηλαδή ο χρόνος κίνησης δεν εξαρτάται από το μέτρο της αρχικής ταχύτητας.

άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

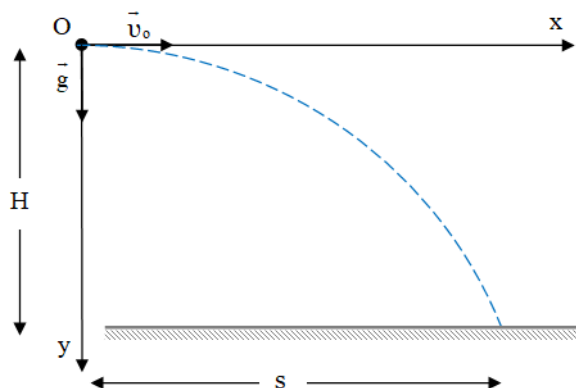
Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, το σώμα έχει διανύσει οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) :

$$s = v_0 t_{0\lambda} \quad (1)$$

Αν το σώμα εκτοξευτεί με διπλάσια αρχική ταχύτητα ($v_0' = 2v_0$), τότε το βεληνεκές θα είναι :

$$s' = 2v_0 t_{0\lambda}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : $s' = 2s$.



Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

15. (19651) Ένα σώμα εκτελεί οριζόντια βολή, από ύψος H , με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$. Το βεληνεκές της είναι ίσο με S_1 . Αν το ίδιο σώμα εκτελέσει οριζόντια βολή από ύψος $4H$, με την ίδια αρχική οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$, τότε το βεληνεκές:

- (α) δε μεταβάλλεται.
 (β) υποδιπλασιάζεται.
 (γ) διπλασιάζεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το σώμα δέχεται μόνο το βάρος του, που είναι σταθερό.

Απάντηση

1η περίπτωση

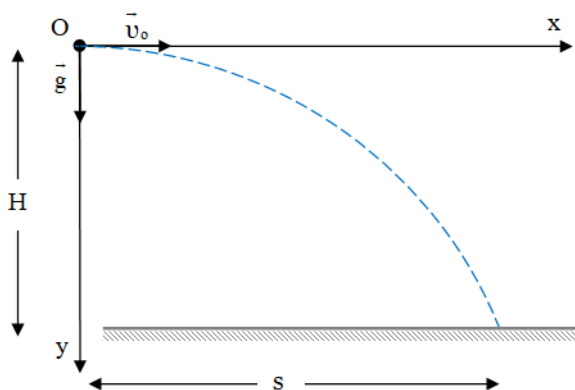
Το σώμα εκτοξεύεται από ύψος H με οριζόντια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$.

άξονας y : ελεύθερη πτώση.

Το σώμα φτάνει στο έδαφος μετά από χρόνο $t_{ολ}$ έχοντας διανύσει κατακόρυφη απόσταση $y = H$.

Ισχύει :

$$H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1)$$



άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, έχει διανύσει οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) :

$$s = v_0 t_{ολ} \xrightarrow{(1)} s = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (2)$$

2η περίπτωση

Το σώμα εκτοξεύεται από ύψος $H' = 4H$ με οριζόντια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$.

$$\text{Με την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε στη σχέση : } s' = v_0 \sqrt{\frac{2H'}{g}} = v_0 \sqrt{\frac{2 \cdot 4H}{g}} \Rightarrow s' = 2v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) συμπεραίνουμε ότι : $s' = 2s$.

16. (20105) Μια βόμβα μάζας m βρίσκεται στιγμιαία ακίνητη σε ύψος H από την επιφάνεια της Γης. Τη στιγμή εκείνη, εκρήγνυται σε δύο κομμάτια, που εκτοξεύονται οριζόντια με ταχύτητες μέτρου v_1 και v_2 αντίστοιχα.

Αν γνωρίζετε ότι το οριζόντιο βεληνεκές S_2 του δεύτερου κομματιού είναι διπλάσιο του οριζόντιου βεληνεκούς S_1 του πρώτου κομματιού τότε, τα μέτρα των ταχυτήτων v_1 και v_2 ικανοποιούν τη σχέση:

(α) $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4}$, (β) $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$, (γ) $\frac{v_1}{v_2} = 2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

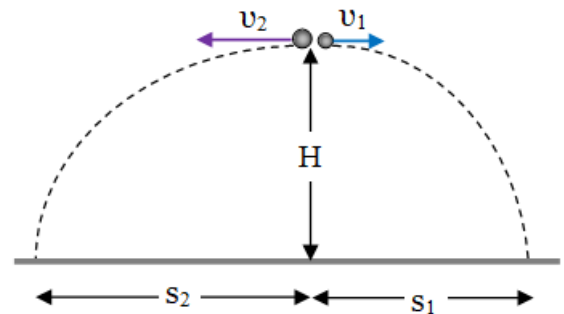
Μονάδες 9

Απάντηση

Στον άξονα y τα σώματα εκτελούν ελεύθερη πτώση από το ίδιο ύψος H , άρα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος μετά από χρόνο $t_{ολ}$.

Ισχύει :

$$H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$



1ο κομμάτι

Στον άξονα x εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_1$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, έχει διανύσει οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) : $S_1 = v_1 t_{ολ}$. (1)

2ο κομμάτι

Στον άξονα x εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_2$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, έχει διανύσει οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) : $S_2 = v_2 t_{ολ}$. (2)

Αφού $S_2 = 2S_1 \xrightarrow{(1),(2)} v_2 t_{ολ} = 2v_1 t_{ολ} \Leftrightarrow v_2 = 2v_1 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$.

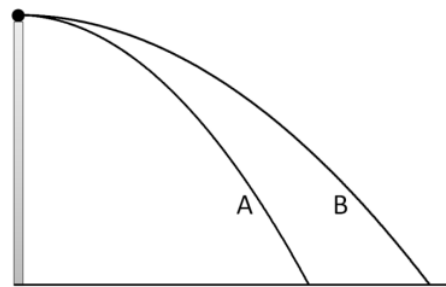
Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

17. (20230) Η σφαίρα του σχήματος εκτοξεύεται δύο φορές με διαφορετικές αρχικές ταχύτητες εκτελώντας οριζόντια βολή, από το ίδιο ύψος h από το έδαφος. Στο σχήμα φαίνεται η τροχιά που ακολουθεί μετά την πρώτη ρίψη (A) και μετά τη δεύτερη ρίψη (B) αντίστοιχα.

Ο χρόνος που θα κινηθεί η σφαίρα μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι:

- (α) μεγαλύτερος στην τροχιά A ,
 - (β) μεγαλύτερος στην τροχιά B ,
 - (γ) ίδιος για τις τροχιές A και B
- A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

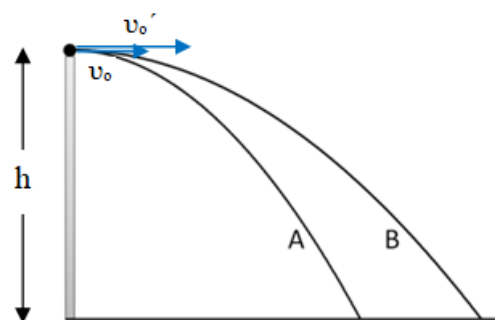
Απάντηση

Στον άξονα y η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h και φτάνει στο έδαφος μετά από χρόνο $t_{ολ}$.

Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι ο χρόνος κίνησης είναι ανεξάρτητος από την (οριζόντια) αρχική ταχύτητα, άρα είναι ίδιος για τις τροχιές A και B.



Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

18. (20232) Δύο βομβαρδιστικά αεροπλάνα (1) και (2) κινούνται με ταχύτητες οριζόντιας διεύθυνσης, σε ύψη $H_1 = H$ και $H_2 = \frac{5H}{2}$ αντίστοιχα, πάνω από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, αφήνεται να πέσει από κάθε αεροπλάνο μία βόμβα. Οι βόμβες φτάνουν στο έδαφος τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε μηδενική την αντίσταση του αέρα, για το λόγο $\frac{t_1}{t_2}$, ισχύει:

(α) $\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$, (β) $\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, (γ) $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

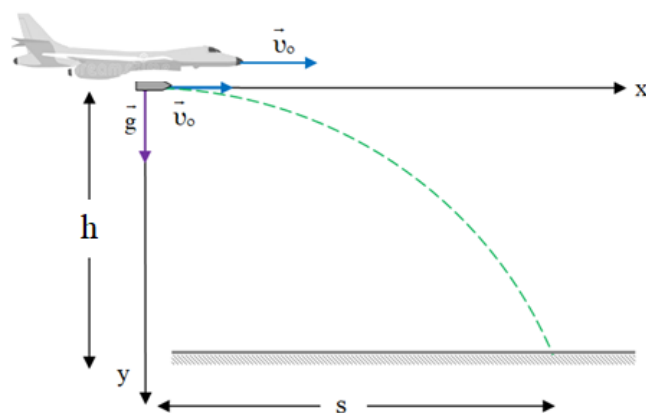
Απάντηση

Τη στιγμή που αφήνονται οι βόμβες έχουν την (οριζόντια) ταχύτητα $\vec{v}_0$ του αεροπλάνου, άρα εκτελούν οριζόντια βολή.

1η βόμβα

Στον άξονα y εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος H. Για τον χρόνο κίνησης t_1 μέχρι να φτάσει στο έδαφος ισχύει :

$$H = \frac{1}{2}gt_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1)$$



2η βόμβα

Στον άξονα y εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος $\frac{5H}{2}$. Για τον χρόνο κίνησης t_2 μέχρι να φτάσει στο έδαφος ισχύει :

$$\frac{5H}{2} = \frac{1}{2}gt_2^2 \Leftrightarrow t_2^2 = \frac{5H}{g} \Leftrightarrow t_2 = \sqrt{\frac{5H}{g}}. \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{\frac{2H}{g}}}{\sqrt{\frac{5H}{g}}} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

19. (20233) Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος h πάνω από το έδαφος με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_0$. Κάποια χρονική στιγμή t_0 αφήνεται να πέσει από το αεροπλάνο μία βόμβα. Η βόμβα φτάνει στο έδαφος μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$. Το βομβαρδιστικό αεροπλάνο εξακολουθώντας την οριζόντια κίνησή του στο ίδιο ύψος h , αυξάνει την ταχύτητά του σε $2\vec{v}_0$ και τη διατηρεί σταθερή. Κάποια επόμενη χρονική στιγμή t_1 αφήνεται να πέσει από το αεροπλάνο μία δεύτερη βόμβα. Η βόμβα φτάνει στο έδαφος μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t'$.

Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν τριβές και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα τότε :

(α) $\Delta t' = 2 \text{ s}$, (β) $\Delta t' = 4 \text{ s}$, (γ) $\Delta t' = 8 \text{ s}$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

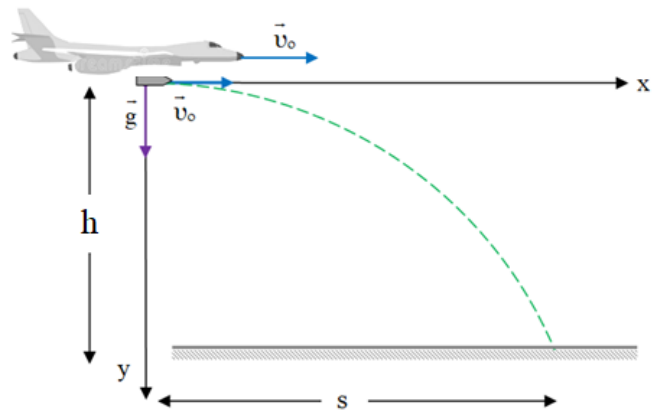
Απάντηση

Τη στιγμή που αφήνονται οι βόμβες έχουν την (οριζόντια) ταχύτητα του αεροπλάνου, άρα εκτελούν οριζόντια βολή από το ίδιο ύψος.

Στον άξονα y κάθε βόμβα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h . Η χρονική διάρκεια κίνησης Δt μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι :

$$h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η χρονική διάρκεια της κίνησης δεν εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα της βόμβας, άρα : $\Delta t' = \Delta t = 4 \text{ s}$.



Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

20. (21438) Μικρή σφαίρα εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ οριζόντια, με ταχύτητα $\vec{v}_0$ από ύψος H από το έδαφος. Τη χρονική στιγμή $t = t_1$ η σφαίρα απέχει $h = \frac{15 \cdot H}{16}$ από το έδαφος.

Εάν s η συνολική οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η σφαίρα μέχρι να φτάσει στο έδαφος και s_1 η οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει η σφαίρα μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , τότε ισχύει:

$$(\alpha) s_1 = \frac{1}{2} \cdot s \quad , \quad (\beta) s_1 = \frac{1}{4} \cdot s \quad , \quad (\gamma) s_1 = \frac{1}{8} \cdot s$$

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

άξονας y

Η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Ισχύει :

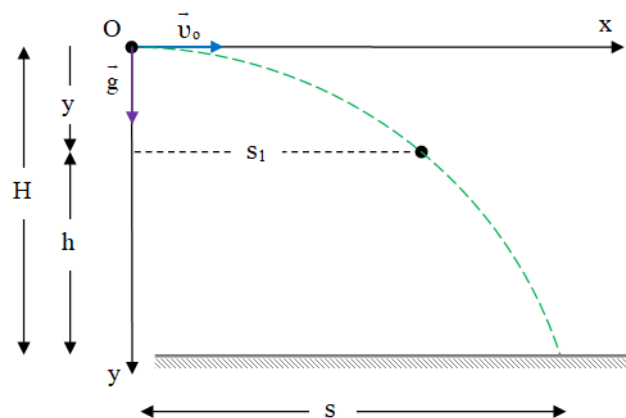
$$y = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2y}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}. \quad (1)$$

άξονας x

Η σφαίρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Ισχύει :

$$x = v_0 t \xrightarrow{(1)} x = v_0 \sqrt{\frac{2y}{g}}. \quad (2)$$



Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα έχει μετακινηθεί οριζόντια κατά $x = s_1$ και κατακόρυφα κατά

$$y = H - h = H - \frac{15H}{16} \Rightarrow y = \frac{H}{16}.$$

$$\text{Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει : } s_1 = v_0 \sqrt{\frac{2 \frac{H}{16}}{g}} \Leftrightarrow s_1 = \frac{v_0}{4} \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (3)$$

Μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος η σφαίρα έχει μετακινηθεί οριζόντια κατά $x = s$ και κατακόρυφα κατά $y = H$.

$$\text{Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) προκύπτει : } s = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (4)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (3), (4) συμπεραίνουμε ότι : } s_1 = \frac{1}{4} s.$$

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

21. (21440) Μία μικρή σφαίρα εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}_0$ από ύψος h . Το μέτρο της ταχύτητάς της όταν φτάνει στο έδαφος είναι ίσο με $2 \cdot v_0$. Το ύψος h από το οποίο εκτοξεύτηκε η σφαίρα δίνεται από τη σχέση:

$$(\alpha) h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \quad , \quad (\beta) h = \frac{2 \cdot v_0^2}{3 \cdot g} \quad , \quad (\gamma) h = \frac{3 \cdot v_0^2}{2 \cdot g}$$

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

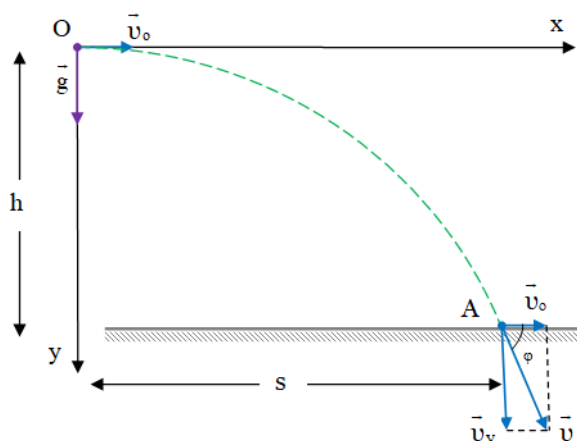
B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση εκτόξευσης μέχρι να φτάσει στο έδαφος :

$$\begin{aligned} K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} &= W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \xrightarrow{v=2v_0} \\ (2v_0)^2 - v_0^2 &= 2gh \Leftrightarrow 4v_0^2 - v_0^2 = 2gh \Leftrightarrow 3v_0^2 = 2gh \\ \Leftrightarrow h &= \frac{3v_0^2}{2g}. \end{aligned}$$



2ος τρόπος

Για το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, ισχύει : $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

Αφού $v = 2v_0$, $v_x = v_0$ και $v_y = gt$ άρα :

$$(2v_0)^2 = v_0^2 + (gt)^2 \Leftrightarrow 4v_0^2 - v_0^2 = g^2t^2 \Leftrightarrow 3v_0^2 = g^2t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{3v_0^2}{g^2}. \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε το χρόνο από τη σχέση (1) στην εξίσωση της μετατόπισης y :

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[y=h]{(1)} h = \frac{1}{2}g \frac{3v_0^2}{g^2} \Leftrightarrow h = \frac{3v_0^2}{2g}.$$

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

22. (21688) Δύο παιδιά, η Μαρία και η Γεωργία, παίζουν στην ακροθαλασσιά πετώντας πέτρες. Κάποια στιγμή τα δύο παιδιά πετούν ταυτόχρονα, από το ίδιο ύψος H από την επιφάνεια της θάλασσας, από μία πέτρα με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_M$ και $\vec{v}_Γ$ αντίστοιχα. Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει $v_M > v_Γ$. Κατά την κίνηση, h_M και $h_Γ$ είναι τα ύψη από την επιφάνεια της θάλασσας που βρίσκονται τη χρονική στιγμή t η πέτρα της Μαρίας και αυτή της Γεωργίας αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Για τα ύψη h_M και $h_Γ$ κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

(α) $h_M < h_Γ$, (β) $h_M = h_Γ$, (γ) $h_M > h_Γ$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

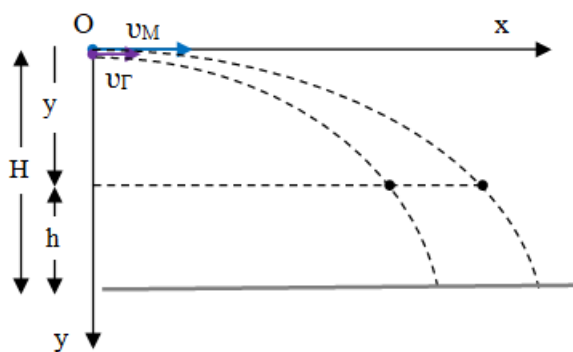
Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Η απόσταση y που διανύει κατακόρυφα κάθε πέτρα σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση :

$$y = \frac{1}{2}gt^2. \quad (1)$$

Η απόσταση h από το έδαφος είναι :

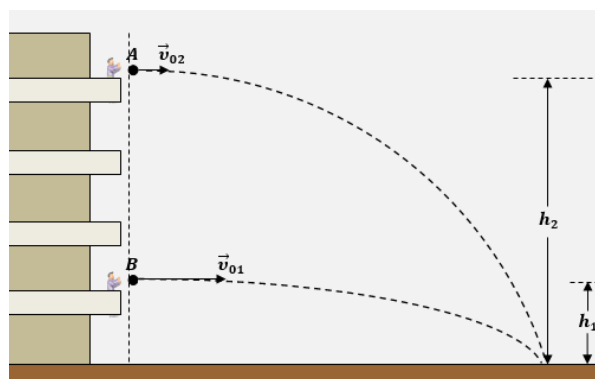
$$h = H - y \xrightarrow{(1)} h = H - \frac{1}{2}gt^2. \quad (2)$$



Αφού οι πέτρες εκτοξεύονται ταυτόχρονα από το ίδιο ύψος H με οριζόντιες ταχύτητες, άρα την ίδια χρονική στιγμή t θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος h , δηλαδή ισχύει : $h_M = h_Γ$.

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

23. (22515) Δύο άνθρωποι που βρίσκονται σε μπαλκόνια ενός ψηλού κτιρίου, πετούν από μια μικρή σφαίρα ο καθένας. Ο ένας πετάει τη δική του σφαίρα με αρχική οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_{02}$, από σημείο A το οποίο βρίσκεται σε ύψος h_2 από το οριζόντιο έδαφος. Ο άλλος πετάει τη δική του σφαίρα με αρχική οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_{01}$, από σημείο B το οποίο βρίσκεται σε ύψος h_1 από το οριζόντιο έδαφος.



Αν δίνεται ότι για τα δύο ύψη ισχύει η σχέση $h_2 = 4 \cdot h_1$, ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα και ότι οι δύο σφαίρες έφτασαν στο ίδιο ακριβώς σημείο στο οριζόντιο έδαφος που βρίσκεται στη βάση του κτιρίου, τότε για τα μέτρα των οριζόντιων αρχικών ταχυτήτων των δύο σφαιρών ισχύει η σχέση:

$$(α) \ v_{01} = 2 \cdot v_{02} \quad , \quad (β) \ v_{01} = v_{02} \quad , \quad (γ) \ v_{02} = 2 \cdot v_{01}$$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

άξονας y

Κάθε σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Ισχύει :

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2y}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}. \quad (1)$$

άξονας x

Κάθε σφαίρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Ισχύει :

$$x = v_o t \xrightarrow{(1)} x = v_o \sqrt{\frac{2y}{g}}. \quad (2)$$

Τη στιγμή που φτάνουν οι σφαίρες στο έδαφος, είναι :

$$x_1 = v_{o,1} \sqrt{\frac{2h_1}{g}}, \quad (3) \quad x_2 = v_{o,2} \sqrt{\frac{2h_2}{g}}. \quad (4)$$

$$\text{Αφού } x_1 = x_2 \xrightarrow{(3),(4)} v_{o,1} \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = v_{o,2} \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \xrightarrow{h_2=4h_1} v_{o,1} \sqrt{h_1} = v_{o,2} \sqrt{4h_1} \Leftrightarrow v_{o,1} = 2v_{o,2}.$$

Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή.

Ομαλή κυκλική κίνηση

24. (16039) Δύο σφαιρίδια Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι, είναι δεμένα από ακλόνητα σημεία με λεπτά μη εκτατά νήματα μήκους L_1 και L_2 αντίστοιχα, όπου $L_1 = 3L_2$ και εκτελούν ομαλές κυκλικές κινήσεις με περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα, όπου $T_1 = 2T_2$. Για τα μέτρα α_1 και α_2 των κεντρομόλων επιταχύνσεων των σφαιριδίων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα ισχύει:

$$(\alpha) \alpha_1 = \frac{2}{3} \alpha_2, \quad (\beta) \alpha_1 = \frac{3}{4} \alpha_2, \quad (\gamma) \alpha_1 = \frac{4}{3} \alpha_2.$$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\alpha_k = \frac{v^2}{R}, \quad (1)$$

όπου v το μέτρο της (γραμμικής) ταχύτητας και R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

Το μέτρο της ταχύτητας και η περίοδος T συνδέονται με τη σχέση : $v = \frac{2\pi R}{T}$. (2)

Αντικαθιστούμε από τη σχέση (2) στην (1) :

$$\alpha_k = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} \Rightarrow \alpha_k = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \quad (3)$$

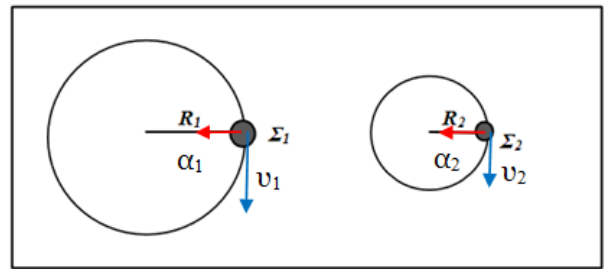
Εφαρμόζουμε τη σχέση (3) για κάθε σφαιρίδιο.

Σφαιρίδιο Σ_2

$$\alpha_2 = \frac{4\pi^2 L_2}{T_2^2} \quad (4)$$

Σφαιρίδιο Σ_1

$$\alpha_1 = \frac{4\pi^2 L_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3L_2}{(2T_2)^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4\pi^2 L_2}{T_2^2} \xrightarrow{(4)} \alpha_1 = \frac{3}{4} \alpha_2.$$



25. (16085) Δύο κινητά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζουν να κινούνται από αντιδιαμετρικά σημεία μίας περιφέρειας κύκλου αντίρροπα με συχνότητες f_1 και f_2 αντίστοιχα. Η χρονική στιγμή t που συναντιούνται για πρώτη φορά είναι:

(α) $\frac{2}{f_1 + f_2}$, (β) $\frac{1}{f_1 + f_2}$, (γ) $\frac{1}{2(f_1 + f_2)}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω ότι τα κινητά θα συναντηθούν μετά από χρόνο t .

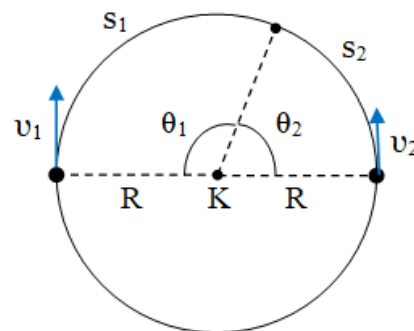
1ος τρόπος

κινητό 1

Σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα $s_1 = v_1 t$. (1)

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v_1 και η συχνότητα f_1 συνδέονται με τη σχέση: $v_1 = 2\pi R f_1$. (2)

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει: $s_1 = 2\pi R f_1 t$. (3)



κινητό 2

Σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα: $s_2 = 2\pi R f_2 t$. (4)

Τη στιγμή που συναντώνται τα κινητά έχουν καλύψει και τα δύο μαζί ένα ημικύκλιο, άρα ισχύει:

$$s_1 + s_2 = \pi R \xrightarrow{(3),(4)} 2\pi R f_1 t + 2\pi R f_2 t = \pi R \Leftrightarrow 2\pi R t(f_1 + f_2) = \pi R \Leftrightarrow t = \frac{1}{2(f_1 + f_2)}.$$

2ος τρόπος

κινητό 1

Σε χρόνο t η επιβατική ακτίνα θα διαγράψει γωνία $\theta_1 = \omega_1 t$. (1)

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω_1 και η συχνότητα f_1 συνδέονται με τη σχέση: $\omega_1 = 2\pi f_1$. (2)

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει: $\theta_1 = 2\pi f_1 t$. (3)

κινητό 2

Σε χρόνο t η επιβατική ακτίνα θα διαγράψει γωνία: $\theta_2 = 2\pi f_2 t$. (4)

Τη στιγμή που συναντώνται τα κινητά, οι επιβατικές ακτίνες έχουν διαγράψει συνολικά μία ευθεία γωνία, άρα ισχύει:

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi \xrightarrow{(3),(4)} 2\pi f_1 t + 2\pi f_2 t = \pi \Leftrightarrow 2\pi t(f_1 + f_2) = \pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2(f_1 + f_2)}.$$

26. (16104) Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο δεμένο σε ένα σχοινί. Το σχοινί σπάει όταν η δύναμη που θα του ασκηθεί είναι μεγαλύτερη ή ίση από T_θ (όριο θραύσης). Όταν το σώμα κινείται σε κύκλο ακτίνας R το σχοινί σπάει όταν η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο ω_1 . Όταν το σώμα κινείται σε κύκλο ακτίνας $\frac{R}{2}$ το σχοινί σπάει όταν η γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο ω_2 . Για το λόγο των μέτρων των δύο γωνιακών ταχυτήτων ισχύει:

α. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2$, β. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, γ. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η δύναμη $\vec{T}$ που ασκεί το σχοινί (τάση νήματος) είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Άρα : $T = m \frac{v^2}{R}$. (1)

Το μέτρο της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας συνδέονται με τη σχέση : $v = \omega R$. (2)

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει :

$T = m \frac{(\omega R)^2}{R} = m \frac{\omega^2 R^2}{R} \Rightarrow T = m \omega^2 R$. (3)

1η περίπτωση

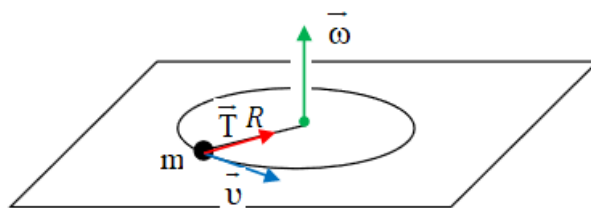
Τη στιγμή που είναι έτοιμο να κοπεί το σχοινί η τάση έχει μέτρο T_θ και το σώμα κινείται σε κύκλο ακτίνας R με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1 , άρα ισχύει : $T_\theta = m \omega_1^2 R$. (4)

2η περίπτωση

Τη στιγμή που είναι έτοιμο να κοπεί το σχοινί η τάση έχει μέτρο T_θ και το σώμα κινείται σε κύκλο ακτίνας $\frac{R}{2}$ με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_2 , άρα ισχύει : $T_\theta = m \omega_2^2 \frac{R}{2}$. (5)

Εξισώνουμε τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (4), (5) :

$m \omega_1^2 R = m \omega_2^2 \frac{R}{2} \Leftrightarrow \omega_1^2 = \frac{\omega_2^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



28. (16119) Δύο σφαιρίδια Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται σε λείο οριζόντιο τραπέζι (κάτοψη του οποίου φαίνεται στο σχήμα), είναι δεμένα με λεπτά μη εκτατά νήματα μήκους R_1 και R_2 αντίστοιχα, από ακλόνητα σημεία με αποτέλεσμα να **εκτελούν κυκλική κίνηση**. Έστω ότι οι ακτίνες των τροχιών των δύο σφαιριδίων ικανοποιούν τη σχέση $R_1 = 2R_2$ και ότι η περίοδος της κυκλικής κίνησής τους είναι ίδια.

A. Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το σχήμα και να σχεδιάσετε τα διανύσματα της γραμμικής ταχύτητας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης σε κάθε σφαιρίδιο.

Μονάδες 2

Αν α_1 είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σφαιριδίου Σ_1 και α_2 είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σφαιριδίου Σ_2 , η σχέση που τα συνδέει, είναι :

(α) $\alpha_1 = 2\alpha_2$, (β) $\alpha_1 = 4\alpha_2$, (γ) $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2$.

B. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 3

Γ. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

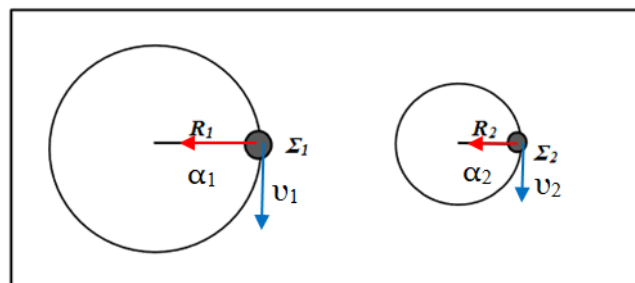
Απάντηση

A)

Δεχόμαστε ότι η κίνηση των σφαιριδίων είναι **ομαλή** κυκλική,

Η γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ κάθε σφαιριδίου είναι εφαπτόμενη στην τροχιά και έχει τη φορά περιστροφής.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_κ$ έχει τη διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου με φορά προς το κέντρο του.



B)

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v και η περίοδος T συνδέονται με τη σχέση : $v = \frac{2\pi R}{T}$. (1)

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\alpha_κ = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{(1)} \alpha_κ = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} \Rightarrow \alpha_κ = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (2) για κάθε σφαιρίδιο.

Σφαιρίδιο Σ_2

$$\alpha_2 = \frac{4\pi^2 R_2}{T^2} \quad (3)$$

Σφαιρίδιο Σ_1

$$\alpha_1 = \frac{4\pi^2 R_1}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2R_2}{T^2} \quad (4)$$

Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (3), (4), προκύπτει : $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η κίνηση είναι **ομαλή** κυκλική.

29. (16120) Δύο σφαιρίδια Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται σε λείο οριζόντιο τραπέζι (κάτοψη του οποίου φαίνεται στο σχήμα), είναι δεμένα με λεπτά μη εκτατά νήματα ίδιου μήκους R από ακλόνητα σημεία με αποτέλεσμα να εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση. Έστω ότι T_1 είναι η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης του σφαιριδίου Σ_1 και T_2 η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης του σφαιριδίου Σ_2 , οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $T_1 = 2T_2$.

A. Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το σχήμα και να σχεδιάσετε τα διανύσματα της γραμμικής ταχύτητας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης σε κάθε σφαιρίδιο.

Μονάδες 2

Αν a_1 είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σφαιριδίου Σ_1 και a_2 είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σφαιριδίου Σ_2 , η σχέση που τα συνδέει, είναι :

(α) $a_2 = 2a_1$, (β) $a_2 = 4a_1$, (γ) $a_2 = \frac{1}{4}a_1$.

B. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 3

Γ. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 7

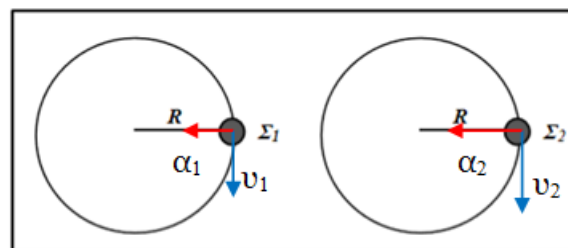
Απάντηση

A)

Τα σφαιρίδια εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση.

Η γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ κάθε σφαιριδίου είναι εφαπτόμενη στην τροχιά και έχει τη φορά περιστροφής.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_κ$ έχει τη διεύθυνση της ακτίνας του κύκλου με φορά προς το κέντρο του.



B)

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v και η περίοδος T συνδέονται με τη σχέση : $v = \frac{2\pi R}{T}$. (1)

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$a_κ = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{(1)} a_κ = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} \Rightarrow a_κ = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (2) για κάθε σφαιρίδιο.

Σφαιρίδιο Σ_2

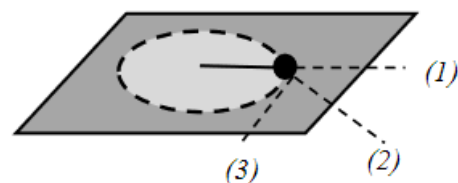
$$a_2 = \frac{4\pi^2 R}{T_2^2} \quad (3)$$

Σφαιρίδιο Σ_1

$$a_1 = \frac{4\pi^2 R}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 R}{(2T_2)^2} = \frac{4\pi^2 R}{4T_2^2} = \frac{\pi^2 R}{T_2^2} \quad (4)$$

Συγκρίνοντας τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (3), (4), προκύπτει : $a_2 = 4a_1$.

30. (16121) Η σφαίρα του σχήματος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε λείο οριζόντιο τραπέζι με τη βοήθεια νήματος και με φορά ίδια με αυτήν των δεικτών του ρολογιού. Κάποια χρονική στιγμή το νήμα κόβεται και η σφαίρα ακολουθεί την τροχιά:



(α) (1) , (β) (2) , (γ) (3) .

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

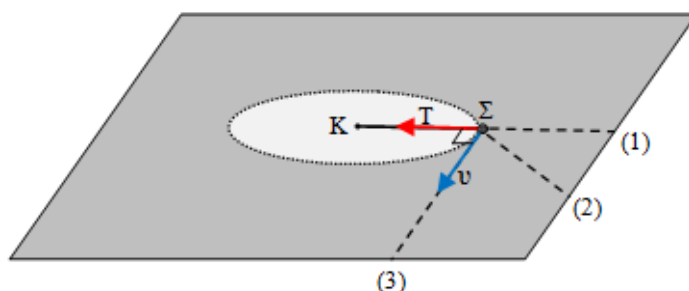
Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Μέχρι να κοπεί το νήμα, η τάση του νήματος είναι η κεντρομόλος δύναμη που αναγκάζει το σφαιρίδιο να κινείται σε κυκλική τροχιά και η γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ είναι εφαπτόμενη στην τροχιά σε κάθε θέση του (κάθετη στην ακτίνα στη θέση αυτή).



Αφού κοπεί το νήμα ($T = 0$) δεν ασκείται δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση και το σφαιρίδιο θα κινηθεί ευθύγραμμα, στη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς, με την ταχύτητα που είχε στο σημείο που κόπηκε το νήμα. Άρα το σφαιρίδιο θα ακολουθήσει την τροχιά (3).

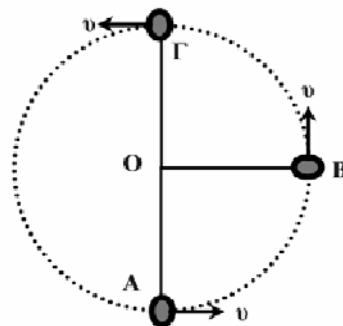
Σχόλιο

Το σχήμα της εκφώνησης δεν έχει σχεδιαστεί με ακρίβεια.

31. (16209) Το σώμα μάζας m της διπλανής εικόνας περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο κέντρου O , με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, στερεωμένο στο άκρο αβαρούς ράβδου μήκους l . Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει τιμή g .

Αν F_A είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από τη ράβδο όταν διέρχεται από το σημείο A και F_Γ είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από τη ράβδο όταν διέρχεται από το σημείο Γ , για τα μέτρα των δυνάμεων θα ισχύει:

(α) $F_A = F_\Gamma$, (β) $F_A > F_\Gamma$, (γ) $F_A < F_\Gamma$.



A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το σώμα δέχεται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}$ και την ελκτική δύναμη $\vec{F}$ από τη ράβδο.

Αφού η κίνηση είναι ομαλή κυκλική (σε κατακόρυφο επίπεδο), η συνισταμένη δύναμη σε κάθε θέση έχει κατεύθυνση προς το κέντρο O του κύκλου (κεντρομόλος δύναμη).

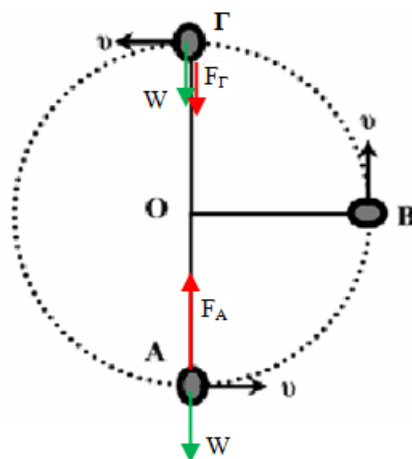
θέση A

$$\Sigma F = m\alpha_\kappa \Leftrightarrow F_A - W = m \frac{v^2}{\ell} \Leftrightarrow F_A = m \frac{v^2}{\ell} + mg. \quad (1)$$

θέση Γ

$$\Sigma F = m\alpha_\kappa \Leftrightarrow F_\Gamma + W = m \frac{v^2}{\ell} \Leftrightarrow F_\Gamma = m \frac{v^2}{\ell} - mg. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι : $F_A > F_\Gamma$.



32. (16263) Ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού δείχνουν 6 ακριβώς. Οι δείκτες θα συμπέσουν για πρώτη φορά μετά από χρόνο t :

(α) $\frac{12}{17} h$, (β) $\frac{8}{15} h$, (γ) $\frac{6}{11} h$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω υπολογίζεται από τις σχέσεις :

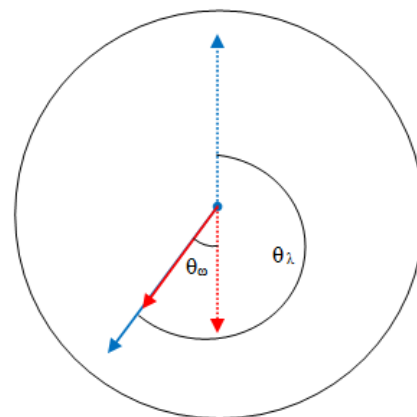
$$\omega = \frac{\theta}{t}, \quad (1) \quad [\theta : \text{η γωνία στροφής σε χρόνο } t]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2) \quad [T : \text{η περίοδος της κίνησης}]$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει :

$$\frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{T} \cdot t. \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (3) για κάθε δείκτη.



Ωροδείκτης

$$\theta_{\omega} = \frac{2\pi}{T_{\omega}} \cdot t, \quad (4) \quad [T_{\omega} = 12 \text{ h}].$$

Λεπτοδείκτης

$$\theta_{\lambda} = \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \cdot t, \quad (5) \quad [T_{\lambda} = 1 \text{ h}].$$

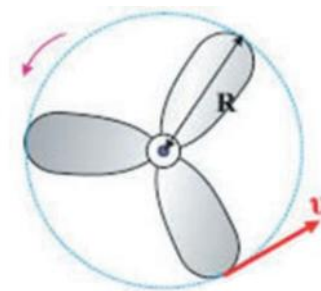
Αρχικά (στις 06:00) οι δείκτες σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\pi \text{ rad}$ (180°).

Μέχρι τη στιγμή που θα συμπέσουν οι δείκτες, ο λεπτοδείκτης θα έχει διαγράψει γωνία $\pi \text{ rad}$ επιπλέον από τον ωροδείκτη, άρα ισχύει :

$$\theta_{\lambda} - \theta_{\omega} = \pi \xrightarrow{(4),(5)} \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \cdot t - \frac{2\pi}{T_{\omega}} \cdot t = \pi \Leftrightarrow 2\pi t \left(\frac{1}{T_{\lambda}} - \frac{1}{T_{\omega}} \right) = \pi \Leftrightarrow 2t \cdot \frac{T_{\omega} - T_{\lambda}}{T_{\lambda} \cdot T_{\omega}} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{T_{\lambda} \cdot T_{\omega}}{2(T_{\omega} - T_{\lambda})}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 \cdot 12}{2(12-1)} \text{ h} \Rightarrow t = \frac{6}{11} \text{ h}.$$

33. (16390) Η έλικα ενός ανεμιστήρα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β σε μία ακτίνα της έλικας. Το σημείο Α έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου u_A και βρίσκεται πλησιέστερα στο κέντρο περιστροφής της έλικας σε σχέση με το σημείο Β. Η γραμμική ταχύτητα του σημείου Β έχει μέτρο u_B . Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι η σωστή;
- (α) $u_A = u_B$, (β) $u_A < u_B$, (γ) $u_A > u_B$.
- Α. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.



Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Τα σημεία Α, Β εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με την ίδια περίοδο περιστροφής Τ.

Ισχύουν οι σχέσεις :

Σημείο Α

$$v_A = \frac{2\pi R_A}{T} \quad (1)$$

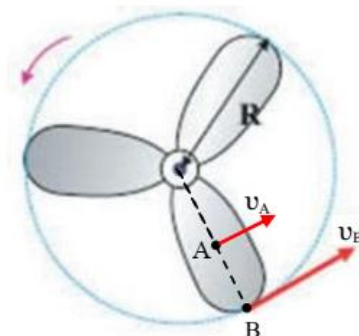
Σημείο Β

$$v_B = \frac{2\pi R_B}{T} \quad (2)$$

Αφού το σημείο Α βρίσκεται πλησιέστερα στον άξονα περιστροφής, άρα ισχύει :

$$R_A < R_B. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι : $v_A < v_B$.



Σχόλιο :

Η έλικα είναι στερεό που περιστρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της.

Η διατύπωση «Η έλικα . . . εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση» είναι **λάθος**.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Η έλικα ενός ανεμιστήρα περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα».

34. (16489, 2.1) Ένα παιδί ανεβαίνει στην «Ρόδα» ενός Λούνα Πάρκ, η οποία βρίσκεται μακριά από οποιοδήποτε άλλο σώμα και **εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση** κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφα).

Την στιγμή που βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του και έχει ταχύτητα v , απλώνει το χέρι του και αφήνει μία μπάλα να πέσει ελεύθερα. Αν αγνοήσουμε την ύπαρξη αέρα και θεωρήσουμε μικρό το ύψος της «Ρόδας», τότε η μπάλα θα πέσει:

- (α) στη βάση B της «Ρόδας».
 - (β) σε ένα σημείο Γ, δεξιά του B.
 - (γ) σε ένα σημείο Δ, αριστερά του B.
- A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

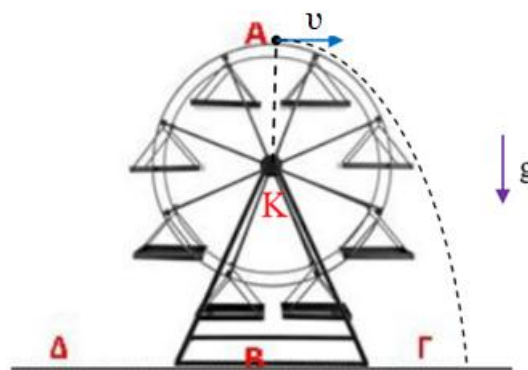
Μονάδες 8

Απάντηση

Μέχρι να φτάσει στο ψηλότερο σημείο A, η μπάλα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα μέτρου v .

Τη στιγμή που το παιδί την αφήνει ελεύθερη, η μπάλα έχει οριζόντια ταχύτητα με φορά προς τα δεξιά και δέχεται την επίδραση μόνο του βάρους της, άρα εκτελεί οριζόντια βολή.

Η μπάλα θα διαγράψει παραβολική τροχιά και (εφόσον δεν συναντήσει στην πορεία της άλλο σώμα) θα πέσει στο έδαφος σε κάποιο σημείο Γ δεξιά από το B.



35. (16489, 2.2) Η χρονική διάρκεια πτώσης της μπάλας στο σημείο που θα καταλήξει είναι:

- (α) ανάλογη της v ,
 - (β) αντιστρόφως ανάλογη της v ,
 - (γ) ανεξάρτητη της v
- A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η μπάλα εκτελεί οριζόντια βολή με (οριζόντια) αρχική ταχύτητα $\vec{v}$ από ύψος h .

Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Αν η χρονική διάρκεια της κίνησης μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι $t_{ολ}$, ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Επομένως, ο χρόνος κίνησης της μπάλας είναι ανεξάρτητος από την αρχική ταχύτητα v .

Σχόλια :

1) Η διατύπωση «Η Ρόδα . . . εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση» είναι **λάθος**.

Η «Ρόδα» είναι στερεό που περιστρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Η Ρόδα ενός Λούνα Πάρκ περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα».

2) Η διατύπωση «Η χρονική διάρκεια πτώσης της μπάλας στο σημείο που θα καταλήξει» δεν είναι σωστή.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Η χρονική διάρκεια πτώσης της μπάλας μέχρι να φτάσει στο έδαφος».

36. (16639) Μικρή σφαίρα μάζας m είναι δεμένη από την άκρη νήματος μήκους d και περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο κέντρου K . Έστω u το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας όταν διέρχεται από το ανώτερο σημείο της τροχιάς της.

Αν το σώμα βρίσκεται στην κατώτερη θέση της τροχιάς του και το νήμα κοπεί, το όριο θραύσης του νήματος δίνεται από την σχέση:

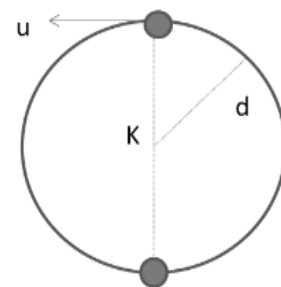
(α) $T_{op} = m \frac{u^2}{d}$, (β) $T_{op} = m(\frac{u^2}{d} - 5g)$, (γ) $T_{op} = m(\frac{u^2}{d} + 5g)$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησης, στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις :

το βάρος $\vec{B}$ και η τάση του νήματος $\vec{T}$.

Η τάση του νήματος δεν παράγει έργο γιατί είναι κάθετη στις στοιχειώδεις μετατοπίσεις της σφαίρας.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση από το ανώτερο σημείο Α μέχρι το κατώτερο σημείο Γ :

$$K_{\Gamma} - K_A = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m u_{\Gamma}^2 - \frac{1}{2} m u^2 = mg(2d) \Leftrightarrow u_{\Gamma}^2 = u^2 + 4gd. \quad (1)$$

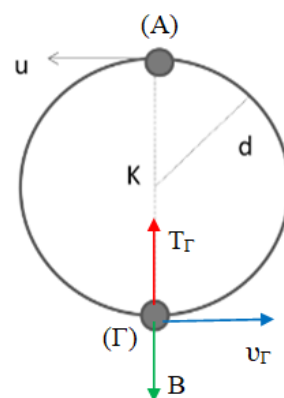
Στη θέση Γ η συνισταμένη δύναμη είναι η κεντρομόλος, άρα ισχύει :

$$\Sigma F_r = m a_{\kappa} \Leftrightarrow T_{\Gamma} - B = m \frac{u_{\Gamma}^2}{d} \Leftrightarrow T_{\Gamma} = mg + m \frac{u_{\Gamma}^2}{d} \xrightarrow{(1)}$$

$$T_{\Gamma} = mg + m \frac{u^2 + 4gd}{d} \Leftrightarrow T_{\Gamma} = mg + m \frac{u^2}{d} + 4mg \Leftrightarrow T_{\Gamma} = m \left(\frac{u^2}{d} + 5g \right).$$

Αφού κόβεται το νήμα στη θέση Γ, άρα : $T_{\Gamma} = T_{op}$.

$$\text{Επομένως : } T_{op} = m \left(\frac{u^2}{d} + 5g \right).$$



Σχόλιο : Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

37. (16710) Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα, γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Το σημείο B βρίσκεται στο μέσον μίας ακτίνας του δίσκου ενώ το σημείο A στην περιφέρεια του δίσκου. Ισχύει:

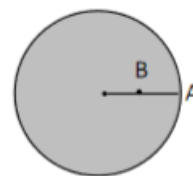
(α) $T_A < T_B$, (β) $v_A = 2v_B$, (γ) $\omega_A = 2\omega_B$.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

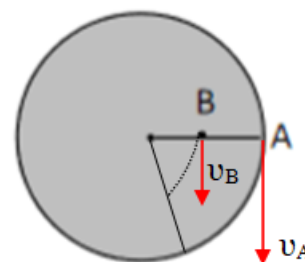
Τα σημεία του δίσκου εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με την ίδια περίοδο (ο χρόνος για μία περιστροφή είναι ίδιος), άρα : $T_A = T_B = T$.

Οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων A, B υπολογίζονται από τις σχέσεις :

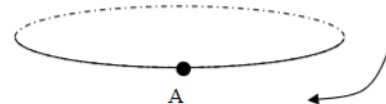
$$v_A = \frac{2\pi R_A}{T} \quad (1)$$

$$v_B = \frac{2\pi R_B}{T} \quad (2)$$

$$\text{Αφού } R_A = 2R_B \xrightarrow{(1),(2)} v_A = 2v_B.$$



38. (16711) Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στην τροχιά που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Η κυκλική τροχιά του σχήματος είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, και το σώμα περιστρέφεται κατά τη φορά που δείχνει το βέλος.



Να μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε το διάνυσμα της γωνιακής και γραμμικής του ταχύτητας, όταν το σώμα βρίσκεται στο σημείο Α.

Μονάδες 4

Η διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα του σχήματος είναι κάθετη ή όχι στη διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητάς του σε κάθε χρονική στιγμή;

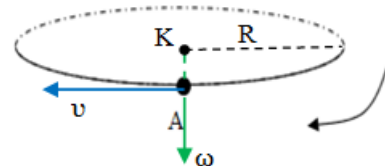
Μονάδες 2

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Απάντηση

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο του κύκλου, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς (κατακόρυφη) και φορά προς τα κάτω (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού).



Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}$ έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς στο Α (κάθετη στην ακτίνα ΚΑ) και φορά προς τα αριστερά (ίδια με τη φορά περιστροφής).

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό ενώ μεταβάλλεται συνεχώς η διεύθυνσή της, επομένως υπάρχει επιτάχυνση. Η επιτάχυνση της ομαλής κυκλικής κίνησης έχει τη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο του κύκλου (κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_κ$).

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ και η συνισταμένη δύναμη έχει τη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο του κύκλου (κεντρομόλος δύναμη) άρα είναι κάθετη στη γραμμική ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή.

39. (16875) Η άκρη Δ του δείκτη των δευτερολέπτων σε ένα ρολόι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Δ παραμένει σταθερό.
- (α) Η επιτάχυνση του Δ δεν είναι μηδέν και έχει σταθερό μέτρο.
- (β) Η επιτάχυνση του Δ δεν είναι μηδέν και δεν έχει σταθερό μέτρο.
- (γ) Η επιτάχυνση του Δ είναι μηδέν.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}$ του σημείου Δ έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς, με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται συνεχώς η διεύθυνσή της, επομένως υπάρχει επιτάχυνση.

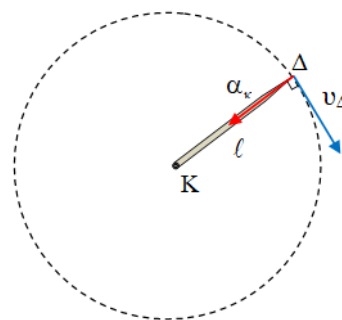
Στην ομαλή κυκλική κίνηση η επιτάχυνση έχει τη διεύθυνση της ακτίνας (δηλαδή του δευτερολεπτοδείκτη) με φορά προς το κέντρο του κύκλου (κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{a}_κ$).

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$a_κ = \frac{v^2}{\ell}, \text{ όπου } \ell \text{ το μήκος του δευτερολεπτοδείκτη.}$$

Αφού η ταχύτητα έχει σταθερό μέτρο, άρα και η επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο.

Επομένως η επιτάχυνση του Δ δεν είναι μηδέν και έχει σταθερό μέτρο.



40. (19651) Δύο κινητά Α και Β εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση. Οι ακτίνες των τροχιών τους είναι R_1 και $R_2 = 2 R_1$ αντίστοιχα, ενώ οι συχνότητες περιστροφής τους συνδέονται με τη σχέση $f_2 = \frac{f_1}{4}$.

Για τα μέτρα v_1 και v_2 των γραμμικών ταχυτήτων των δύο κινητών, ισχύει η σχέση:

(α) $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_1$, (β) $v_1 = 2 v_2$, (γ) $v_2 = 2 v_1$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κινητού και η συχνότητα περιστροφής συνδέονται με τη σχέση : $v = 2\pi Rf$.

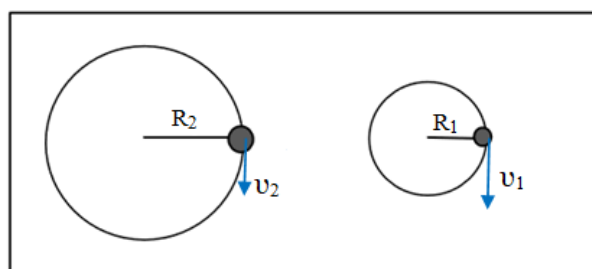
Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για κάθε κινητό.

κινητό Α

$$v_1 = 2\pi R_1 f_1. \quad (1)$$

κινητό Β

$$v_2 = 2\pi R_2 f_2. \quad (2)$$



Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1 f_1}{R_2 f_2} \xrightarrow{R_2 = 2R_1, f_1 = 4f_2} \frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1 4f_2}{2R_1 f_2} \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2.$$

41. (19652) Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, ακτίνας R , έχοντας γραμμική ταχύτητα μέτρου v . Η περίοδος της κίνησης του σώματος είναι ίση με T . Αν το σώμα αυτό, κινηθεί σε κυκλική τροχιά διπλάσιας ακτίνας και η περίοδος περιστροφής παραμείνει η ίδια, τότε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της νέας κίνησης θα:

- (α) διπλασιαστεί.
- (β) υποδιπλασιαστεί.
- (γ) παραμείνει το ίδιο.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Όταν το σώμα κινείται σε κύκλο ακτίνας R , το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας υπολογίζεται από τη

σχέση : $v = \frac{2\pi R}{T}$. (1)

Όταν το σώμα κινείται σε κύκλο ακτίνας $2R$ (χωρίς να μεταβληθεί η περίοδος T), το μέτρο της γραμμικής

ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v' = \frac{2\pi \cdot 2R}{T}$. (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι : $v' = 2v$.

42. (19653) Σώμα μάζας m εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε κυκλική τροχιά ακτίνας R , με γραμμική ταχύτητα μέτρου v . Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας (ΔK) του σώματος, κατά τη χρονική διάρκεια που διανύει ένα ημικύκλιο, ισούται με:

(α) 0.

(β) $\frac{1}{2}mv^2$.

(γ) mv^2 .

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v παραμένει σταθερό, άρα και η κινητική ενέργεια του σώματος είναι σταθερή : $K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{σταθερή}$.

Επομένως η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι : $\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = K - K = 0$.

43. (20105) Όχημα κινείται σε κυκλική πλατεία με ταχύτητα σταθερού μέτρου. Αν διπλασιαστεί το μέτρο της ταχύτητάς του, τότε το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης:

(α) παραμένει σταθερό.

(β) διπλασιάζεται.

(γ) τετραπλασιάζεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση : $F_{\kappa} = m \frac{v^2}{R}$,

όπου v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας και R η ακτίνα της τροχιάς.

Αν διπλασιαστεί το μέτρο της ταχύτητας ($v' = 2v$), τότε το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης θα γίνει :

$$F_{\kappa}' = m \frac{(2v)^2}{R} = m \frac{4v^2}{R} \Rightarrow F_{\kappa}' = 4F_{\kappa}.$$

44. (21403) Θεωρούμε δύο ανθρώπους που βρίσκονται στα σημεία A και B της γήινης επιφάνειας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Λόγω της περιστροφής της Γης εκτελούν μια περιστροφή σε χρονικό διάστημα 24h.

Από τα δεδομένα αυτά, συμπεραίνουμε ότι

(α) ο A έχει μεγαλύτερη κεντρομόλο επιτάχυνση από τον B.

(β) ο B έχει μεγαλύτερη κεντρομόλο επιτάχυνση από τον A.

(γ) και οι δύο έχουν ίδια κεντρομόλο επιτάχυνση.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Όταν ένα σώμα κινείται ομαλά σε κύκλο ακτίνας R, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση : $v = \frac{2\pi R}{T}$. (1) [T = 24 h]

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης α_k υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\alpha_k = \frac{v^2}{R} \xrightarrow{(1)} \alpha_k = \frac{\frac{4\pi^2 R^2}{T^2}}{R} \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

$$\text{άνθρωπος A : } \alpha_{k(A)} = \frac{4\pi^2 R_A}{T^2}.$$

$$\text{άνθρωπος B : } \alpha_{k(B)} = \frac{4\pi^2 R_B}{T^2}.$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι : $R_B > R_A$.

Επομένως : $\alpha_{k(B)} > \alpha_{k(A)}$.



45. (21686) Ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού ξεκινούν μαζί στις 12:00.

Η πρώτη τους συνάντηση θα γίνει:

(α) Σε μία ώρα ακριβώς

(β) Σε λιγότερο από μία ώρα

(γ) Σε περισσότερο από μία ώρα

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας υπολογίζεται από τις σχέσεις :

$$\omega = \frac{\theta}{t}, \quad (1) \quad [\theta : \text{η γωνία στροφής σε χρόνο } t]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (2) \quad [T : \text{η περίοδος της κίνησης}]$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει :

$$\frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{T} \cdot t. \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (3) για κάθε δείκτη.

Ωροδείκτης

$$\theta_{\omega} = \frac{2\pi}{T_{\omega}} \cdot t, \quad (4) \quad [T_{\omega} = 12 \text{ h}].$$

Λεπτοδείκτης

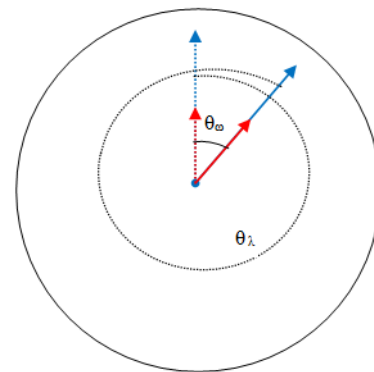
$$\theta_{\lambda} = \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \cdot t, \quad (5) \quad [T_{\lambda} = 1 \text{ h}].$$

Αρχικά (στις 12:00) οι δείκτες συμπίπτουν.

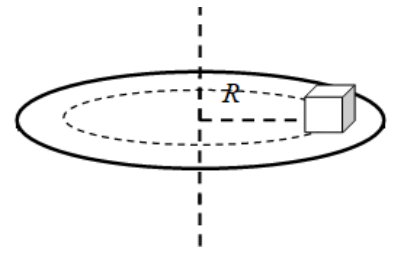
Μέχρι τη στιγμή που θα ξανασυμπίψουν οι δείκτες, ο λεπτοδείκτης θα έχει κάνει μία περιστροφή επιπλέον, επομένως θα έχει διαγράψει γωνία $2\pi \text{ rad}$ επιπλέον από τον ωροδείκτη, άρα ισχύει :

$$\begin{aligned} \theta_{\lambda} - \theta_{\omega} &= 2\pi \xrightarrow{(4),(5)} \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \cdot t - \frac{2\pi}{T_{\omega}} \cdot t = 2\pi \Leftrightarrow 2\pi t \left(\frac{1}{T_{\lambda}} - \frac{1}{T_{\omega}} \right) = 2\pi \Leftrightarrow t \cdot \frac{T_{\omega} - T_{\lambda}}{T_{\lambda} \cdot T_{\omega}} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{T_{\lambda} \cdot T_{\omega}}{T_{\omega} - T_{\lambda}} \\ \Rightarrow t &= \frac{1 \cdot 12}{12 - 1} \text{ h} \Rightarrow t = \frac{12}{11} \text{ h}. \end{aligned}$$

Επομένως $t > 1 \text{ h}$, δηλαδή οι δείκτες θα ξανασυναντηθούν σε περισσότερο από μία ώρα.



46. (21691) Πάνω σε ένα παλιό πικάπ βρίσκεται ένας δίσκος βινυλίου και πάνω στον δίσκο βινυλίου ένα μεγάλο ζάρι. Μπορούμε να μεταβάλλουμε τη συχνότητα περιστροφής του πικάπ. Όταν το ζάρι βρίσκεται σε απόσταση R_1 από το κέντρο του πικάπ και ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο ζάρι έχει μέτρο F_1 . Όταν το ζάρι βρεθεί σε απόσταση R_2 επίσης από το κέντρο του πικάπ και ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_2 η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο ζάρι έχει μέτρο F_2 .



Για τον λόγο των μέτρων των κεντρομόλων δυνάμεων στις δύο περιπτώσεις ισχύει

$$(α) \frac{F_1}{F_2} = \frac{\omega_1^2 \cdot R_1}{\omega_2^2 \cdot R_2} \quad , \quad (β) \frac{F_1}{F_2} = \frac{\omega_1^2 \cdot R_2}{\omega_2^2 \cdot R_1} \quad , \quad (γ) \frac{F_1}{F_2} = \frac{\omega_1 \cdot R_1}{\omega_2 \cdot R_2}$$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το ζάρι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$\left. \begin{array}{l} F_k = m \frac{v^2}{R} \\ v = \omega R \end{array} \right\} \Rightarrow F_k = m \frac{(\omega R)^2}{R} = m \frac{\omega^2 R^2}{R} \Rightarrow F_k = m \omega^2 R. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (1) σε κάθε περίπτωση.

1η περίπτωση

$$F_1 = m \omega_1^2 R_1 \quad (2)$$

2η περίπτωση

$$F_2 = m \omega_2^2 R_2 \quad (3)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m \omega_1^2 R_1}{m \omega_2^2 R_2} \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\omega_1^2 R_1}{\omega_2^2 R_2}.$$

47. (21767) Ένα σώμα εκτοξεύεται οριζόντια μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης και κοντά στην επιφάνεια της έτσι ώστε η επιτάχυνση της βαρύτητας g να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, με αρχική ταχύτητα v_0 . Τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης η δύναμη του βάρους είναι κάθετη στην ταχύτητα.

Για τη μελέτη της κίνησης θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Ο καθηγητής της Φυσικής έθεσε το ερώτημα: «Παιδιά, αφού η δύναμη είναι κάθετη στην ταχύτητα, μήπως το σώμα διαγράφει τόξο κύκλου καθώς πέφτει;»

Οι μαθητές έδωσαν διάφορες απαντήσεις μεταξύ των οποίων οι παρακάτω:

(α) «Μάλλον πρέπει να διαγράφει τεταρτοκύκλιο, και όχι ολόκληρο κύκλο, γιατί κάποια στιγμή φτάνει στο δάπεδο και σταματάει».

(β) «Για να κάνει κυκλική κίνηση η συνολική δύναμη πρέπει να είναι συνέχεια κάθετη στην ταχύτητα και όχι μια στιγμή»

(γ) «Για να κάνει κυκλική κίνηση πρέπει να υπάρχει μια άλλη δύναμη, εκτός από το βάρος, που λέγεται κεντρομόλος δύναμη».

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

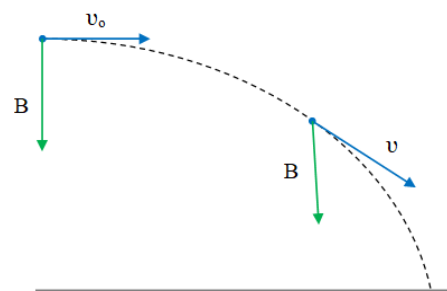
B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Για να εκτελέσει ένα σώμα **ομαλή** κυκλική κίνηση πρέπει η συνισταμένη δύναμη να έχει σταθερό μέτρο και να είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα (κεντρομόλος δύναμη).

Στην οριζόντια βολή η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με το βάρος του σώματος και επομένως έχει κατακόρυφη διεύθυνση. Όμως το βάρος είναι κάθετο στην ταχύτητα μόνο τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης. Στη συνέχεια μεταβάλλεται η διεύθυνση της ταχύτητας με αποτέλεσμα η συνισταμένη να μην είναι κάθετη στην ταχύτητα, άρα το σώμα δεν εκτελεί κυκλική κίνηση αλλά κινείται σε παραβολική τροχιά.



Σχόλιο

Η απάντηση (β) δεν έχει διατυπωθεί σωστά.

Για να εκτελέσει ένα σώμα **ομαλή** κυκλική κίνηση πρέπει η συνισταμένη δύναμη να έχει σταθερό μέτρο και να είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα.

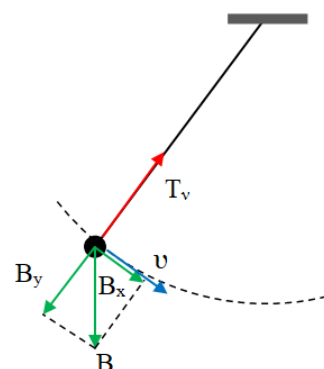
Στην κυκλική (όχι ομαλή) κίνηση η συνισταμένη δύναμη δεν είναι κάθετη στην ταχύτητα και μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες :

- την κεντρομόλο δύναμη $\vec{F}_κ$, η οποία είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα και μεταβάλλει τη διεύθυνση της ταχύτητας,
- την επιτροχια δύναμη $\vec{F}_ε$ η οποία έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας (εφαπτόμενη στην τροχιά) και μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας.

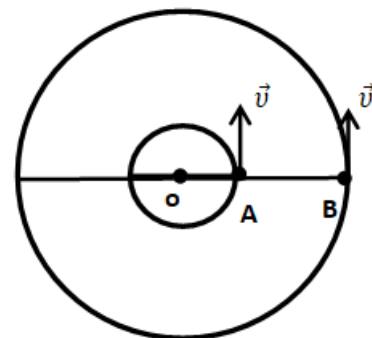
π.χ. στο διπλανό σχήμα το σφαιρίδιο διαγράφει κατακόρυφο κύκλο.

Σε μία τυχαία θέση η συνισταμένη των προβολών των δυνάμεων στη διεύθυνση του νήματος είναι η κεντρομόλος δύναμη ($F_κ = T_v - B_y$), ενώ η συνισταμένη των προβολών των δυνάμεων στη διεύθυνση της ταχύτητας είναι η επιτροχια δύναμη ($F_ε = B_x$).

Προφανώς, η συνισταμένη δύναμη δεν είναι κάθετη στην ταχύτητα.



48. (21768) Τα σωματίδια A και B του διπλανού σχήματος κινούνται ομαλά σε κυκλικές τροχιές με το ίδιο κέντρο O και με ταχύτητες ίσων μέτρων $v_A = v_B = v$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα A και B βρίσκονται σε δυο σημεία της ίδιας ακτίνας του κύκλου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τη χρονική στιγμή t το σωματίδιο A έχει διανύσει τόξο μήκους S_A . Την ίδια χρονική στιγμή το B θα έχει διανύσει τόξο μήκους S_B .



Για τα S_A και S_B θα ισχύει:

(α) $S_A = S_B$, (β) $S_A = 3S_B$, (γ) $S_B = 3S_A$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μήκος του τόξου που διανύει το κινητό σε χρονική διάρκεια t υπολογίζεται από τη σχέση : $s = vt$.

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για κάθε σωματίδιο.

σωματίδιο A

$$s_A = v_A t \quad (1)$$

σωματίδιο B

$$s_B = v_B t \quad (2)$$

$$\text{Αφού } v_A = v_B \xrightarrow{(1),(2)} s_A = s_B .$$

49. (21848) Μία μοτοσυκλέτα M_1 κινείται σε κυκλική πίστα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_1 . Μία δεύτερη μοτοσυκλέτα M_2 κινείται στην ίδια πίστα (με την ίδια ακτίνα) και το μέτρο της γραμμικής της ταχύτητας είναι υποδιπλάσιο σε σχέση με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της μοτοσυκλέτας M_1 . Οι λόγοι του μέτρου των γωνιακών ταχυτήτων και των κεντρομόλων επιταχύνσεων των δύο μοτοσυκλετών είναι:

$$(\alpha) \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2} \text{ και } \frac{\alpha_{\kappa 1}}{\alpha_{\kappa 2}} = \frac{1}{4}, \quad (\beta) \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2 \text{ και } \frac{\alpha_{\kappa 1}}{\alpha_{\kappa 2}} = \frac{1}{4}, \quad (\gamma) \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2 \text{ και } \frac{\alpha_{\kappa 1}}{\alpha_{\kappa 2}} = 4$$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το μέτρο της γραμμικής και της γωνιακής ταχύτητας συνδέονται με τη σχέση : $v = \omega R$. (1)

Για το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ισχύει : $\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R}$. (2)

Εφαρμόζουμε τις σχέσεις (1), (2) για τις δύο μοτοσυκλέτες.

$$\underline{M_1}$$

$$v_1 = \omega_1 R. \quad (3)$$

$$\alpha_{\kappa(1)} = \frac{v_1^2}{R} \quad (4)$$

$$\underline{M_2}$$

$$v_2 = \omega_2 R. \quad (5)$$

$$\alpha_{\kappa(2)} = \frac{v_2^2}{R} \quad (6)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3), (5) προκύπτει :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \xrightarrow{v_1=2v_2} \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2v_2}{v_2} \Leftrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (4), (6) προκύπτει :

$$\frac{\alpha_{\kappa(1)}}{\alpha_{\kappa(2)}} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \xrightarrow{v_1=2v_2} \frac{\alpha_{\kappa(1)}}{\alpha_{\kappa(2)}} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha_{\kappa(1)}}{\alpha_{\kappa(2)}} = 4.$$

Σωστή απάντηση : (γ).

50. (21849) Δύο κινητά Α και Β εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση. Οι ακτίνες των τροχιών τους είναι R_A και $R_B = \frac{R_A}{2}$ αντίστοιχα, ενώ οι συχνότητες περιστροφής τους συνδέονται με τη σχέση $f_A = 4f_B$.

Για τα μέτρα v_A και v_B των γραμμικών ταχυτήτων των δύο κινητών, ισχύει η σχέση:

$$(\alpha) \frac{v_A}{v_B} = 8 \quad , \quad (\beta) \frac{v_A}{v_B} = 2 \quad , \quad (\gamma) \frac{v_A}{v_B} = \frac{1}{8}$$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \xrightarrow{\frac{1}{T} = f} v = 2\pi R f. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (1) για κάθε κινητό.

κινητό Α

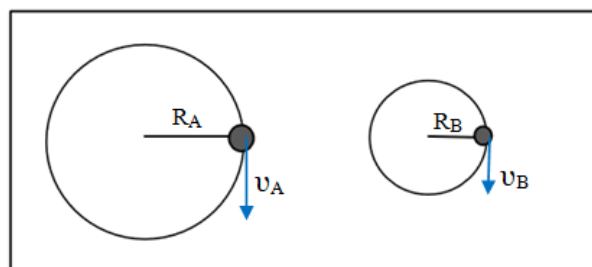
$$v_A = 2\pi f_A R_A \quad (2)$$

κινητό Β

$$v_B = 2\pi f_B R_B \quad (3)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (2), (3) :

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{f_A R_A}{f_B R_B} \xrightarrow{R_A = 2R_B, f_A = 4f_B} \frac{v_A}{v_B} = \frac{4f_B \cdot 2R_B}{f_B R_B} \Leftrightarrow \frac{v_A}{v_B} = 8.$$



51. (21850) Δύο κινητά A και B εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση. Οι ακτίνες των τροχιών τους είναι R_A και $R_B = 2R_A$ αντίστοιχα, ενώ τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων τους συνδέονται με τη σχέση $v_B = \frac{v_A}{2}$.

Για τις περιόδους των δύο κινητών ισχύει η σχέση:

$$(α) \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{4}, \quad (β) \frac{T_A}{T_B} = 4, \quad (γ) \frac{T_A}{T_B} = 2$$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

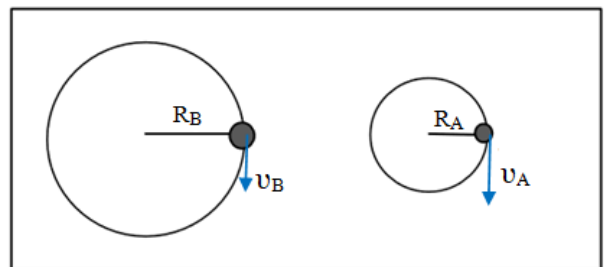
Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v και η περίοδος T συνδέονται με τη σχέση: $v = \frac{2\pi R}{T}$.

κινητό A

$$v_A = \frac{2\pi R_A}{T_A}. \quad (1)$$

κινητό B

$$v_B = \frac{2\pi R_B}{T_B}. \quad (2)$$



$$\text{Ισχύει: } v_A = 2v_B \xrightarrow{(1),(2)} \frac{2\pi R_A}{T_A} = 2 \cdot \frac{2\pi R_B}{T_B} \xrightarrow{R_B = 2R_A} \frac{R_A}{T_A} = 2 \cdot \frac{2R_A}{T_B} \Leftrightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{4}.$$

Κεφάλαιο 2

Θέματα Β

1. (14748, 2.1 – 14785, 2.1)

Το αμαξίδιο του διπλανού σχήματος φέρει μηχανισμό εκτίναξης και έχει μάζα m και μήκος $d=0,15\text{ m}$.

Συσπειρώνουμε το μηχανισμό εκτίναξης και τον απελευθερώνουμε απότομα.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αμέσως μετά την απελευθέρωση το αμαξίδιο θα κινηθεί:

- i. προς τα αριστερά ii. προς τα δεξιά iii. θα παραμείνει ακίνητο

Μονάδες 4

B. Να εξηγήσετε πλήρως την απάντησή σας

Μονάδες 8



Απάντηση

Ο μηχανισμός εκτίναξης αποτελείται από έμβολο που φέρει ελατήριο, το οποίο αρχικά είναι συμπιεσμένο.

Κατά την εκτίναξη του εμβόλου αναπτύσσονται δυνάμεις μεταξύ αμαξιδίου και εμβόλου.

Οι δυνάμεις αυτές είναι εσωτερικές για το σύστημα αμαξίδιο – έμβολο και δεν μπορούν να μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος.

Εφ' όσον δεν ασκείται στο σύστημα εξωτερική δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση, η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} = 0.$$

Άρα το αμαξίδιο θα παραμείνει ακίνητο.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει από τι αποτελείται «ο μηχανισμός εκτίναξης» και με ποιο τρόπο απελευθερώνεται.

2. (14748, 2.2)

Με συσπειρωμένο το μηχανισμό εκτίναξης ακουμπάμε στο δεξί άκρο του αμαξιδίου αυτού το αριστερό άκρο ενός δεύτερου αμαξιδίου με το ίδιο μήκος, χωρίς μηχανισμό εκτίναξης και με μάζα $2m$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα δύο αμαξίδια βρίσκονται πάνω σε εργαστηριακό πάγκο στα άκρα του οποίου υπάρχουν εμπόδια $E1$ και $E2$. Θεωρείστε ότι το επίπεδο συνεπαφής των δύο αμαξιδίων ισαπέχει από τα εμπόδια και οι αντιστάσεις του αέρα είναι αμελητέες.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Με την απελευθέρωση του μηχανισμού εκτίναξης ακούμε:

- i. ένα κρότο ii. δύο κρότους iii. τρεις κρότους.

Μονάδες 4

B. Εξηγείστε πλήρως την προέλευση των κρότων αυτών καθώς και τη σειρά με την οποία ακούγονται.

Μονάδες 9

Απάντηση

Με την απελευθέρωση του μηχανισμού, το έμβολο θα χτυπήσει στο 2ο αμαξίδιο και θα ακουστεί ο 1ος κρότος.

Λόγω των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των αμαξιδίων, αυτά θα κινηθούν αντίρροπα μέχρι να φτάσουν στα εμπόδια. Αφού δεν υπάρχουν τριβές, το σύστημα είναι μονωμένο, άρα η ορμή του διατηρείται σταθερή. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2,$$

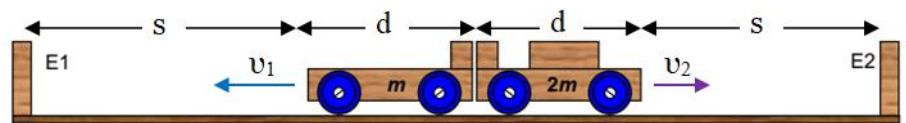
δηλαδή οι ορμές των δύο αμαξιδίων μετά τον αποχωρισμό τους είναι αντίθετες.

$$\text{Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει : } p_1 = p_2 \Leftrightarrow mv_1 = 2mv_2 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2. \quad (1)$$

Αφού η επιφάνεια επαφής μεταξύ των δύο αμαξιδίων ισαπέχει από τα εμπόδια και τα αμαξίδια έχουν ίσα μήκη, άρα τα ελεύθερα άκρα των αμαξιδίων θα διανύσουν την ίδια απόσταση s μέχρι να χτυπήσουν στα εμπόδια.

Από τη σχέση (1) φαίνεται ότι $v_1 > v_2$, άρα το 1ο αμαξίδιο θα χτυπήσει στο εμπόδιο E_1 και θα ακουστεί ο 2ος κρότος, ενώ αργότερα θα χτυπήσει το 2ο αμαξίδιο στο εμπόδιο E_2 οπότε θα ακουστεί ο 3ος κρότος.

Επομένως θα ακουστούν συνολικά τρεις κρότοι.



3. (15891) Σημειακό αντικείμενο μάζας m , κινούμενο με ταχύτητα v , συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με αρχικά ακίνητο σημειακό αντικείμενο μάζας $3m$, το οποίο είναι ελεύθερο να κινηθεί. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι:

(α) 25% , (β) 75% , (γ) 50% .

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του βλήματος και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv = 4mV \Leftrightarrow V = \frac{v}{4}. \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι :

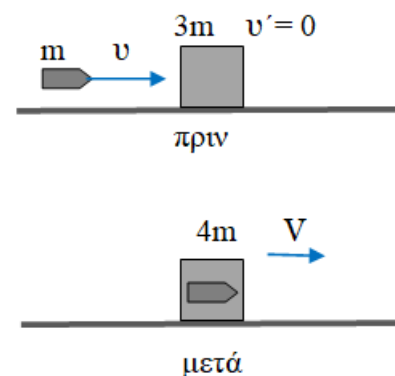
$$K_{μετά} = \frac{1}{2} \cdot 4mV^2 \xrightarrow{(1)} K_{μετά} = 2m \frac{v^2}{16} \Leftrightarrow K_{μετά} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \xrightarrow{(2)} K_{μετά} = \frac{K}{4}. \quad (3)$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης (θερμική ενέργεια) είναι :

$$Q = |\Delta K| = K_{πριν} - K_{μετά} \xrightarrow{(3)} Q = K - \frac{K}{4} \Leftrightarrow Q = \frac{3K}{4} \Leftrightarrow \frac{Q}{K} = \frac{3}{4}. \quad (4)$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{Q}{K} \cdot 100\% \xrightarrow{(4)} \Pi(\%) = \frac{3}{4} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 75\%.$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι το σώμα είναι ακίνητο πάνω σε (λείο) οριζόντιο επίπεδο και η ταχύτητα του βλήματος πριν την κρούση είναι οριζόντια.

4. (15997) Δύο σημειακά αντικείμενα 1 και 2, τα οποία κινούνται στην ευθεία που ορίζουν, συγκρούονται. Αν Δp_1 είναι η μεταβολή της ορμής του σημειακού αντικειμένου 1 και Δp_2 η μεταβολή της ορμής του σημειακού αντικειμένου 2 κατά τη διάρκεια της κρούσης τους, τότε:

(α) $\Delta p_1 = \Delta p_2$, (β) $\Delta p_1 = -\Delta p_2$, (γ) $\Delta p_1 = \Delta p_2 = 0$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Έστω $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ οι ορμές των σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση και $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$ οι ορμές τους αμέσως μετά την κρούση.

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

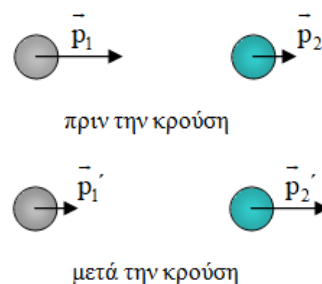
Άρα οι μεταβολές των ορμών των σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες (διανυσματικά).

Αν μετά την κρούση τα σώματα κινούνται στην ίδια ευθεία, τότε μπορούμε να ορίσουμε θετική φορά (π.χ. της $\vec{p}_1$) και να εφαρμόσουμε τη σχέση αλγεβρικά : $\Delta p_1 = -\Delta p_2$.

Για τα μέτρα των μεταβολών των ορμών ισχύει : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$.

Σχόλια

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει αν μετά την κρούση τα σώματα κινούνται στην ίδια ευθεία, ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή των αλγεβρικών σχέσεων.
- 2) Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν Δp είναι η αλγεβρική μεταβολή της ορμής ή το μέτρο της μεταβολής της ορμής.
Αν ισχύει η 1η εκδοχή τότε σωστή απάντηση είναι η (β), ενώ αν ισχύει η 2η εκδοχή τότε σωστή απάντηση είναι η (α).



5. (16037, 2.1) Σώμα μάζας M βρίσκεται ακίνητο πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Βλήμα μάζας $m = \frac{M}{4}$ με κινητική ενέργεια E , κινείται οριζόντια και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας M . Η απώλεια στην κινητική ενέργεια $K_{\text{απ}}$ λόγω της κρούσης είναι:

(α) $K_{\text{απ}} = \frac{4}{5} E$, (β) $K_{\text{απ}} = \frac{2}{5} E$, (γ) $K_{\text{απ}} = \frac{1}{5} E$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του βλήματος και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow mv_1 = (m + 4m)V \Leftrightarrow V = \frac{v_1}{5}. \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

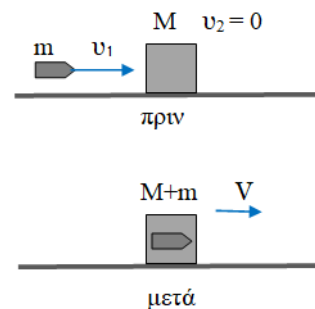
$$K_{\sigma(\piριν)} = \frac{1}{2}mv^2 = E, \quad (2)$$

ενώ μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\muετά)} = \frac{1}{2}5mV^2 \xrightarrow{(1)} K_{\sigma(\muετά)} = \frac{5}{2}m\frac{v_1^2}{25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow{(2)} K_{\sigma(\muετά)} = \frac{E}{5}. \quad (3)$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(\piριν)} - K_{\sigma(\muετά)} = E - \frac{E}{5} \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = \frac{4}{5}E.$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά την ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης και όχι την «απώλεια στην κινητική ενέργεια λόγω της κρούσης».

6. (16037, 2.2)

Αμαξίδιο (Α) μάζας $m_A = 1 \text{ Kg}$, τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο αμαξίδιο μάζας m_B .

Το διάγραμμα της θέσης του αμαξιδίου (Α) με το χρόνο πριν και μετά την κρούση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Η μάζα του αμαξιδίου (Β) ισούται με:

(α) $m_B = 0,5 \text{ Kg}$,

(β) $m_B = 1 \text{ Kg}$,

(γ) $m_B = 2 \text{ Kg}$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από το διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της ταχύτητας του Α πριν την κρούση και του συσσωματώματος μετά την κρούση :

$$v_A = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{(0,6 - 0,2) \text{ m}}{(2 - 0) \text{ s}} = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

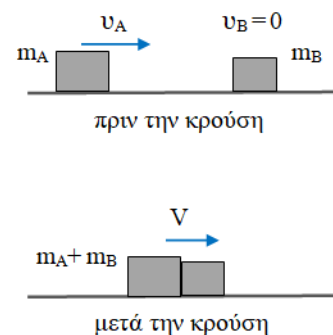
$$V = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{(0,7 - 0,6) \text{ m}}{(3 - 2) \text{ s}} = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του Α και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow (m_A + m_B)V = m_A v_A \Leftrightarrow m_A V + m_B V = m_A v_A \Leftrightarrow m_B = \frac{m_A (v_A - V)}{V} \Rightarrow$$

$$m_B = \frac{1 \text{ Kg} \cdot (0,2 - 0,1) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow m_B = 1 \text{ Kg}.$$



Σχόλιο : Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ η ταχύτητα του Α μεταβάλλεται από $v_A = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ σε $v_A' = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, σε χρονική διάρκεια $\Delta t = 0$, πράγμα αδύνατο.

7. (16045) Ένα βλήμα με μάζα 0,05 kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα 800 m/s μέχρι τη στιγμή που σφηνώνεται σε τοίχο. Πριν ακινητοποιηθεί το βλήμα διανύει απόσταση 8 cm μέσα στον τοίχο.

Αν η αντίσταση του τοίχου θεωρηθεί σταθερή δύναμη, το βλήμα θα ακινητοποιηθεί μετά από χρόνο :

(α) $t = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, (β) $t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, (γ) $t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

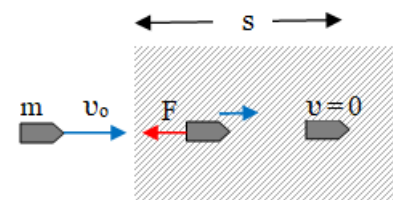
1ος τρόπος (κινηματική προσέγγιση)

Αφού η αντίσταση του τοίχου είναι σταθερή, το βλήμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να ακινητοποιηθεί.

Για την απόσταση που διανύει μέχρι να ακινητοποιηθεί το βλήμα

ισχύει η σχέση :

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \xrightarrow{v=0} s = \frac{v_0}{2} \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{2s}{v_0} \Rightarrow t = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^2} \text{ s} \Rightarrow t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$



2ος τρόπος (δυναμική προσέγγιση)

Έστω F το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο τοίχος στο βλήμα.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για τη διάρκεια της κίνησης του βλήματος μέσα στον τοίχο :

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow -F = \frac{0 - mv_0}{t} \Leftrightarrow F = \frac{mv_0}{t}. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη θέση εισόδου του βλήματος στον τοίχο μέχρι να σταματήσει :

$$W_F = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow -F \cdot s = 0 - \frac{1}{2} mv_0^2 \xrightarrow{(1)} \frac{mv_0}{t} \cdot s = \frac{1}{2} mv_0^2 \Leftrightarrow \frac{s}{t} = \frac{v_0}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2s}{v_0} \Rightarrow$$

$$t = \frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^2} \text{ s} \Rightarrow t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

Σχόλια

1) Η τιμή της μάζας του βλήματος δεν είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό του χρόνου κίνησης.

2) Στην πράξη, η δύναμη αντίστασης δεν είναι σταθερή και η κίνηση δεν είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη. Η σχέση (1) εκφράζει το μέτρο της μέσης δύναμης που άσκησε ο τοίχος στο βλήμα κατά τη διάρκεια της κίνησης.

8. (16046) Ένα φορτηγό με μάζα M και ταχύτητα $\vec{u}$ και ένα επιβατηγό αυτοκίνητο με μάζα $m_1 = \frac{M}{4}$ (και με ταχύτητα τριπλάσια σε μέτρο από του φορτηγού) κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις πάνω σε οριζόντιο μονόδρομο, πλησιάζοντας το ένα το άλλο. Τα οχήματα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά δημιουργώντας συσσωμάτωμα.

Η συνολική ορμή $\vec{p}$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, έχει μέτρο :

- (α) $\frac{M}{4}u$, (β) $3\frac{M}{4}u$, (γ) Mu .

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

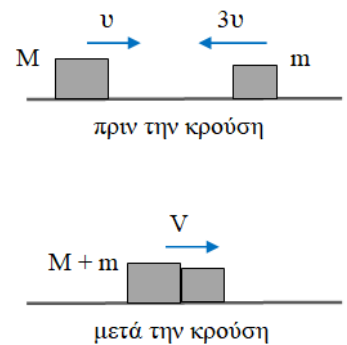
Μονάδες 9

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του φορτηγού και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} = Mu - \frac{M}{4} \cdot 3u \Leftrightarrow p_{ολ} = \frac{Mu}{4}.$$

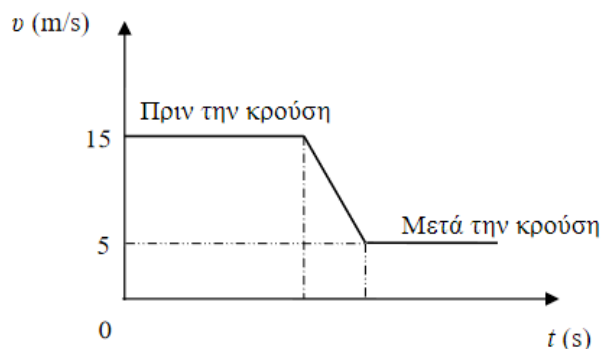


9. (16049) Στο διπλανό διάγραμμα παρουσιάζεται η τιμή της ταχύτητας ενός σώματος μάζας $m = 100 \text{ g}$ που συγκρούεται με δεύτερο σώμα. Η σύγκρουση διαρκεί χρονικό διάστημα 1 s και εξαιτίας της, το σώμα μάζας m επιβραδύνεται. Τα σώματα κινούνται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την σύγκρουση. Θεωρήστε ότι η δύναμη, που δέχθηκε γι' αυτό το χρονικό διάστημα το σώμα μάζας m , είναι σταθερή. Το μέτρο της δύναμης που δέχθηκε το σώμα μάζας m κατά την κρούση είναι:

(α) 1 N , (β) 5 N ,

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(γ) 15 N .

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού οι ταχύτητες του σώματος πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον 2ο νόμο του Newton για το σώμα μάζας m αλγεβρικά :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv' - mv}{\Delta t} = \frac{m(v' - v)}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{0,1 \cdot (5 - 15)}{1} \text{ N} \Rightarrow F = -1 \text{ N}.$$

(Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η δύναμη έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα).

Άρα η δύναμη που δέχθηκε το σώμα έχει μέτρο 1 N .

Σχόλιο :

Στην πράξη, η δύναμη που δέχεται το σώμα κατά τη διάρκεια της κρούσης δεν έχει σταθερό μέτρο, άρα το μέτρο της ταχύτητας δεν μειώνεται γραμμικά με το χρόνο.

Το αποτέλεσμα $F = 1 \text{ N}$ είναι το μέτρο της μέσης δύναμης στη διάρκεια της σύγκρουσης.

10. (16063) Σημειακό αντικείμενο μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με άλλο, ακίνητο σημειακό αντικείμενο, μάζας $3m$. Η κρούση διαρκεί μικρό χρονικό διάστημα Δt . Κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος, το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχεται το σημειακό αντικείμενο μάζας m από το σημειακό αντικείμενο μάζας $3m$ είναι:

(α) $-\frac{3m|u|}{4\Delta t}$, (β) $\frac{4m|u|}{3\Delta t}$, (γ) $\frac{3m|u|}{4\Delta t}$.

όπου $|u|$ το μέτρο της ταχύτητας $\vec{u}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

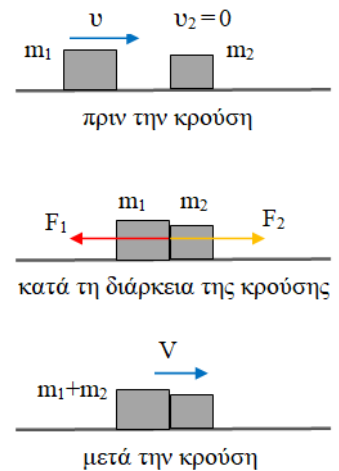
Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του σώματος μάζας m και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$P_{ολ(μετά)} = P_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m+3m)V = mu \Leftrightarrow V = \frac{u}{4}. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton (στη διεύθυνση της κίνησης) για το Σ_1 κατά τη διάρκεια της κρούσης :

$$\bar{F}_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{m(V-u)}{\Delta t} \xrightarrow{(1)} \bar{F}_1 = \frac{m\left(\frac{u}{4}-u\right)}{\Delta t} = \frac{m\left(-\frac{3u}{4}\right)}{\Delta t} \Rightarrow \bar{F}_1 = -\frac{3mu}{4\Delta t}.$$

Επομένως, το μέτρο της μέσης δύναμης είναι : $|\bar{F}_1| = \frac{3m|u|}{4\Delta t}$.



Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι τα σώματα βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

11. (16064) Ένα βλήμα μάζας M κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή που η ταχύτητά του έχει μέτρο v , εκρήγνυται σε δύο κομμάτια Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m_2 = m$.

Το Σ_1 αμέσως μετά την έκρηξη κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 2v$.

Η ταχύτητα του Σ_2 αμέσως μετά την έκρηξη :

(α) έχει μέτρο v και διεύθυνση κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.

(β) έχει μέτρο v και διεύθυνση κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.

(γ) είναι μηδέν.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

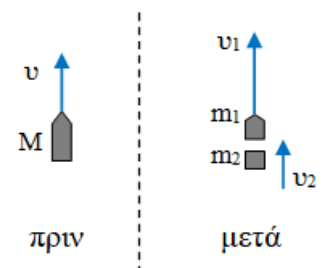
Οι ορμές του βλήματος και του 1ου κομματιού έχουν την ίδια διεύθυνση, άρα και η ορμή του 2ου κομματιού έχει την ίδια διεύθυνση (διαφορετικά δεν θα διατηρείται η ορμή του συστήματος).

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του βλήματος (προς τα πάνω) και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow mv_1 + mv_2 = Mv \Leftrightarrow m \cdot 2v + mv_2 = 2mv \Leftrightarrow$$

$$mv_2 = 2mv - 2mv \Leftrightarrow v_2 = 0.$$

Επομένως, η ταχύτητα του 2ου κομματιού αμέσως μετά τη διάσπαση είναι μηδενική.



12. (16066) Ένα βλήμα μάζας M που είναι ακίνητο εκρήγνυται σε δύο κομμάτια Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$. Ο λόγος των κινητικών ενεργειών K_1/K_2 των δύο κομματιών αμέσως μετά την έκρηξη είναι ίσος με:

- (α) 1 (β) 2 (γ) 1/2

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

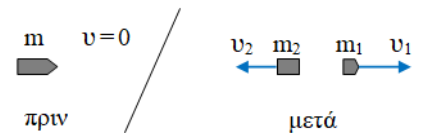
Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2,$$

δηλαδή οι ορμές των δύο κομματιών αμέσως μετά τη διάσπαση είναι αντίθετες.

$$\text{Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει : } p_1 = p_2 \Leftrightarrow mv_1 = 2mv_2 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2. \quad (1)$$

$$\text{Ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι : } \frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2} \cdot 2mv_2^2} = \frac{v_1^2}{2v_2^2} \xrightarrow{(1)} \frac{K_1}{K_2} = \frac{4v_2^2}{2v_2^2} \Leftrightarrow \frac{K_1}{K_2} = 2.$$



13. (16067, 16383) Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2\text{ m}$ και $m_2 = m$, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες ίσου μέτρου $v_1 = v_2 = v$ συγκρούονται πλαστικά. Αν K_1 η κινητική ενέργεια του σώματος μάζας m_1 και K_σ η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος που δημιουργείται, τότε ο λόγος $\frac{K_1}{K_\sigma}$ είναι ίσος με:

- (α) $\frac{1}{3}$, (β) 3, (γ) 6.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

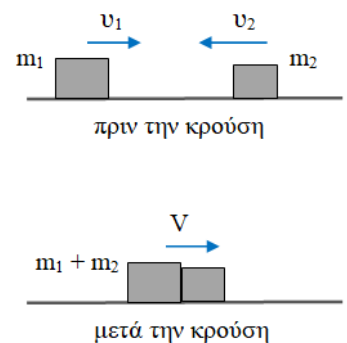
Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Leftrightarrow$$

$$2mv - mv = 3mV \Leftrightarrow mv = 3mV \Leftrightarrow v = 3V.$$

$$\text{Ισχύει : } \frac{K_1}{K_\sigma} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2} = \frac{2m(3V)^2}{3mV^2} = \frac{2 \cdot 9V^2}{3V^2} \Rightarrow \frac{K_1}{K_\sigma} = 6.$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι τα σώματα βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

14. (16069) Σώμα Σ_1 μάζας m_1 που κινείται με ταχύτητα μέτρου v_1 πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, συγκρούεται πλαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2m_1$ το οποίο κινείται πάνω στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο, σε αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου v_2 . Το συσσωμάτωμα που προκύπτει παραμένει ακίνητο μετά την κρούση. Αν K_1 και K_2 οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 πριν την κρούση, ο λόγος τους $\frac{K_1}{K_2}$ θα έχει τιμή

- (α) $\frac{1}{2}$, (β) 2, (γ) 3.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

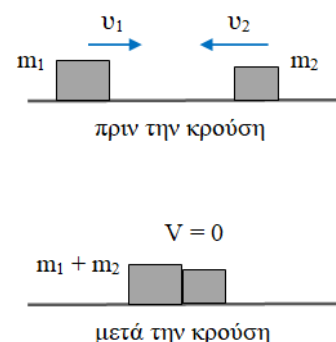
Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού δεν υπάρχουν τριβές, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, επομένως η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του Σ_1 και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Leftrightarrow m v_1 = 2m v_2 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2. \quad (1)$$



Ο λόγος των κινητικών ενεργειών των δύο σωμάτων πριν την κρούση είναι :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{\frac{1}{2} \cdot 2m v_2^2} = \frac{v_1^2}{2v_2^2} \xrightarrow{(1)} \frac{K_1}{K_2} = \frac{4v_2^2}{2v_2^2} \Leftrightarrow \frac{K_1}{K_2} = 2.$$

15. (16070) Ένα φορτηγό με μάζα M που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ και ένα επιβατηγό αυτοκίνητο με μάζα $m_1 = \frac{M}{4}$ και ταχύτητα $\vec{v}_1 = -2\vec{v}$, συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά δημιουργώντας συσσωμάτωμα.

Η συνολική ορμή $\vec{p}_{ολ}$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, έχει μέτρο:

- (α) $2Mv$, $\frac{Mv}{2}$ (β) Mv

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

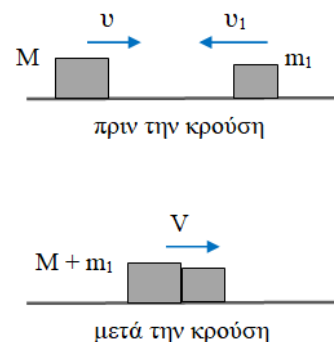
Μονάδες 9

Απάντηση

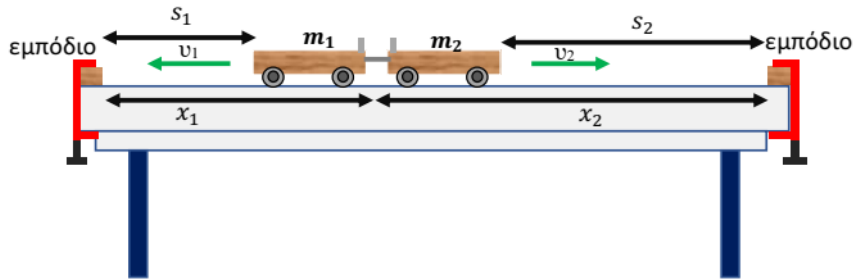
Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του φορτηγού και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} = Mv - \frac{M}{4} \cdot 2v \Rightarrow p_{ολ} = \frac{Mv}{2}.$$



16. (16103) Εργαστηριακά αμαξίδια μαζών m_1 και m_2 είναι αρχικά ακίνητα σε εργαστηριακό πάγκο. Το ένα από τα δύο έχει συμπιεσμένο έμβολο. Τοποθετούνται σε κατάλληλη θέση, ώστε αφού το έμβολο απελευθερωθεί, τα αμαξίδια να κινηθούν, κατά προσέγγιση, ευθύγραμμα και ομαλά, και να ακουστεί ταυτόχρονα κρότος εξαιτίας της σύγκρουσης του κάθε αμαξιδίου με καλά στερεωμένο ξύλινο εμπόδιο που βρίσκεται στη δική του άκρη του πάγκου.



Με βάση τις αποστάσεις που σημειώνονται στο σχήμα, ισχύει:

(α) $m_1 x_1 = m_2 x_2$, (β) $m_1 s_1 = m_2 s_2$, (γ) $m_1 s_2 = m_2 s_1$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της αλληλεπίδρασης των αμαξιδίων είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής : $\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$,
δηλαδή οι ορμές των δύο αμαξιδίων αμέσως μετά τον αποχωρισμό τους είναι αντίθετες.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει : $p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2$. (1)

Αφού τα αμαξίδια ξεκινούν ταυτόχρονα και χτυπούν ταυτόχρονα στα εμπόδια, άρα ο χρόνος κίνησης είναι ίδιος.

Το αριστερό άκρο του 1ου αμαξιδίου θα διανύσει απόσταση s_1 με (περίπου) σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1 μέχρι να φτάσει στο αριστερό εμπόδιο μετά από χρόνο t .

Ισχύει : $v_1 = \frac{s_1}{t}$. (2)

Το δεξιό άκρο του 2ου αμαξιδίου θα διανύσει απόσταση s_2 με (περίπου) σταθερή ταχύτητα μέτρου v_2 μέχρι να φτάσει στο δεξιό εμπόδιο μετά από χρόνο t .

Ισχύει : $v_2 = \frac{s_2}{t}$. (3)

Αντικαθιστούμε τις ταχύτητες από τις σχέσεις (2), (3) στην (1) : $m_1 \frac{s_1}{t} = m_2 \frac{s_2}{t} \Leftrightarrow m_1 s_1 = m_2 s_2$.

17. (16105) Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας ενός σώματος ως συνάρτηση της ορμής του είναι:

- (α) ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- (β) ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- (γ) παραβολή

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

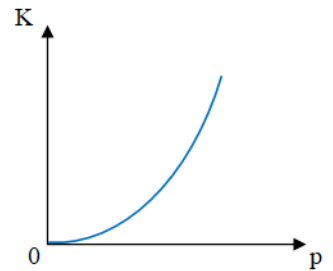
Απάντηση

Το μέτρο της ορμής και της ταχύτητας του σώματος συνδέονται με τη σχέση :

$$p = mv \Leftrightarrow v = \frac{p}{m}. \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{(1)} K = \frac{1}{2}m \frac{p^2}{m^2} \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}. \quad (2)$$



Η σχέση (2) είναι της μορφής $y = ax^2$ και η γραφική της παράσταση είναι παραβολή.

18. (16107) Ένα σώμα είναι αρχικά ακίνητο. Το σώμα εκρήγνυται και χωρίζεται σε δύο κομμάτια (θραύσματα) (1) και (2), με μάζες $m_1 \neq m_2$.

Για τα μέτρα της μεταβολής της ορμής και τις μεταβολές της κινητικής ενέργειας των δύο κομματιών ισχύει:

α. $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$, $\Delta K_1 = \Delta K_2$.

β. $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$, $\Delta K_1 \neq \Delta K_2$.

γ. $|\Delta p_1| \neq |\Delta p_2|$, $\Delta K_1 \neq \Delta K_2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

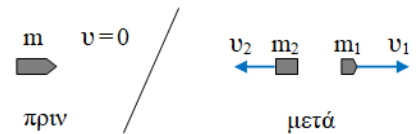
Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2,$$

δηλαδή οι ορμές των δύο κομματιών αμέσως μετά τη διάσπαση είναι αντίθετες.



Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει : $p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$. (1)

Η μεταβολές των ορμών των σωμάτων είναι (αλγεβρικά) :

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_1 &= p_1 - 0 = p_1 \\ \Delta p_2 &= p_2 - 0 = p_2 \end{aligned} \right\} \text{ Αφού } p_1 = -p_2 \Rightarrow \Delta p_1 = -\Delta p_2.$$

Το πηλίκο των μεταβολών των κινητικών ενεργειών είναι :

$$\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - 0} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \xrightarrow{(1)} \frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2^2}{m_1^2} \Leftrightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (2)$$

Αφού $m_1 \neq m_2 \xrightarrow{(2)} \Delta K_1 \neq \Delta K_2$.

Επομένως ισχύουν οι σχέσεις : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$, $\Delta K_1 \neq \Delta K_2$.

19. (16116) Δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ κινούνται αντίθετα πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Τα μέτρα των ταχυτήτων τους v_1, v_2 αντίστοιχα, είναι ίσα ακριβώς πριν συγκρουστούν και ισχύει $v_1 = v_2 = v_0$. Τα δύο σώματα συγκρούονται **κεντρικά** και η κρούση είναι πλαστική, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα.

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής κάθε σώματος εξαιτίας της κρούσης είναι:

(α) $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2| = 0$, (β) $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2| = \frac{4}{3}mv_0$, (γ) $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2| = 2mv_0$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού οι σφαίρες κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_2$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = -m_1v_1 + m_2v_2 \Leftrightarrow$$

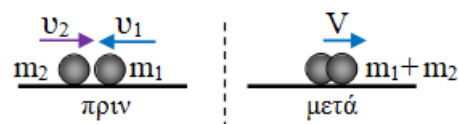
$$3mV = -mv_0 + 2mv_0 \Leftrightarrow V = \frac{v_0}{3}.$$

Υπολογίζουμε τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_1 = m_1V - (-m_1v_1) = m\frac{v_0}{3} + mv_0 \Leftrightarrow \Delta p_1 = \frac{4}{3}mv_0.$$

$$\Delta p_2 = m_2V - m_2v_2 = 2m\frac{v_0}{3} - 2mv_0 \Leftrightarrow \Delta p_2 = -\frac{4}{3}mv_0.$$

$$\text{Επομένως : } |\Delta p_1| = |\Delta p_2| = \frac{4}{3}mv_0.$$



Σχόλιο :

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι «οι σφαίρες κινούνται στην ίδια ευθεία».

Η έννοια της κεντρικής κρούσης διδάσκεται στη Γ' Λυκείου.

20. (16119) «Ένας αθλητής καλαθοσφαίρισης (basketball) πατάει γερά και σηκώνεται αφήνοντας τη μπάλα στο καλάθι». Να αιτιολογήσετε αν παραβιάζεται ή όχι, η αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα αθλητής – Γη κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Μονάδες 12

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια του φαινομένου, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης $\vec{F}_A$, $\vec{F}_Γ$ μεταξύ αθλητή και Γης είναι εσωτερικές για το σύστημα αθλητής – Γη.

Αν δεχθούμε ότι οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται στη Γη από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα είναι ασήμαντες (το οποίο δεν αναφέρει η εκφώνηση), τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα Γη – αθλητής είναι μονωμένο και επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Επισημάνση

Δεχόμαστε ότι η Γη και ο αθλητής ήταν ακίνητοι (ως προς τον Ήλιο) πριν από το άλμα.

Έστω m , M οι μάζες του αθλητή και της Γης αντίστοιχα και $\vec{u}$, $\vec{V}$ οι ταχύτητές τους (ως προς τον Ήλιο) τη στιγμή που ο αθλητής αποσπάται από το έδαφος.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_A + \vec{p}_Γ = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_Γ = -\vec{p}_A,$$

δηλαδή μετά το άλμα η Γη αποκτά αντίθετη ορμή από τον αθλητή.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_Γ = p_A \Leftrightarrow MV = mv \Leftrightarrow V = \frac{m}{M} \cdot v. \quad (1)$$

$$\text{Ισχύει : } m \ll M \Leftrightarrow \frac{m}{M} \ll 1 \text{ ή } \frac{m}{M} \cong 0. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα της Γης εξαιτίας του άλματος είναι $V \cong 0$, δηλαδή **πρακτικά η Γη δεν θα κινηθεί**.



Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι **οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα δεν λαμβάνονται υπ' όψη**, ώστε να δεχθούμε ότι το σύστημα είναι μονωμένο.

Τα δεδομένα δεν επαρκούν για να απαντηθεί η ερώτηση.

2) Η ερώτηση έπρεπε να έχει της εξής διατύπωση : «Θεωρώντας ότι οι δυνάμεις από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα είναι αμελητέες, να εξετάσετε αν η Γη θα κινηθεί εξαιτίας του άλματος του αθλητή. Να θεωρήσετε ότι ο αθλητής και η Γη ήταν ακίνητοι ως προς τον Ήλιο και να δεχθείτε ότι η μάζα του αθλητή m είναι ασήμαντη σε σύγκριση με τη μάζα M της Γης».

Συμπέρασμα

Η ερώτηση είναι ασαφής, με ελλιπή δεδομένα και επομένως ακατάλληλη για τις εξετάσεις.

21. (16120) Ένα μπαλάκι μάζας m προσκρούει κάθετα σε οριζόντιο πάτωμα με ταχύτητα μέτρου v_1 και αναπηδά κατακόρυφα με ταχύτητα μέτρου v_2 (Ισχύει $v_2 < v_1$). Η χρονική διάρκεια της πρόσκρουσης είναι Δt . Το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης από το πάτωμα στο μπαλάκι είναι:

(α) $N = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} + mg$, (β) $N = \frac{m(v_1 - v_2)}{\Delta t} + mg$, (γ) $N = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t} - mg$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

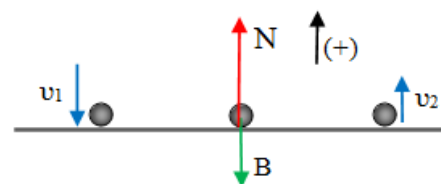
Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης μεταβάλλεται η ορμή του σώματος.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω και υπολογίζουμε τη μεταβολή της ορμής (αλγεβρικά) :

$$\Delta p = mv_2 - (-mv_1) = m(v_2 + v_1). \quad (1)$$



Κατά τη διάρκεια Δt της επαφής με το δάπεδο, στο μπαλάκι ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton (αλγεβρικά) :

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow N - B = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow N = B + \frac{\Delta p}{\Delta t} \xrightarrow{(1)} N = mg + \frac{m(v_2 + v_1)}{\Delta t}.$$

22. (16122) Σε οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ακίνητο σώμα μάζας M . Βλήμα μάζας $m = \frac{M}{100}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου v_1 , χτυπά το σώμα με αποτέλεσμα να το διαπεράσει. Το βλήμα εξέρχεται από το σώμα οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\frac{v_1}{10}$. Αν τα μέτρα της μεταβολής της ορμής του βλήματος και του σώματος είναι Δp_1 και Δp_2 αντίστοιχα τότε:

(α) $\Delta p_1 = \frac{9}{1000} \Delta p_2$,

(β) $\Delta p_1 = \Delta p_2$,

(γ) $\Delta p_1 = \frac{1000}{9} \Delta p_2$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

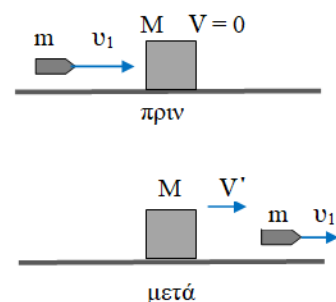
Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

Επομένως, οι μεταβολές των ορμών των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες.

Άρα τα μέτρα των μεταβολών των ορμών είναι ίσα : $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$.

* Αν το βλήμα κινείται στην ίδια ευθεία μετά την κρούση, τότε η σχέση ισχύει και για τα μέτρα των αλγεβρικών μεταβολών των ορμών : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$.



2ος τρόπος

Έστω Δt η χρονική διάρκεια της κρούσης.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης το βλήμα δέχεται (μέση) δύναμη $\vec{F}_1$ από το σώμα και ασκεί σε αυτό (μέση) δύναμη $\vec{F}_2$.

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ισχύει για κάθε σώμα :

$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}, \quad (1)$$

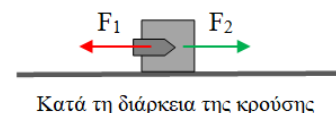
$$\vec{F}_2 = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}. \quad (2)$$

$$\text{Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton : } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

Επομένως, οι μεταβολές των ορμών των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες.

Άρα τα μέτρα των μεταβολών των ορμών είναι ίσα : $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$.

* Αν το βλήμα κινείται στην ίδια ευθεία μετά την κρούση, τότε η σχέση ισχύει και για τα μέτρα των αλγεβρικών μεταβολών των ορμών : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει αν μετά την κρούση το βλήμα κινείται στην ίδια ευθεία.

23. (16209) Ένα βλήμα μάζας $3m$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου v όταν ξαφνικά εκρήγνυται και διασπάται σε δύο κομμάτια. Το ένα κομμάτι με μάζα m κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το βλήμα με ταχύτητα μέτρου $4v$. Η ταχύτητα με την οποία κινείται το δεύτερο κομμάτι μάζας $2m$ είναι:

(α) $-\frac{v}{2}$, (β) $\frac{v}{2}$, (γ) v .

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

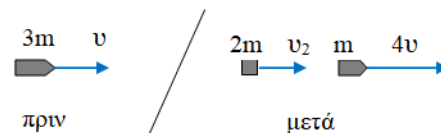
Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι ασήμαντη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.



Οι ορμές του βλήματος και του 1ου κομματιού έχουν την ίδια διεύθυνση, άρα και η ορμή του 2ου κομματιού έχει την ίδια διεύθυνση (διαφορετικά δεν θα διατηρούνταν η ορμή του συστήματος).

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του βλήματος και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow m(4v) + 2mv_2 = 3mv \Leftrightarrow 2mv_2 = -mv \Leftrightarrow v_2 = -\frac{v}{2}.$$

Επομένως, η ταχύτητα του 2ου κομματιού έχει **μέτρο** $\frac{v}{2}$ και φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης του βλήματος.

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν ορίζει θετική φορά κίνησης και δεν διευκρινίζει αν ζητά το μέτρο ή την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας.

Στην 1η περίπτωση η σωστή απάντηση είναι η β, ενώ στη 2η περίπτωση η σωστή απάντηση είναι η α.

24. (16227) Δύο σώματα (1) και (2), έχουν μάζες αντίστοιχα m_1 και m_2 , για τις οποίες ισχύει η σχέση $m_2 = 4 m_1$. Τα δύο σώματα κινούνται με ταχύτητες v_1, v_2 αντίστοιχα, και οι κινητικές τους ενέργειες είναι ίσες ($K_1 = K_2$). Για τα μέτρα των ορμών των δύο σωμάτων, ισχύει ότι:

(α) είναι ίσα.

(β) το μέτρο του ορμής του σώματος (1) είναι διπλάσιο από το μέτρο της ορμής του σώματος (2).

(γ) το μέτρο του ορμής του σώματος (2) είναι διπλάσιο από το μέτρο της ορμής του σώματος (1).

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ισχύει :

$$K_1 = K_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \xrightarrow{m_2 = 4m_1} m_1 v_1^2 = 4m_1 v_2^2 \Leftrightarrow v_1^2 = 4v_2^2 \Rightarrow v_1 = 2v_2. \quad (1)$$

Τα μέτρα των ορμών των σωμάτων είναι :

$$p_1 = m_1 v_1 \xrightarrow{(1)} p_1 = 2m_1 v_2. \quad (2)$$

$$p_2 = m_2 v_2 \xrightarrow{m_2 = 4m_1} p_2 = 4m_1 v_2. \quad (3)$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (2), (3) προκύπτει : $p_2 = 2p_1$.

25. (16245) Σε οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ακίνητο σώμα μάζας M . Βλήμα μάζας $m = \frac{M}{1000}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_1 , χτυπά το σώμα με αποτέλεσμα να το διαπεράσει. Το βλήμα εξέρχεται από το σώμα οριζόντια με ταχύτητα $\frac{v_1}{9}$.

Αν τα μέτρα της μεταβολής της ορμής του βλήματος και του σώματος είναι $|\Delta p_1|$ και $|\Delta p_2|$ αντίστοιχα τότε:

(α) $|\Delta p_1| = \frac{9}{1000} |\Delta p_2|$, (β) $|\Delta p_1| = \frac{1000}{9} |\Delta p_2|$, (γ) $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

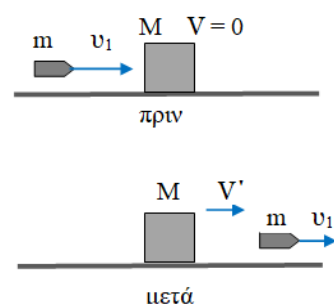
Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

Επομένως, οι μεταβολές των ορμών των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες.

Άρα τα μέτρα των μεταβολών των ορμών είναι ίσα : $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$.

* Αν το βλήμα κινείται στην ίδια ευθεία μετά την κρούση, τότε η σχέση ισχύει και για τα μέτρα των αλγεβρικών μεταβολών των ορμών : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$.



2ος τρόπος

Έστω Δt η χρονική διάρκεια της κρούσης.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης το βλήμα δέχεται (μέση) δύναμη $\vec{F}_1$ από το σώμα και ασκεί σε αυτό (μέση) δύναμη $\vec{F}_2$.

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ισχύει για κάθε σώμα :

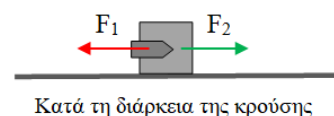
$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}, \quad (1) \quad \vec{F}_2 = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}. \quad (2)$$

$$\text{Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton : } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

Επομένως, οι μεταβολές των ορμών των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες.

Άρα τα μέτρα των μεταβολών των ορμών είναι ίσα : $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$.

* Αν το βλήμα κινείται στην ίδια ευθεία μετά την κρούση, τότε η σχέση ισχύει και για τα μέτρα των αλγεβρικών μεταβολών των ορμών : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$.



Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει αν μετά την κρούση το βλήμα κινείται στην ίδια ευθεία.

26. (16263) Σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα μέτρου v_0 σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα μάζας M . Αν κατά την πλαστική κρούση χάνεται το 75% της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος, τότε ο λόγος $\frac{m}{M}$ των μαζών ισούται με:

(α) $\frac{1}{3}$, (β) $\frac{1}{4}$, (γ) $\frac{1}{2}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού τα σώματα κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

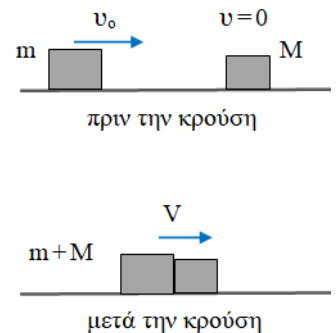
Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_0$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m+M)V = mv_0 \Leftrightarrow V = \frac{mv_0}{M+m}. \quad (1)$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται κατά 75%, άρα παραμένει στο σύστημα το 25% της αρχικής κινητικής ενέργειας. Ισχύει :

$$K_{ολ(μετά)} = 25\% \cdot K_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}mv_0^2 \right) \xrightarrow{(1)} (M+m) \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^2} = \frac{1}{4}mv_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{m}{M+m} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow M+m = 4m \Leftrightarrow M = 3m \Leftrightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{3}.$$



Σχόλιο

Η διατύπωση «κατά την πλαστική κρούση χάνεται το 75% της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος» είναι λανθασμένη.

Η ενέργεια δεν χάνεται αλλά μετασχηματίζεται.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης, ένα ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε άλλες μορφές ενέργειας (π.χ. θερμική).

27. (16264) Βλήμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου v_0 και σφηνώνεται στο κέντρο μάζας ακίνητου ξύλινου σώματος μάζας M . Κατά την κρούση αυτή η μεταβολή της ορμής του βλήματος είναι:

(α) $-\frac{mM}{m+M} \cdot v_0$, (β) $-\frac{2mM}{m+M} \cdot v_0$, (γ) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{mM}{m+M} \cdot v_0$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

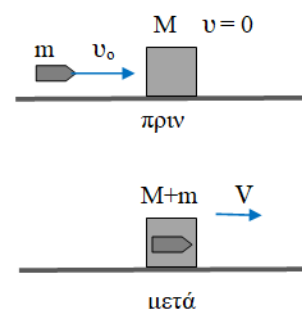
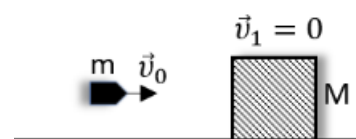
Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_0$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m+M)V = mv_0 \Leftrightarrow V = \frac{mv_0}{m+M}. \quad (1)$$

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος (αλγεβρικά) είναι :

$$\Delta p_1 = mV - mv_0 \xrightarrow{(1)} \Delta p_1 = m \left(\frac{mv_0}{m+M} - v_0 \right) = mv_0 \frac{m-m-M}{m+M} \Leftrightarrow \Delta p_1 = -\frac{mM}{m+M} v_0.$$



28. (16708) Ένα σώμα μάζας m κινείται στον οριζόντιο άξονα με ταχύτητα μέτρου v προς τα δεξιά. Ένα άλλο σώμα μάζας $4m$ που κινείται στον ίδιο άξονα με ταχύτητα μέτρου $v/2$ προς τα αριστερά, συγκρούεται πλαστικά με το πρώτο.

Αμέσως μετά τη σύγκρουση το συσσωμάτωμα κινείται:

(α) με ταχύτητα μέτρου $v/10$ προς τα δεξιά.

(β) με ταχύτητα μέτρου $v/5$ προς τα αριστερά.

(γ) με ταχύτητα μέτρου $v/4$ προς τα αριστερά.

Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

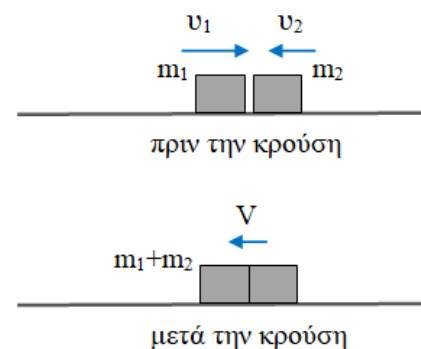
Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow$$

$$5mV = mv - 4m \frac{v}{2} \Leftrightarrow 5mV = -mv \Leftrightarrow V = -\frac{v}{5}.$$



Επομένως, το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα μέτρου $\frac{v}{5}$ προς τα αριστερά.

29. (16709) Δύο παγοδρόμοι, με μάζες m_1 και m_2 ($m_1 > m_2$) βρίσκονται ακίνητοι σε μια οριζόντια πίστα πάγου, ο ένας απέναντι από τον άλλο, και κάποια στιγμή σπρώχνει ο ένας τον άλλο.

Για τα μέτρα των ορμών (p_1 και p_2) και των ταχυτήτων (v_1 και v_2) που θα αποκτήσουν οι παγοδρόμοι θα ισχύει:

(α) $p_1 > p_2$ και $v_1 = v_2$, (β) $p_1 = p_2$ και $v_1 > v_2$, (γ) $p_1 = p_2$ και $v_1 < v_2$.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αν θεωρήσουμε ασημαντή την τριβή, τότε το σύστημα των δύο παγοδρόμων είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

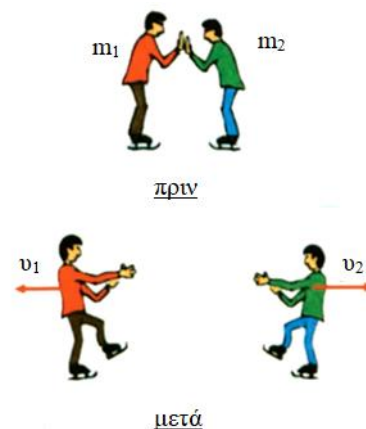
Επομένως οι ορμές των δύο παγοδρόμων αμέσως μετά την αλληλεπίδραση είναι αντίθετες, δηλαδή έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (1)$$

$$\text{Αφού } m_2 < m_1 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} < 1 \xrightarrow{(1)} \frac{v_1}{v_2} < 1 \Rightarrow v_1 < v_2.$$

Επομένως, ισχύουν οι σχέσεις : $p_1 = p_2$ και $v_1 < v_2$.



30. (16733) Δύο μάζες m_1 και $m_2 = 3m_1$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες αντίθετης κατεύθυνσης και μέτρου u_1 και $u_2 = 4u_1$ αντίστοιχα. Οι μάζες συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά. Η ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα, το οποίο δημιουργείται στην κρούση, έχει μέτρο

- (α) $\frac{3u_1}{4}$, (β) $\frac{4u_1}{5}$, (γ) $\frac{11u_1}{4}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

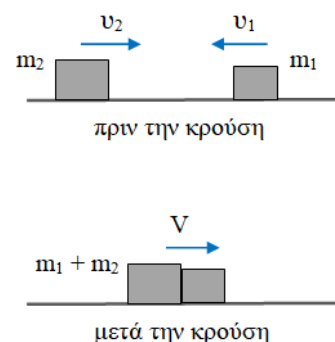
Απάντηση

Αφού τα σώματα κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_2$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = -m_1v_1 + m_2v_2 \xrightarrow{m_2=3m_1, v_2=4v_1}$$

$$4m_1V = -m_1v_1 + 3m_1 \cdot 4v_1 \Leftrightarrow 4m_1V = 11m_1v_1 \Leftrightarrow V = \frac{11}{4}v_1.$$



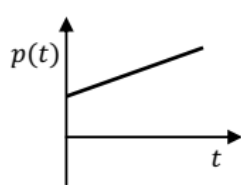
Επομένως, το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα μέτρου $\frac{11}{4}v_1$ προς τη φορά της $\vec{v}_2$.

Σχόλιο : Η διατύπωση «Δύο μάζες . . . κινούνται . . . Οι μάζες συγκρούονται . . . » είναι λανθασμένη.

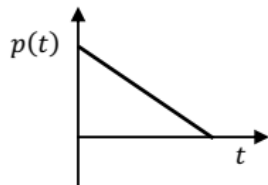
Η μάζα δεν είναι σώμα αλλά φυσικό μέγεθος.

Η σωστή διατύπωση είναι «Δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 . . . κινούνται. Τα σώματα συγκρούονται . . . ».

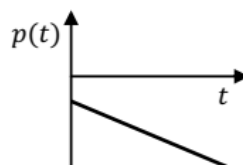
31. (16875) Ένα αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα v_0 όταν ξαφνικά φρενάρει με αποτέλεσμα να σταματήσει μετά από χρόνο t από τη χρονική στιγμή που ο οδηγός του πάτησε το φρένο. Θεωρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο αυτοκίνητο κατά τη διάρκεια του φρεναρίσματος είναι σταθερή. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα αναπαριστά την ορμή του αυτοκινήτου σε συνάρτηση με το χρόνο;



(α)



(β)



(γ)

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια του φρεναρίσματος η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ έχει την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά από την ταχύτητα και την ορμή του αυτοκινήτου.

Έστω $\vec{p}_0$ η αρχική ορμή του αυτοκινήτου (τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$) και $\vec{p}$ η ορμή του σε μία τυχαία χρονική στιγμή t .

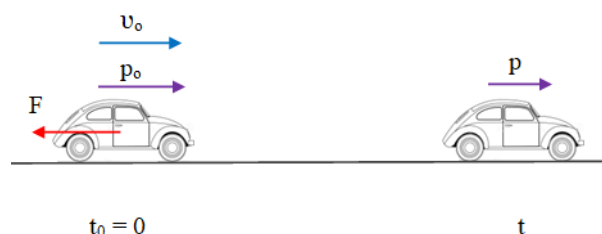
Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ισχύει : $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{F} = \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t}$.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας και εφαρμόζουμε τη σχέση αλγεβρικά :

$$-F = \frac{p - p_0}{t} \Leftrightarrow -F \cdot t = p - p_0 \Leftrightarrow p = p_0 - F \cdot t. \quad (1)$$

Αφού η δύναμη είναι σταθερή, η γραφική παράσταση της σχέσης (1) είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Άρα το σωστό διάγραμμα είναι το (β)



32. (18913) Σώμα Σ_1 , μάζας m_1 , κινείται πάνω σε οριζόντιο, ακλόνητο, λείο δάπεδο και συγκρούεται μετωπικά με άλλο ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Η κρούση είναι πλαστική, ασήμαντης χρονικής διάρκειας και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται έχει κινητική ενέργεια ίση με το 20% της κινητικής ενέργειας που είχε το σώμα Σ_1 ακριβώς πριν την κρούση. Για τις μάζες των δύο σωμάτων ισχύει η σχέση:

(α) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$, (β) $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{4}$, (γ) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού τα σώματα κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

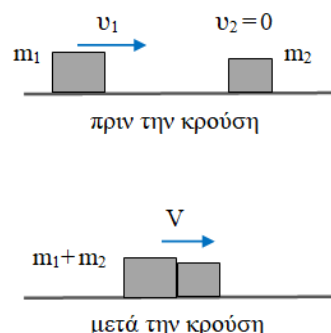
Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = m_1 v_1 \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Για τις κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση ισχύει :

$$K_{ολ(μετά)} = 20\% \cdot K_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 \right) \xrightarrow{(1)} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{5} m_1 v_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5m_1 = m_1 + m_2 \Leftrightarrow 4m_1 = m_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}.$$



33. (19230) Δύο παγοδρόμοι, με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα (με $m_1 \neq m_2$), στέκονται ακίνητοι ο ένας απέναντι στον άλλο, πάνω σε ένα οριζόντιο παγοδρόμιο. Κάποια στιγμή ο πρώτος σπρώχνει το δεύτερο με αποτέλεσμα να κινηθούν απομακρυνόμενοι με ταχύτητες σταθερού μέτρου. Κάποια επόμενη χρονική στιγμή οι αποστάσεις που έχουν διανύσει είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα. Αν αγνοήσουμε όλων των ειδών τις τριβές τότε ισχύει:

(α) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_1}{m_2}$, (β) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$, (γ) $\frac{x_1}{x_2} = 1$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού η τριβή είναι ασήμαντη, το σύστημα των δύο παγοδρόμων είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Επομένως οι ορμές των δύο παγοδρόμων αμέσως μετά την αλληλεπίδραση είναι αντίθετες, δηλαδή έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2. \quad (1)$$

Έστω x_1, x_2 οι αποστάσεις που διανύουν οι παγοδρόμοι σε χρόνο t .

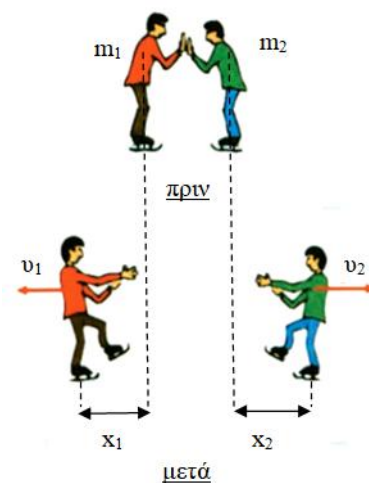
Η κίνηση κάθε παγοδρόμου είναι (κατά προσέγγιση) ευθύγραμμη ομαλή, επομένως ισχύουν οι σχέσεις :

$$v_1 = \frac{x_1}{t}, \quad (2)$$

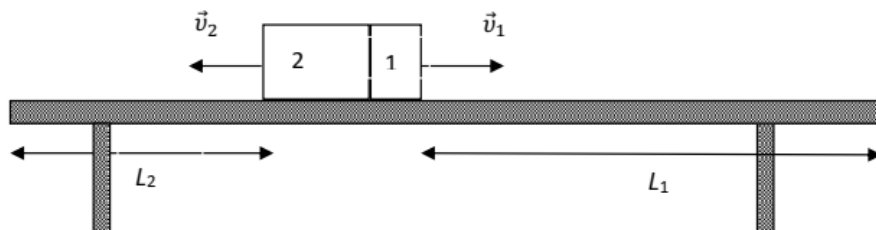
$$v_2 = \frac{x_2}{t}. \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις ταχύτητες από τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1) :

$$m_1 \frac{x_1}{t} = m_2 \frac{x_2}{t} \Leftrightarrow m_1 x_1 = m_2 x_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$



34. (19232)



Σώμα βρίσκεται αρχικά ακίνητο και απέχει αποστάσεις L_1 και L_2 από τις άκρες ενός λείου, οριζόντιου τραπεζιού. Κάποια στιγμή το σώμα εκρήγνυται σε δύο κομμάτια με μάζες $m_2 = 4 \cdot m_1$.

Αν τα δύο κομμάτια φτάνουν ταυτόχρονα στις άκρες του τραπεζιού, τότε ισχύει:

(α) $L_1 = \frac{L_2}{4}$, (β) $L_1 = 4 \cdot L_2$, (γ) $L_1 = 2 \cdot L_2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η επιφάνεια του τραπεζιού είναι λεία, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική άρα η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της έκρηξης.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής : $\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, δηλαδή οι ορμές των δύο κομματιών αμέσως μετά τη διάσπαση είναι αντίθετες.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \xrightarrow{m_2 = 4m_1} m_1 v_1 = 4m_1 v_2 \Rightarrow v_1 = 4v_2. \quad (1)$$

Τα δύο κομμάτια φτάνουν ταυτόχρονα στις άκρες του τραπεζιού, άρα ο χρόνος κίνησης είναι ίδιος.

Το αριστερό άκρο του 1ου κομματιού διανύει απόσταση L_1 με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1 σε χρόνο t .

Ισχύει : $v_1 = \frac{L_1}{t}. \quad (2)$

Το δεξιό άκρο του 2ου κομματιού διανύει απόσταση L_2 με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_2 σε χρόνο t .

Ισχύει : $v_2 = \frac{L_2}{t}. \quad (3)$

Αντικαθιστούμε τις ταχύτητες από τις σχέσεις (2), (3) στην (1) : $\frac{L_1}{t} = 4 \frac{L_2}{t} \Leftrightarrow L_1 = 4L_2$.

35. (19652) Σφαίρα A, μάζας $m_1 = m$, που κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου v και κινητική ενέργεια K , συγκρούεται πλαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα B, διπλάσιας μάζας ($m_2 = 2m$), που βρίσκεται στο ίδιο δάπεδο. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι:

- (α) $\frac{K}{4}$, (β) $\frac{K}{3}$, (γ) $\frac{3K}{2}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

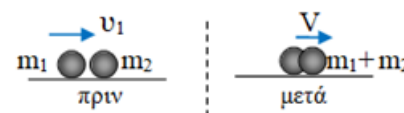
B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού τα σώματα κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :



$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = m_1 v_1 \Leftrightarrow 3mV = mv \Leftrightarrow V = \frac{v}{3}. \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \xrightarrow{(1)} K_{\sigma} = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\frac{v}{3}\right)^2 = \frac{3}{2}m \frac{v^2}{9} \Rightarrow K_{\sigma} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \Rightarrow$$

$$K_{\sigma} = \frac{1}{3}K.$$

36. (19653) Μια βόμβα μάζας m βρίσκεται στιγμιαία ακίνητη σε ύψος H από την επιφάνεια της Γης. Τη στιγμή εκείνη εκρήγνυται σε δύο κομμάτια. Το πρώτο κομμάτι έχει μάζα m_1 και το δεύτερο m_2 , ενώ τα δύο κομμάτια εκτοξεύονται οριζόντια με ταχύτητες μέτρων v_1 και v_2 αντίστοιχα. Αν γνωρίζετε ότι το βεληνεκές S_2 του δεύτερου κομματιού είναι διπλάσιο του βεληνεκούς S_1 του πρώτου κομματιού τότε, οι μάζες m_1 και m_2 ικανοποιούν τη σχέση:

(α) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$, (β) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$, (γ) $\frac{m_1}{m_2} = 2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχτούμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκειά της.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Επομένως οι ορμές των δύο κομματιών αμέσως μετά τη διάσπαση είναι αντίθετες, δηλαδή έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2. \quad (1)$$

Τα δύο κομμάτια εκτοξεύονται ταυτόχρονα και οριζόντια από το ίδιο ύψος h , άρα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος μετά από χρόνο t . Για τις οριζόντιες αποστάσεις s_1, s_2 (βεληνεκή) που θα διανύσουν μέχρι να φτάσουν στο έδαφος, ισχύουν οι σχέσεις :

$$s_1 = v_1 t, \quad (2)$$

$$s_2 = v_2 t. \quad (3)$$

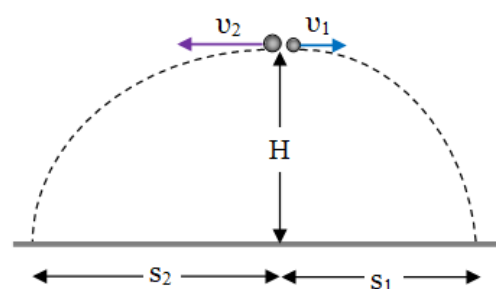
$$\text{Ισχύει : } s_2 = 2s_1 \xrightarrow{(2),(3)} v_2 t = 2v_1 t \Leftrightarrow v_2 = 2v_1. \quad (4)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (4) προκύπτει :

$$m_1 v_1 = m_2 \cdot 2v_1 \Leftrightarrow m_1 = 2m_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2.$$

Σχόλιο

Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι σταθερή και οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.



37. (20047) Δύο σημειακά αντικείμενα 1 και 2, τα οποία κινούνται στην ευθεία που ορίζουν, συγκρούονται. Αν $|\Delta p_1|$ είναι το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σημειακού αντικειμένου 1 και $|\Delta p_2|$ το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σημειακού αντικειμένου 2 κατά τη διάρκεια της κρούσης τους, τότε:

(α) $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$, (β) $|\Delta p_1| = -|\Delta p_2|$, (γ) $|\Delta p_1| = |\Delta p_2| = 0$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Έστω $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ οι ορμές των σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση και $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$ οι ορμές τους αμέσως μετά την κρούση.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

Επομένως, οι μεταβολές των ορμών των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες.

Άρα τα μέτρα των μεταβολών των ορμών είναι ίσα : $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$.

* Αν μετά την κρούση τα σώματα κινούνται στην ίδια ευθεία, τότε ισχύει η ισότητα και για τα μέτρα των αλγεβρικών μεταβολών των ορμών : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$.

2ος τρόπος

Έστω Δt η χρονική διάρκεια της κρούσης.

Κατά τη διάρκεια της κρούσης το Σ_1 δέχεται (μέση) δύναμη $\vec{F}_1$ από το Σ_2 και ασκεί σε αυτό (μέση) δύναμη $\vec{F}_2$.

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ισχύει για κάθε σώμα :

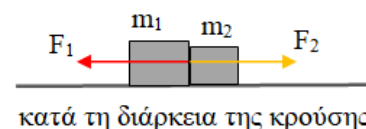
$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}, \quad (1) \quad \vec{F}_2 = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}. \quad (2)$$

$$\text{Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton : } \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$

Επομένως, οι μεταβολές των ορμών των δύο σωμάτων κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες.

Άρα τα μέτρα των μεταβολών των ορμών είναι ίσα : $|\Delta \vec{p}_1| = |\Delta \vec{p}_2|$.

* Αν μετά την κρούση τα σώματα κινούνται στην ίδια ευθεία, τότε ισχύει η ισότητα και για τα μέτρα των αλγεβρικών μεταβολών των ορμών : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2|$.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν μετά την κρούση τα σώματα κινούνται στην ίδια ευθεία, ώστε να ισχύει η ισότητα και για τα μέτρα των αλγεβρικών μεταβολών των ορμών.

38. (20048) Σημειακό αντικείμενο μάζας m , κινούμενο με ταχύτητα v , συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με αρχικά ακίνητο σημειακό αντικείμενο μάζας M , το οποίο είναι ελεύθερο να κινηθεί. Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια, κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι 75%, τότε :

(α) $M = 3 \cdot m$, (β) $M = m$, (γ) $M = \frac{m}{3}$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

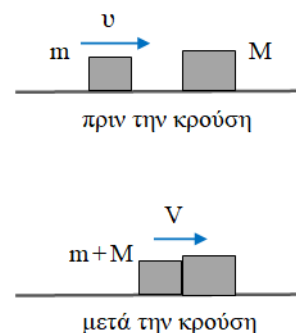
Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m+M)V = mv \Leftrightarrow V = \frac{mv}{M+m}. \quad (1)$$



Κατά τη διάρκεια της κρούσης η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται κατά 75%, άρα παραμένει στο σύστημα το 25% της αρχική κινητικής ενέργειας.

Ισχύει :

$$K_{ολ(μετά)} = 25\% \cdot K_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \xrightarrow{(1)} (M+m) \frac{m^2 v^2}{(M+m)^2} = \frac{1}{4}mv^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{m}{M+m} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow M+m = 4m \Leftrightarrow M = 3m.$$

39. (20231) Ένα αυτοκίνητο με μάζα M κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ πάνω σε οριζόντιο δρόμο. Στη πορεία του συναντά ακίνητο κιβώτιο που έχει μάζα $m_1 = \frac{M}{20}$ και συγκρούεται με αυτό πλαστικά, δημιουργώντας συσσωμάτωμα. Το συσσωμάτωμα, αυτοκίνητο-κιβώτιο, αποκτά ταχύτητα $\vec{V}$, αμέσως μετά τη κρούση.

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του αυτοκινήτου κατά την κρούση είναι ίσο με:

(α) $\frac{4Mv}{21}$, (β) $\frac{2Mv}{21}$, (γ) $\frac{Mv}{21}$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

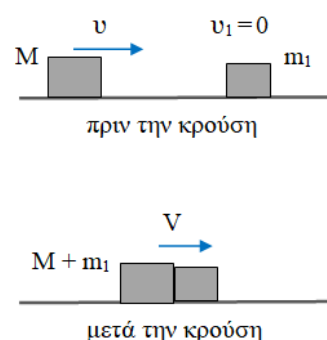
Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + M)V = Mv \Leftrightarrow \left(\frac{M}{20} + M\right)V = Mv \Leftrightarrow$$

$$\frac{21M}{20}V = Mv \Leftrightarrow V = \frac{20v}{21}. \quad (1)$$



Η μεταβολή της ορμής του αυτοκινήτου κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p = MV - Mv = M\left(\frac{20v}{21} - v\right) \Leftrightarrow \Delta p = -\frac{Mv}{21}.$$

Επομένως, το μέτρο της μεταβολής της ορμής του αυτοκινήτου είναι : $|\Delta p| = \frac{Mv}{21}$.

40. (21173) Σώμα που έχει ορμή P , συγκρούεται πλαστικά με άλλο σώμα τριπλάσιας μάζας, το οποίο είναι ακίνητο. Να μελετήσετε τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Η ορμή του συσσωματώματος είναι $4P$.

(β) Η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι τετραπλάσια του αρχικά κινούμενου σώματος.

(γ) Κατά τη σύγκρουση μεταφέρθηκε από το πρώτο σώμα στο δεύτερο ορμή $\frac{3P}{4}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_0$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$P_{ολ(μετά)} = P_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow p_{\sigma} = p. \quad (1)$$

Επομένως, η πρόταση (α) είναι λάθος.

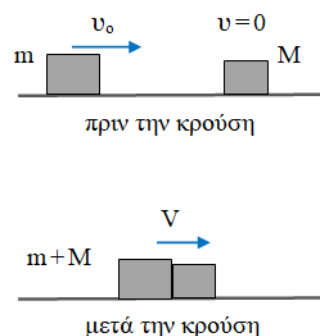
$$(1) \Rightarrow (m+M)V = mv_0 \Leftrightarrow (m+3m)V = mv_0 \Leftrightarrow V = \frac{v_0}{4}. \quad (2)$$

Επομένως, η πρόταση (β) είναι λάθος.

Η μεταβολή της ορμής του 2ου σώματος είναι :

$$\Delta p_2 = MV - 0 \xrightarrow{(2)} \Delta p_2 = 3m \frac{v_0}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = \frac{3p}{4}.$$

Άρα, η πρόταση (γ) είναι σωστή.



Σχόλια :

1) Το σύμβολο της ορμής είναι p (μικρό) και όχι P (κεφαλαίο).

2) Η διατύπωση «Κατά τη σύγκρουση μεταφέρθηκε από το πρώτο σώμα στο δεύτερο ορμή $\frac{3P}{4}$ » δεν είναι σωστή.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης, το μέτρο της ορμής του δεύτερου σώματος αυξάνεται κατά $\frac{3p}{4}$ ».

41. (21388) Δύο σφαίρες αποτελούν σύστημα σωμάτων. Να μελετήσετε τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Η συνολική μάζα ενός κλειστού συστήματος σωμάτων μπορεί να μεταβάλλεται.

(β) Η ολική ορμή του συστήματος σωμάτων διατηρείται πάντα σταθερή.

(γ) Κατά την αλληλεπίδραση των σφαιρών, οι οποίες αποτελούν ένα μονωμένο σύστημα, οι μεταβολές των ορμών τους είναι αντίθετες.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

α) Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ύλης (της κλασσικής Φυσικής), η συνολική μάζα ενός κλειστού συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή.

Επομένως, η πρόταση (α) είναι λάθος.

β) Η ολική ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή, εφ' όσον οι εξωτερικές δυνάμεις του συστήματος έχουν μηδενική συνισταμένη, δηλαδή όταν το σύστημα είναι μονωμένο.

Επομένως, η πρόταση (β) είναι λάθος.

γ) Έστω $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ οι ορμές των σφαιρών ελάχιστα πριν την αλληλεπίδραση και $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$ οι ορμές τους αμέσως μετά την αλληλεπίδραση.

Αφού το σύστημα είναι μονωμένο, ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_2' \Leftrightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) \Leftrightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2.$$

Επομένως, οι μεταβολές των ορμών των δύο σφαιρών κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι αντίθετες.

Η πρόταση (γ) είναι σωστή.

2ος τρόπος

$$\vec{p}_{ολ} = \text{σταθερή} \Leftrightarrow \Delta\vec{p}_{ολ} = 0 \Leftrightarrow \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2.$$

42. (21401) Μία σταθερή δύναμη F ασκείται σε ένα σώμα στην κατεύθυνση της κίνησής του και σε χρονικό διάστημα Δt προκαλεί μεταβολή στο μέτρο της ορμής του κατά $12 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Αν η δύναμη διπλασιαστεί, τότε σε χρονικό διάστημα $\Delta t_2 = 3\Delta t_1$ η μεταβολή του μέτρου της ορμής που προκαλεί αυτή η δύναμη θα είναι:

(α) $24 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, (β) $36 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, (γ) $72 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού η δύναμη είναι σταθερή και έχει την ίδια κατεύθυνση με την ορμή του σώματος, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον 2ο νόμο του Newton αλγεβρικά.

1η περίπτωση

$$F = \frac{\Delta p_1}{\Delta t_1}. \quad (1)$$

2η περίπτωση

$$F' = \frac{\Delta p_2}{\Delta t_2}. \quad (2)$$

Ισχύει :

$$F' = 2F \xrightarrow{(1),(2)} \frac{\Delta p_2}{\Delta t_2} = 2 \frac{\Delta p_1}{\Delta t_1} \xrightarrow{\Delta t_2 = 3\Delta t_1} \frac{\Delta p_2}{3\Delta t_1} = 2 \frac{\Delta p_1}{\Delta t_1} \Leftrightarrow \Delta p_2 = 6(\Delta p_1) \Rightarrow$$

$$\Delta p_2 = 6 \cdot 12 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 72 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

εναλλακτικός τρόπος

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μεταβολή της ορμής του σώματος είναι (αλγεβρικά) :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta p = F(\Delta t). \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (1) σε κάθε περίπτωση.

1η περίπτωση

$$\Delta p_1 = F_1(\Delta t_1). \quad (2)$$

2η περίπτωση

$$\Delta p_2 = F_2(\Delta t_2) = 2F_1(3\Delta t_1) \Rightarrow \Delta p_2 = 6F_1(\Delta t_1). \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει : $\Delta p_2 = 6(\Delta p_1) = 72 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

43. (21437) Ένα βαγόνι B_1 μάζας $m_1 = 30.000 \text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 4 \text{ m/s}$ και συγκρούεται με ένα άλλο ακίνητο βαγόνι B_2 . Αμέσως μετά τη σύγκρουση, το B_2 κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_2' = 3 \text{ m/s}$, ενώ το B_1 αναστρέφει την κίνησή του και κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1' = 1 \text{ m/s}$. Η μάζα m_2 του βαγονιού B_2 είναι ίση με

(α) 30.000 kg , (β) 50.000 kg , (γ) 40.000 kg

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

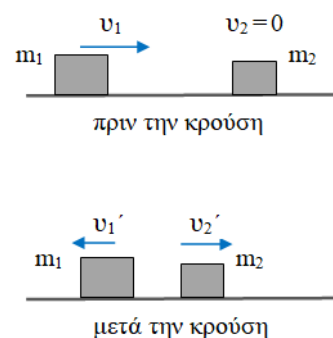
Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ. (μετά)}} = p_{\text{ολ. (πριν)}} \Leftrightarrow -m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 \Leftrightarrow m_2 = \frac{m_1 (v_1 + v_1')}{v_2'} \Rightarrow$$

$$m_2 = \frac{3 \cdot 10^4 (4 + 1)}{3} \text{ Kg} \Rightarrow m_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ Kg}.$$



44. (21439) Σώμα μάζας m , το οποίο έχει κινητική ενέργεια K , συγκρούεται πλαστικά με σώμα τετραπλάσιας μάζας. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων, κατά την κρούση είναι κατ' απόλυτη τιμή:

(α) $\frac{7 \cdot K}{4}$, (β) $\frac{5 \cdot K}{4}$, (γ) K

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκειά της.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ :

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow \vec{p} + \vec{p}' = 0 \Leftrightarrow \vec{p}' = -\vec{p}.$$

Επομένως οι ορμές των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση είναι αντίθετες, δηλαδή έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p' = p \Leftrightarrow 4mv' = mv \Leftrightarrow v' = \frac{v}{4}. \quad (1)$$

Οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων πριν την κρούση είναι :

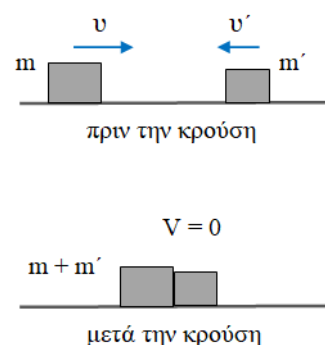
$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2)$$

$$K' = \frac{1}{2} \cdot m'v'^2 \xrightarrow{(1)} K' = \frac{1}{2} \cdot 4m \frac{v^2}{16} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \xrightarrow{(2)} K' = \frac{K}{4}. \quad (3)$$

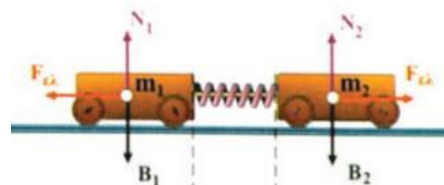
Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$\Delta K_{ολ} = K_{ολ(μετά)} - K_{ολ(πριν)} = 0 - (K + K') \xrightarrow{(3)} \Delta K_{ολ} = - \left(K + \frac{K}{4} \right) \Rightarrow \Delta K_{ολ} = - \frac{5K}{4}.$$

Επομένως, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατ' απόλυτη τιμή είναι $\frac{5K}{4}$.



45. (21490) Ας θεωρήσουμε τα δυο αμαξάκια που φαίνονται στην επόμενη εικόνα. Αυτά έχουν μάζες m_1 και $m_2 = 2m_1$ και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Μεταξύ τους υπάρχει ελατήριο, το οποίο εφάπτεται σε αυτά. Αρχικά το ελατήριο είναι συμπιεσμένο, επειδή τα αμαξάκια συγκρατούνται με ένα λεπτό νήμα.



Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και τα αμαξάκια κινούνται ελεύθερα.

Αν σε χρονικό διάστημα Δt (μετά την απώλεια επαφής με το ελατήριο) το αμαξάκι μάζας m_1 διανύει απόσταση s_1 , τότε στο ίδιο χρονικό διάστημα το άλλο αμαξάκι θα διανύσει απόσταση

$$(α) s_2 = \frac{s_1}{2} \quad , \quad (β) s_2 = 2s_1 \quad , \quad (γ) s_2 = s_1$$

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού δεν υπάρχουν τριβές, το σύστημα είναι μονωμένο

άρα η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται .

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 ,$$

δηλαδή οι ορμές των δύο αμαξιδίων μετά τον αποχωρισμό τους είναι αντίθετες.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = 2m_1 v_2 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2 \quad \text{ή} \quad v_2 = \frac{v_1}{2}. \quad (1)$$

Αφού κοπεί το νήμα, κάθε αμαξάκι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

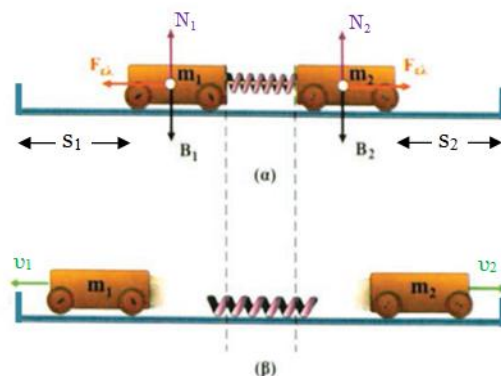
Μετά από χρόνο Δt το αριστερό άκρο του 1ου αμαξιδίου θα διανύσει απόσταση s_1 με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_1 .

$$\text{Ισχύει : } s_1 = v_1(\Delta t) . \quad (2)$$

Μετά από χρόνο Δt το δεξιό άκρο του 2ου αμαξιδίου θα διανύσει απόσταση s_2 με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_2 .

$$\text{Ισχύει : } s_2 = v_2(\Delta t) \xrightarrow{(1)} s_2 = \frac{v_1}{2}(\Delta t). \quad (3)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει : } s_2 = \frac{s_1}{2}.$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση αναφέρει ότι « . . τα αμαξάκια μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές . . . ».

Προφανώς, ο συγγραφέας εννοεί ότι δεν υπάρχουν τριβές στους άξονες περιστροφής των τροχών και αντιστάσεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα.

Αν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ των τροχών και της επιφάνειας, τότε οι τροχοί δεν περιστρέφονται αλλά ολισθαίνουν με την ταχύτητα που έχει κάθε αμαξάκι.

46. (21691) Ένας πύραυλος αποτελείται από δύο τμήματα ίσων μαζών m , και κινείται εκτός ατμόσφαιρας κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου v , ενώ οι μηχανές του έχουν τεθεί εκτός λειτουργίας. Κάποια στιγμή τίθεται σε λειτουργία ειδικός μηχανισμός που διαχωρίζει ακαριαία τα δύο τμήματα. Ακολούθως, το πάνω τμήμα συνεχίζει να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου $\frac{3}{2}v$.

Η ταχύτητα του κάτω τμήματος είναι:

(α) $\frac{v}{3}$, (β) $\frac{v}{2}$, (γ) $\frac{2v}{3}$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

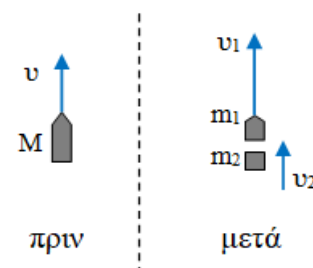
Μονάδες 9

Απάντηση

Η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Οι ορμές του πυραύλου και του 1ου κομματιού έχουν την ίδια διεύθυνση, άρα και η ορμή του 2ου κομματιού έχει την ίδια διεύθυνση (διαφορετικά δεν θα διατηρούνταν η ορμή του συστήματος).

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης προς τα πάνω και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :



$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow mv_1 + mv_2 = 2mv \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 2v \Leftrightarrow v_2 = 2v - \frac{3}{2}v \Leftrightarrow v_2 = \frac{v}{2}.$$

Επομένως, η ταχύτητα του 2ου κομματιού αμέσως μετά τη διάσπαση έχει μέτρο $v_2 = \frac{v}{2}$ και φορά προς τα πάνω.

47. (21763) Το κύριο στέλεχος του πυροτεχνήματος εκρήγνυται όταν φτάσει στο ανώτερο ύψος της κατακόρυφης τροχιάς του. Το σφαιρικό σχήμα που αποκτούν τα διάπυρα κομμάτια του πυροτεχνήματος μετά την έκρηξη έχουν αποτυπωθεί όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα.



Ποια αρχή της φυσικής δικαιολογεί την εικόνα αυτή αμέσως μετά την έκρηξη;

- (α) Η αρχή διατήρησης της ορμής.
 - (β) Η αρχή διατήρησης της δυναμικής ενέργειας.
 - (γ) Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.
- A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 5

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 7

Απάντηση

Τη στιγμή που φτάνει το στέλεχος του πυροτεχνήματος στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του, η ταχύτητά του μηδενίζεται άρα και η ορμή του είναι μηδενική : $p_{ολ(πριν)} = 0$.

Υποθέτουμε ότι τα κομμάτια που προκύπτουν από τη διάσπαση έχουν (περίπου) ίσες μάζες m .

Υποθέτουμε επίσης ότι τα κομμάτια κατανέμονται συμμετρικά στο χώρο (σχήμα).

Από το σφαιρικό σχήμα του πυροτεχνήματος συμπεραίνουμε ότι μετά την έκρηξη τα κομμάτια διανύουν ίσες αποστάσεις, άρα έχουν ταχύτητες ίσου μέτρου v .

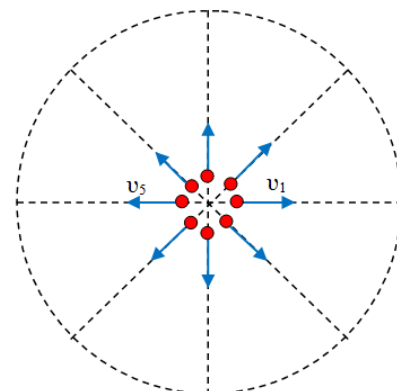
Αν θεωρήσουμε δύο κομμάτια που κινούνται στην ίδια ευθεία, οι ορμές τους θα είναι αντίθετες άρα η ορμή του συστήματος των δύο κομματιών θα είναι μηδενική. π.χ. $p_{1,5} = mv - mv = 0$.

Το ίδιο ισχύει για τα υπόλοιπα ζευγάρια κομματιών του πυροτεχνήματος.

Επομένως, η ολική ορμή του συστήματος αμέσως μετά την έκρηξη είναι μηδενική : $p_{ολ(μετά)} = 0$.

Άρα, από το σφαιρικό σχήμα του πυροτεχνήματος συμπεραίνουμε ότι η ορμή του συστήματος

διατηρείται σταθερή : $\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)}$ ή $\vec{p}_{ολ} = \text{σταθερή}$.



Σχόλιο : Η απάντηση βασίζεται σε αυθαίρετες υποθέσεις και προσεγγίσεις.

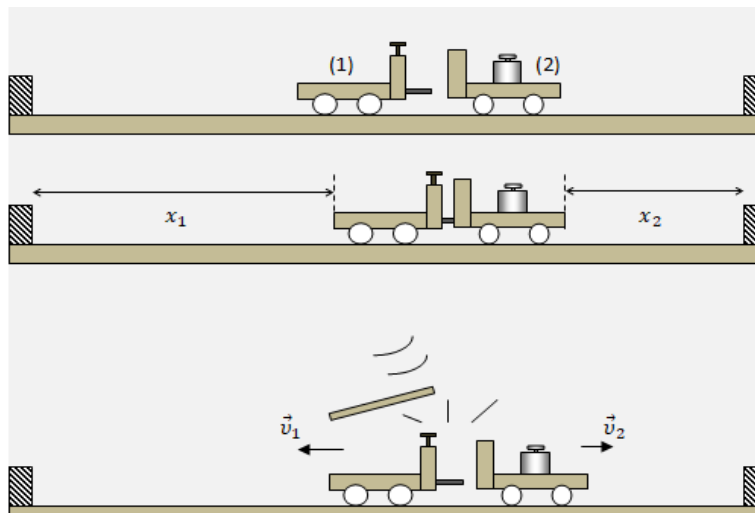
Η εκφώνηση δεν παρέχει επαρκή δεδομένα ώστε οι εξεταζόμενοι/νες να τεκμηριώσουν την απάντησή τους.

48. (21817) Μια ομάδα μαθητριών και μαθητών, με τη βοήθεια της/του καθηγήτριας/καθηγητή τους, εκτέλεσαν ένα πείραμα για να επιβεβαιώσουν την αρχή διατήρησης της ορμής σε μονωμένο σύστημα σωμάτων. Στο εργαστήριό τους βρήκαν αμαξίδια, που μερικά είχαν και έμβολο, το οποίο ήταν δυνατόν να συμπιέζεται και να σταθεροποιείται συμπιεσμένο. Μια ασφάλεια, στο πάνω μέρος του αμαξιδίου, μπορεί να απελευθερώνει το συμπιεσμένο έμβολο, με ένα μικρό κτύπημα, ώστε να ξαναβρεθεί στην αρχική του θέση. Αρχικά ζύγισαν το αμαξίδιο με το έμβολο και βρήκαν τη μάζα του $m_1 = 400 \text{ g}$.

Σε ένα δεύτερο αμαξίδιο χωρίς έμβολο, τοποθέτησαν ένα βαρίδι και ζυγίζοντας βρήκαν τη συνολική του μάζα $m_2 = 800 \text{ g}$ (σχήμα 1).

Συμπίεσαν το έμβολο του αμαξιδίου (1) και το έφεραν σε επαφή με το αμαξίδιο (2), έτσι ώστε να είναι αρχικά ακίνητα και τα δύο, στην ίδια οριζόντια διεύθυνση (σχήμα 2).

Με ένα ξαφνικό κτύπημα στην ασφάλεια του αμαξιδίου (1), το έμβολο απελευθερώνεται, εκτινάσσεται και από τις εσωτερικές δυνάμεις δράσης-αντίδρασης τα δύο αμαξίδια κινούνται αντίθετα μέχρι να κτυπήσουν σε καλά στερεωμένα εμπόδια στις δύο άκρες του πάγκου. Εκτέλεσαν το πείραμα αρκετές φορές, μέχρι να βρουν αρχική θέση στο σύστημα, τέτοια που τα αμαξίδια να κτυπούν ταυτόχρονα στα εμπόδια αυτά. Βρήκαν τελικά ότι αυτό συμβαίνει όταν το αμαξίδιο (1) απέχει αρχικά από το δικό του εμπόδιο $x_1 =$



80 cm και το αμαξίδιο (2) απέχει $x_2 = 40 \text{ cm}$ από το εμπόδιο της δικής του πλευράς (σχήμα 3).

Ο καθηγητής (καθηγήτριά) τους είπε ότι μπορούν θεωρήσουν ομαλή και ευθύγραμμη την κίνηση των δύο αμαξιδίων μετά την εκτόξευσή τους, εξαιτίας της κύλισης των τροχών.

A. Πιστεύετε ότι κατάφεραν να δείξουν ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, στο σύστημα των σωμάτων;

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την άποψή σας

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού αποχωριστούν τα αμαξίδια θα χτυπήσουν στις άκρες του τραπεζιού μετά από χρόνο t .

Η ταχύτητα του 1ου αμαξιδίου μετά τον αποχωρισμό έχει μέτρο : $v_1 = \frac{x_1}{t}$. (1)

Η ταχύτητα του 2ου αμαξιδίου μετά τον αποχωρισμό έχει μέτρο : $v_2 = \frac{x_2}{t}$. (2)

Ισχύει : $x_1 = 2x_2 \xrightarrow{(1),(2)} v_1 = 2v_2 \quad \text{ή} \quad v_2 = \frac{v_1}{2}$. (3)

Για τα μέτρα των ορμών των αμαξιδίων ισχύει :

$$p_1 = m_1 v_1. \quad (4)$$

$$p_2 = m_2 v_2 \xrightarrow[(3)]{m_2 = 2m_1} p_2 = 2m_1 \cdot \frac{v_1}{2} \Leftrightarrow p_2 = m_1 v_1 \xrightarrow{(4)} p_2 = p_1.$$

Αφού οι ορμές των αμαξιδίων μετά τον αποχωρισμό έχουν ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις, άρα είναι αντίθετες (αλγεβρικά) :

$$p_1 = -p_2 \Leftrightarrow p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow p_{\text{ολ(μετά)}} = 0.$$

Πριν τον αποχωρισμό τα αμαξίδια ήσαν ακίνητα, άρα : $p_{\text{ολ(πριν)}} = 0$.

Επομένως : $p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}}$, δηλαδή το πείραμα απέδειξε ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.

Σχόλιο : Η εκφώνηση έχει υπερβολικά μεγάλη έκταση για ερώτηση εξετάσεων.

49. (21819) Ένας πύραυλος μάζας M , κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_0$, εκτός πεδίου βαρύτητας. Κάποια στιγμή, μια προγραμματισμένη εσωτερική έκρηξη, διασπά τον πύραυλο σε δύο κομμάτια (1) και (2), με μάζες αντίστοιχα $m_1 = \frac{4}{5} \cdot M$ και $m_2 = \frac{1}{5} \cdot M$.

Αν αμέσως μετά την έκρηξη, το κομμάτι (2) δεν έχει ταχύτητα, τότε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του κομματιού (1), εξαιτίας της έκρηξης, είναι:

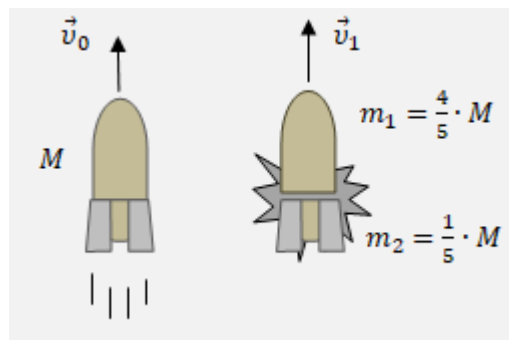
(α) $|\Delta p_1| = 0$, (β) $|\Delta p_1| = \frac{1}{5} \cdot M \cdot v_0$, (γ) $|\Delta p_1| = \frac{5}{4} \cdot M \cdot v_0$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Ο πύραυλος βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, άρα το σύστημα είναι μονωμένο και επομένως η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της διάσπασης.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_{ολ(πριν)}.$$

Επομένως, το 1ο κομμάτι κινείται προς την ίδια κατεύθυνση με τον πύραυλο.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow m_1 v_1 = M v_0 \Leftrightarrow \frac{4}{5} M v_1 = M v_0 \Leftrightarrow v_1 = \frac{5}{4} v_0.$$

Η μεταβολή της ορμής του 1ου κομματιού κατά τη διάρκεια της διάσπασης είναι :

$$\Delta p_1 = m_1 v_1 - m_1 v_0 = m_1 \left(\frac{5}{4} v_0 - v_0 \right) \Leftrightarrow \Delta p_1 = \frac{4}{5} M \cdot \frac{1}{4} v_0 \Leftrightarrow \Delta p_1 = \frac{1}{5} M v_0.$$

Άρα το μέτρο της μεταβολής της ορμής του 1ου κομματιού είναι : $|\Delta p_1| = \frac{1}{5} M v_0$.

εναλλακτικός τρόπος

Ο πύραυλος βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας, άρα το σύστημα είναι μονωμένο.

Η μεταβολή της ορμής του 2ου κομματιού κατά τη διάρκεια της διάσπασης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_2 = p_{2(μετά)} - p_{2(πριν)} = 0 - m_2 v_0 \Rightarrow \Delta p_2 = -\frac{1}{5} M v_0. \quad (1)$$

Οι μεταβολές των ορμών των δύο κομματιών στη διάρκεια της διάσπασης είναι αντίθετες :

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \xrightarrow{(1)} \Delta p_1 = \frac{1}{5} M v_0.$$

Άρα το μέτρο της μεταβολής της ορμής του 1ου κομματιού είναι : $|\Delta p_1| = \frac{1}{5} M v_0$.

50. (21853) Ένα βαγόνι Α με μάζα m συγκρούεται με ένα δεύτερο ακίνητο βαγόνι Β ίσης μάζας και μετά τη σύγκρουση τα δύο βαγόνια κινούνται μαζί σαν ένα σώμα.

Αν K_A είναι η κινητική ενέργεια του βαγονιού Α και K_Σ η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος, τότε ισχύει:

$$(\alpha) \quad K_\Sigma = K_A \quad , \quad (\beta) \quad K_\Sigma = 2 \cdot K_A \quad , \quad (\gamma) \quad K_\Sigma = \frac{K_A}{2}$$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του Α και εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m_A v_A = (m_A + m_B) V \xrightarrow{m_A = m_B = m} m v_A = 2mV \\ \Leftrightarrow v_A = 2V. \quad (1)$$

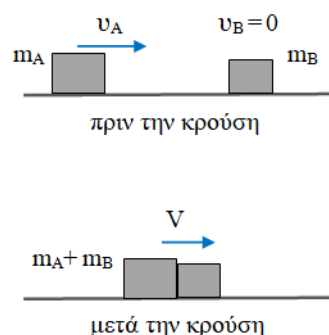
Η κινητική ενέργεια του βαγονιού Α πριν την κρούση είναι :

$$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 \xrightarrow{(1)} K_A = \frac{1}{2} m \cdot 4V^2 \Leftrightarrow K_A = 2mV^2. \quad (2)$$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι :

$$K_\Sigma = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot V^2 \Leftrightarrow K_\Sigma = mV^2. \quad (3)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει : } K_A = 2K_\Sigma \Leftrightarrow K_\Sigma = \frac{K_A}{2}.$$



Θέματα Β

$$(\alpha) \bar{K} \quad , \quad (\beta) 2\bar{K} \quad , \quad (\gamma) \frac{\bar{K}}{2}.$$

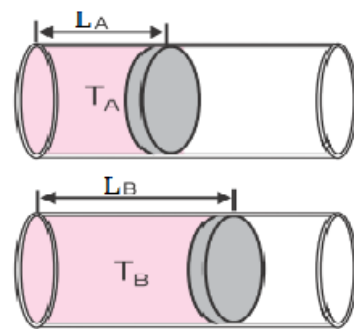
Μονάδες 4

Μονάδες 8

$$\bar{K}' = \frac{3}{2}kT' = \frac{3}{2}k(2T) = 2\left(\frac{3}{2}kT\right) \Rightarrow \bar{K}' = 2\bar{K}.$$

Σελίδα 102

2. (16038, 2.1) Ένα κυλινδρικό δοχείο περιέχει ποσότητα ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία T_A και κλείνεται αεροστεγώς με έμβολο διατομής A . Το δοχείο τοποθετείται με τον άξονά του οριζόντιο, όπως φαίνεται στο σχήμα και το έμβολο ισορροπεί, με το μήκος της αέριας στήλης να είναι L_A (κατάσταση A). Αυξάνουμε σιγά σιγά τη θερμοκρασία στο δοχείο, μέχρις ότου το μήκος της αέριας στήλης γίνει $L_B = 2L_A$ και το έμβολο ισορροπεί (κατάσταση B). Θεωρούμε ότι η μετακίνηση του εμβόλου γίνεται αργά και χωρίς τριβές και η πίεση του αερίου είναι πάντα ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Ο λόγος $\frac{\bar{K}_A}{\bar{K}_B}$ των μέσων κινητικών ενεργειών των μορίων του



ιδανικού αερίου στις καταστάσεις A και B είναι:

(α) $\frac{\bar{K}_A}{\bar{K}_B} = 0,5$,

(β) $\frac{\bar{K}_A}{\bar{K}_B} = 1$,

(γ) $\frac{\bar{K}_A}{\bar{K}_B} = 2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο όγκος του αερίου κατάσταση A είναι : $V_A = A \cdot L_A$. (1)

Ο όγκος του αερίου κατάσταση B είναι : $V_B = A \cdot L_B$. (2)

Στη διάρκεια της μεταβολής $A \rightarrow B$ η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική (ισοβαρής μεταβολή).

Σύμφωνα με τον νόμο του Gay-Lussac ισχύει :

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \xrightarrow{(1),(2)} \frac{A \cdot L_A}{T_A} = \frac{A \cdot L_B}{T_B} \Leftrightarrow \frac{L_A}{T_A} = \frac{L_B}{T_B} \Leftrightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Το πηλίκο των μέσων κινητικών ενεργειών του αερίου στις καταστάσεις A, B είναι :

$$\frac{\bar{K}_A}{\bar{K}_B} = \frac{\frac{3}{2}kT_A}{\frac{3}{2}kT_B} = \frac{T_A}{T_B} \xrightarrow{(3)} \frac{\bar{K}_A}{\bar{K}_B} = \frac{1}{2}.$$

3. (16038, 2.2) Κυλινδρικό δοχείο με διαθερμικά τοιχώματα φράσσεται με εφαρμοστό έμβολο. Το δοχείο βρίσκεται μέσα σε λουτρό νερού σταθερής θερμοκρασίας και περιέχει ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου πίεσης 1atm και πυκνότητας ρ_A . Πιέζουμε το έμβολο ώστε η πίεση του αερίου στο δοχείο να αυξηθεί σε 2atm, οπότε η πυκνότητά του γίνεται ρ_B , που είναι ίση με:

(α) $\rho_B = \rho_A$, (β) $\rho_B = \frac{1}{2} \rho_A$, (γ) $\rho_B = 2\rho_A$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στη διάρκεια της μεταβολής, η απόλυτη θερμοκρασία T του αερίου παραμένει σταθερή.

Αν M η γραμμομοριακή μάζα του αερίου, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση, ισχύει :

$$p = \frac{\rho RT}{M} \Leftrightarrow \rho = \frac{pM}{RT}.$$

Κατάσταση A

$$\rho_A = \frac{p_A M}{RT} \quad (1)$$

Κατάσταση B

$$\rho_B = \frac{p_B M}{RT} \xrightarrow{p_B = 2p_A} \rho_B = \frac{2p_A M}{RT} \xrightarrow{(1)} \rho_B = 2\rho_A.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το νόμο του Boyle για την ισόθερμη μεταβολή :

$$p_A V_A = p_B V_B \xrightarrow{p_B = 2p_A} p_A V_A = 2p_A V_B \Rightarrow V_A = 2V_B \text{ ή } V_B = \frac{V_A}{2}. \quad (1)$$

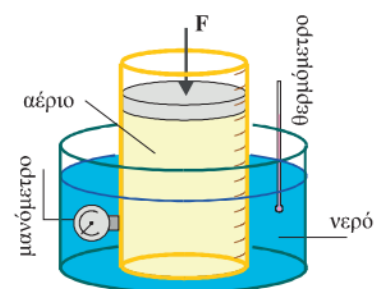
Εφαρμόζουμε τη σχέση της πυκνότητας $\rho = \frac{m}{V}$ στις δύο καταστάσεις.

Κατάσταση A

$$\rho_A = \frac{m}{V_A}. \quad (2)$$

Κατάσταση B

$$\rho_B = \frac{m}{V_B} \xrightarrow{(1)} \rho_B = \frac{m}{\frac{V_A}{2}} \Leftrightarrow \rho_B = \frac{2m}{V_A} \xrightarrow{(2)} \rho_B = 2\rho_A.$$



4. (16071) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου υποβάλλεται σε αντιστρεπτή μεταβολή κατά την οποία ο όγκος του αερίου τετραπλασιάζεται και η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου τετραπλασιάζεται. Κατά τη μεταβολή αυτή:

- (α) Η πίεση του αερίου τετραπλασιάζεται και η θερμοκρασία του διπλασιάζεται.
 (β) Η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή και η θερμοκρασία του τετραπλασιάζεται.
 (γ) Η πίεση και η θερμοκρασία του αερίου διπλασιάζονται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Για την αντιστρεπτή μεταβολή $A \rightarrow B$ ισχύουν οι σχέσεις :

$$V_B = 4V_A, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_B &= \frac{3}{2} kT_B \\ \bar{K}_A &= \frac{3}{2} kT_A \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\bar{K}_B = 4\bar{K}_A} T_B = 4T_A. \quad (2)$$

* Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για τις καταστάσεις A, B :

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A}, \quad (3)$$

$$p_B = \frac{nRT_B}{V_B} \xrightarrow{(1), (2)} p_B = \frac{nR \cdot 4T_A}{4V_A} \Leftrightarrow p_B = \frac{nRT_A}{V_A}. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι : $p_B = p_A$.

Άρα, κατά τη διάρκεια της μεταβολής η πίεση του αερίου είναι σταθερή και η **απόλυτη** θερμοκρασία τετραπλασιάζεται.

* (Εναλλακτική συνέχεια)

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{4V_A}{4T_A} \Leftrightarrow \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_A}{T_A}.$$

Η σχέση αυτή είναι ο νόμος Gay–Lussac στην ισοβαρή μεταβολή.

Επομένως, η πίεση του αερίου είναι σταθερή : $p = \text{σταθερή}$.

Άρα, κατά τη διάρκεια της μεταβολής η πίεση του αερίου είναι σταθερή και η **απόλυτη** θερμοκρασία τετραπλασιάζεται.

Σχόλιο : Στα ερωτήματα (α), (β), (γ) η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει την **απόλυτη** θερμοκρασία (T).

5. (16104) Κάποια ημέρα η απόλυτη θερμοκρασία του αέρα είναι T_1 και η ατμοσφαιρική πίεση p_1 . Ένα δωμάτιο έχει αρχικά ένα τζάμι του ανοιχτό και επικοινωνεί με το περιβάλλον. Το τζάμι του παραθύρου έχει εμβαδό A . Κλείνουμε το παράθυρο και το δωμάτιο είναι πλέον αεροστεγώς κλεισμένο. Θερμαίνουμε με ηλεκτρική θερμάστρα το δωμάτιο και η θερμοκρασία του γίνεται $T_2 = 1,5T_1$. Θεωρούμε ότι ο αέρας είναι ιδανικό αέριο.

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης, στην οριζόντια διεύθυνση, που ασκείται τότε στο τζάμι του παραθύρου από τον αέρα στο περιβάλλον και τον αέρα μέσα στο δωμάτιο είναι:

α. $\Sigma F = 0,5p_1A$ β. $\Sigma F = p_1A$ γ. $\Sigma F = 1,5p_1A$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

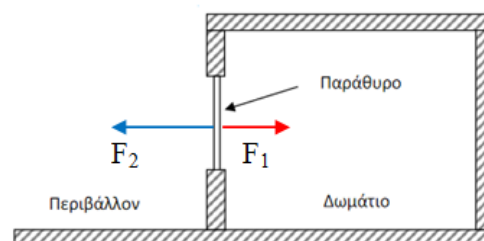
Απάντηση

Από τη στιγμή που έκλεισε το παράθυρο, η ποσότητα του αέρα στο δωμάτιο παραμένει σταθερή.

Κατά τη διάρκεια της θέρμανσης ο όγκος του αέρα είναι σταθερός (ισόχωρη μεταβολή).

Εφαρμόζουμε το νόμο του Charles :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \xrightarrow{T_2=1,5T_1} \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{1,5T_1} \Leftrightarrow p_2 = 1,5p_1. \quad (1)$$



Το τζάμι του παραθύρου δέχεται δύο (πιεστικές) δυνάμεις : τη δύναμη $\vec{F}_2$ από τον αέρα του δωματίου, που έχει μέτρο $F_2 = p_2A$ με φορά προς τα αριστερά και τη δύναμη $\vec{F}_1$ από τον ατμοσφαιρικό αέρα, που έχει μέτρο $F_1 = p_1A$ με φορά προς τα δεξιά.

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το τζάμι έχει μέτρο :

$$\Sigma F = F_2 - F_1 = p_2A - p_1A = (p_2 - p_1)A \xrightarrow{(1)} \Sigma F = 0,5p_1A.$$

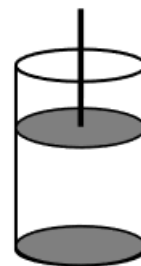
6. (16121) Κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο έχει τη μία του βάση ακλόνητη ενώ η άλλη φράσσεται με έμβολο βάρους w και επιφάνειας με εμβαδό A που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Το δοχείο, αφού προστίθεται ορισμένη ποσότητα αερίου, τοποθετείται όπως φαίνεται στο σχήμα με το έμβολο να ισορροπεί.

Κατά την ισορροπία η πίεση του αερίου είναι:

- (α) ίση με την ατμοσφαιρική πίεση.
- (β) μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση.
- (γ) μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

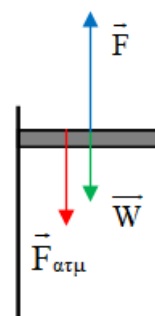
Απάντηση

Το έμβολο δέχεται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}$, τη δύναμη $\vec{F}_{\text{ατμ}}$ από τον ατμοσφαιρικό αέρα (με φορά προς τα κάτω) και τη δύναμη $\vec{F}$ από το αέριο (με φορά προς τα πάνω).

Στη θέση ισορροπίας ισχύει :

$$\Sigma F=0 \Leftrightarrow F=F_{\text{ατμ}}+W \Leftrightarrow pA=p_{\text{ατμ}}A+W \Leftrightarrow p=p_{\text{ατμ}}+\frac{W}{A}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η πίεση του αερίου είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική.

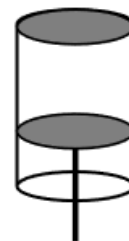


7. (16122) Κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο έχει τη μία του βάση ακλόνητη ενώ η άλλη φράσσεται με έμβολο βάρους w και επιφάνειας A που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Στο δοχείο προστίθεται ορισμένη ποσότητα αερίου και κατόπιν τοποθετείται με το κινούμενο έμβολο προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το έμβολο ισορροπεί σε κάποια θέση. Κατά την ισορροπία η πίεση του αερίου είναι:

- (α) ίση με την ατμοσφαιρική πίεση.
- (β) μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση.
- (γ) μικρότερη από την ατμοσφαιρική πίεση.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

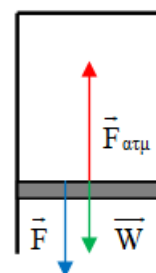
Το έμβολο δέχεται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{W}$, τη δύναμη $\vec{F}$ από το αέριο (με φορά προς τα κάτω) και τη δύναμη $\vec{F}_{\text{ατμ}}$ από τον ατμοσφαιρικό αέρα (με φορά προς τα πάνω).

Στη θέση ισορροπίας ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{\text{ατμ}} = F + W \Leftrightarrow p_{\text{ατμ}} A = pA + W \Leftrightarrow p_{\text{ατμ}} = p + \frac{W}{A} \Leftrightarrow$$

$$p = p_{\text{ατμ}} - \frac{W}{A}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η πίεση του αερίου είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική.



8. (16226) Στο διάγραμμα του σχήματος απεικονίζονται οι ισόθερμες καμπύλες (1) και (2), της ίδιας θερμοκρασίας T για δύο διαφορετικά ιδανικά αέρια.

Αν n_1 και n_2 τα moles των δύο αερίων, τότε ισχύει η σχέση:

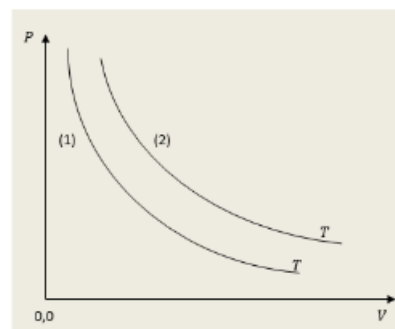
(α) $n_1 = n_2$, (β) $n_1 > n_2$, (γ) $n_1 < n_2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

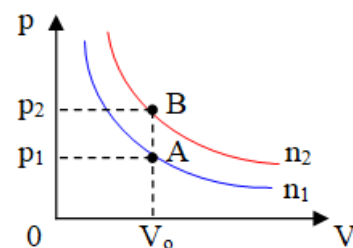
Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για δύο καταστάσεις ισορροπίας A, B με την ίδια τιμή του όγκου V_0 :

$$p_1 V_0 = n_1 RT \Leftrightarrow p_1 = \frac{n_1 RT}{V_0}. \quad (1)$$

$$p_2 V_0 = n_2 RT \Leftrightarrow p_2 = \frac{n_2 RT}{V_0}. \quad (2)$$

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι : $p_1 < p_2$.

Επομένως, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : $\frac{n_1 RT}{V_0} < \frac{n_2 RT}{V_0} \Leftrightarrow n_1 < n_2$.



9. (16243) Δοχείο περιέχει αρχικά 4 mol ιδανικού αερίου υπό πίεση p_0 και θερμοκρασία T_0 . Το δοχείο φράσσεται στο στόμιο του από ειδική βαλβίδα ασφαλείας η οποία ανοίγει και επιτρέπει να διαφύγει ποσότητα αερίου μόλις η πίεση στο δοχείο ξεπεράσει την τιμή $2p_0$. Θερμαίνουμε το αέριο σε θερμοκρασία $4T_0$ οπότε η βαλβίδα ανοίγει, επιτρέπει να διαφύγει μια ποσότητα αερίου ενώ το υπόλοιπο αέριο, μέσα στο δοχείο, διατηρείται σε θερμοκρασία $4T_0$.

Ο λόγος του αριθμού των mol του αερίου πριν και μετά το άνοιγμα της βαλβίδας ισούται με:

(α) 4, (β) $\frac{1}{2}$, (γ) 2.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της μεταβολής ο όγκος V του αερίου παραμένει σταθερός.

Έστω n_0, n οι αριθμοί mol του αερίου στο δοχείο πριν και μετά το άνοιγμα της βαλβίδας.

Από τη στιγμή που ανοίγει η βαλβίδα (σε θερμοκρασία $4T_0$) η πίεση του αερίου είναι ίση με $2p_0$.

Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων στις δύο καταστάσεις ισορροπίας :

$$p_0 V = n_0 R T_0, \quad (1)$$

$$2p_0 V = n R \cdot 4T_0 \Leftrightarrow p_0 V = 2n R T_0. \quad (2)$$

Εξισώνοντας τα 2α μέλη των σχέσεων (1), (2) προκύπτει :

$$n_0 R T_0 = 2n R T_0 \Leftrightarrow n_0 = 2n \Leftrightarrow \frac{n_0}{n} = 2.$$

10. (16325) Όταν η απόλυτη θερμοκρασία (T) ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου διπλασιάζεται υπό σταθερό όγκο, τότε η πίεσή του:

(α) παραμένει σταθερή.

(β) διπλασιάζεται.

(γ) υποδιπλασιάζεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο όγκος του αερίου είναι σταθερός.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Charles για την ισόχωρη μεταβολή $A \rightarrow B$:

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \xrightarrow{T_B = 2T_A} \frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{2T_A} \Leftrightarrow p_B = 2p_A.$$

11. (16384) Όταν ο όγκος ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου τριπλασιάζεται υπό σταθερή θερμοκρασία, τότε η πίεσή του

(α) παραμένει σταθερή.

(β) τριπλασιάζεται

(γ) υποτριπλασιάζεται

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η θερμοκρασία του αερίου είναι σταθερή.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Boyle για την ισόθερμη μεταβολή $A \rightarrow B$:

$$p_A V_A = p_B V_B \xrightarrow{V_B = 3V_A} p_A V_A = p_B \cdot 3V_A \Leftrightarrow p_A = 3p_B \Leftrightarrow p_B = \frac{p_A}{3}.$$

12. (16388, 2.1) Ένα μπαλόνι περιέχει αέριο ήλιο. Τα μόρια του αερίου συγκρούονται μεταξύ τους και μετά από κάθε κρούση μεταξύ τους ή με τα τοιχώματα του μπαλονιού η ορμή τους αυξάνεται ή μειώνεται. Το μέγεθος του μπαλονιού:

- (α) αυξάνεται.
- (β) μειώνεται.
- (γ) παραμένει σταθερό.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Δεχόμαστε ότι το ήλιο συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο και οι κρούσεις των μορίων είναι ελαστικές, δηλαδή δεν υπάρχει απώλεια κινητικής ενέργειας.

Επομένως, η συνολική κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου είναι σταθερή :

$$K_{\text{ολ}} = K_1 + K_2 + \dots + K_N = \text{σταθερή}.$$

Με βάση τον ορισμό, η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου είναι σταθερή :

$$\bar{K} = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_N}{N} = \text{σταθερή}. \quad (1)$$

Για το ιδανικό αέριο ισχύει : $\bar{K} = \frac{3}{2} kT.$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι η θερμοκρασία του αερίου παραμένει σταθερή : $T = \text{σταθερή}.$

Η πίεση του αερίου είναι σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική πίεση : $p = p_{\text{ατμ}} = \text{σταθερή}.$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει :

$$pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{p}.$$

Αφού η ποσότητα του ηλίου στο μπαλόνι είναι σταθερή (όπως και η πίεση με τη θερμοκρασία), από την προηγούμενη σχέση συμπεραίνουμε ότι ο όγκος του ηλίου είναι σταθερός, άρα το μέγεθος του μπαλονιού παραμένει σταθερό.

Σημείωση

Στην απάντηση έγινε προσπάθεια να δικαιολογηθεί γιατί η θερμοκρασία του αερίου στο μπαλόνι παραμένει σταθερή, με βάση την παραδοχή της κινητικής θεωρίας ότι οι κρούσεις των μορίων είναι ελαστικές.

Μία **πιο σύντομη απάντηση** είναι η εξής :

Δεχόμαστε ότι η θερμοκρασία του αερίου στο μπαλόνι είναι σταθερή : $T = \text{σταθερή}.$

Η πίεση του αερίου είναι σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική πίεση : $p = p_{\text{ατμ}} = \text{σταθερή}.$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων προκύπτει :

$$pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{p}.$$

Αφού η ποσότητα του ηλίου στο μπαλόνι είναι σταθερή (όπως και η πίεση με τη θερμοκρασία), από την προηγούμενη σχέση συμπεραίνουμε ότι ο όγκος του ηλίου είναι σταθερός, άρα το μέγεθος του μπαλονιού παραμένει σταθερό.

Σχόλια :

- 1) Οι κρούσεις των μορίων θεωρούνται ελαστικές, άρα δεν μεταβάλλεται το μέτρο της ορμής ενός μορίου μετά από κάθε κρούση με το τοίχωμα του μπαλονιού.
- 2) Η εκφώνηση δεν έχει επαρκή δεδομένα, π.χ. δεν αναφέρει ότι το μπαλόνι έχει σταθερή θερμοκρασία και πίεση.

13. (16388, 2.2) Το ήλιο που περιέχει το μπαλόνι, προσεγγίζει καλύτερα από κάθε άλλο αέριο την συμπεριφορά του ιδανικού αερίου. Θερμαίνουμε το μπαλόνι με συνέπεια να αυξηθεί ο όγκος και η θερμοκρασία του. Αυτό συνέβη επειδή η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου:

(α) αυξήθηκε (β) μειώθηκε (γ) παρέμεινε σταθερή

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σύμφωνα με τη σχέση $\bar{K} = \frac{3}{2} k T$, η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία T του αερίου.

Αφού αυξήθηκε η θερμοκρασία του αερίου επομένως **αυξήθηκε η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου**.

Η πίεση του αερίου είναι σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική πίεση ($p = p_{\text{ατμ}} = \text{σταθερή}$), άρα η μεταβολή είναι ισοβαρής.

Από το νόμο Gay-Lussac $\left(\frac{V}{T} = \text{σταθ.} \right)$ προκύπτει ότι αφού αυξήθηκε η θερμοκρασία άρα αυξήθηκε και ο όγκος του αερίου (και του μπαλονιού).

Επομένως, η αύξηση της θερμοκρασίας και του όγκου του μπαλονιού οφείλεται στην αύξηση της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων του ηλίου.

14. (16873)

A. Αν κατακόρυφο δοχείο κλείνεται με έμβολο βάρους B και διατομής A, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, ενώ περιέχει αέριο σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, τότε η πίεση του αερίου θα εκφράζεται από τη σχέση:

(α) $P_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu} = \dots$ αν το δοχείο είναι κατακόρυφο με τη βάση του προς τα κάτω.

(β) $P_{\alpha\epsilon\rho\iota\omicron\nu} = \dots$ αν το δοχείο είναι κατακόρυφο με τη βάση του προς τα πάνω.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

B. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

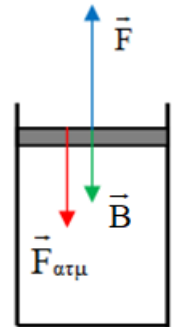
Δίνεται ότι η ατμοσφαιρική πίεση στο χώρο που βρίσκεται το κυλινδρικό δοχείο είναι P_{atm} .

Απάντηση

(α) Το έμβολο δέχεται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, τη δύναμη $\vec{F}_{\alpha\tau\mu}$ από τον ατμοσφαιρικό αέρα (με φορά προς τα κάτω) και τη δύναμη $\vec{F}$ από το αέριο (με φορά προς τα πάνω).

Στη θέση ισορροπίας ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F = F_{\alpha\tau\mu} + B \Leftrightarrow pA = p_{\alpha\tau\mu}A + B \Leftrightarrow p = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{B}{A}.$$

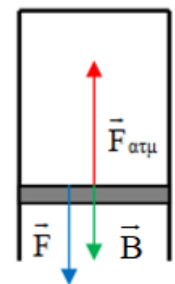


(β) Το έμβολο δέχεται τρεις δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$, τη δύναμη $\vec{F}$ από το αέριο (με φορά προς τα κάτω) και τη δύναμη $\vec{F}_{\alpha\tau\mu}$ από τον ατμοσφαιρικό αέρα (με φορά προς τα πάνω).

Στη θέση ισορροπίας ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_{\alpha\tau\mu} = F + B \Leftrightarrow p_{\alpha\tau\mu}A = pA + B \Leftrightarrow p_{\alpha\tau\mu} = p + \frac{B}{A} \Leftrightarrow$$

$$p = p_{\alpha\tau\mu} - \frac{B}{A}.$$



Σχόλιο : Το σύμβολο της πίεσης είναι το p (μικρό) και όχι P (κεφαλαίο).

15. (19474) Η μεταβολή ABΓΔΑ που παριστάνεται στο διπλανό διάγραμμα όγκου – θερμοκρασίας συγκεκριμένης ποσότητας ενός ιδανικού αερίου αποτελείται από:

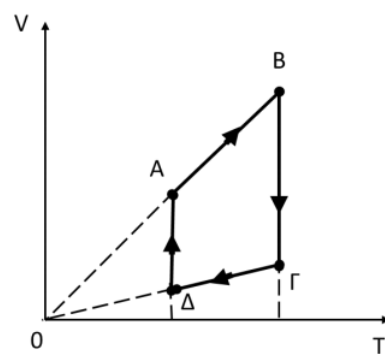
- (α) Δύο ισόχωρες και δύο ισόθερμες μεταβολές.
- (β) Δύο ισοβαρείς και δύο ισόθερμες μεταβολές.
- (γ) Δύο ισόχωρες και δύο ισοβαρείς μεταβολές.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 8



Απάντηση

Στις μεταβολές $A \rightarrow B$, $\Gamma \rightarrow \Delta$ ο όγκος μεταβάλλεται ανάλογα με την απόλυτη θερμοκρασία, άρα η πίεση είναι σταθερή. Επομένως, οι μεταβολές $A \rightarrow B$, $\Gamma \rightarrow \Delta$ είναι **ισοβαρείς**.

Στις μεταβολές $B \rightarrow \Gamma$, $\Delta \rightarrow A$ η θερμοκρασία είναι σταθερή, άρα οι μεταβολές είναι **ισόθερμες**.

Επομένως, η μεταβολή ABΓΔΑ αποτελείται από δύο ισοβαρείς και δύο ισόθερμες μεταβολές.

16. (20045) Ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, στην οποία η απόλυτη θερμοκρασία του είναι T και η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του είναι $\bar{K}$. Προκειμένου να διπλασιαστεί η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου θα πρέπει η θερμοκρασία του, στη νέα κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, να είναι:

- (α) T , (β) $2 \cdot T$, (γ) $\frac{T}{2}$.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η μέση κινητική ενέργεια $\bar{K}$ των μορίων ιδανικού αερίου είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία T :

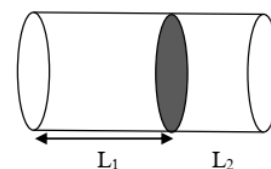
$$\bar{K} = \frac{3}{2} kT.$$

Επομένως, για να διπλασιαστεί η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου πρέπει να διπλασιαστεί η απόλυτη θερμοκρασία, δηλαδή να γίνει : $T' = 2T$.

17. (20230) Ο κύλινδρος του σχήματος χωρίζεται σε δύο μέρη με έμβολο αμελητέου πάχους που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Στα δύο μέρη περιέχεται συνολική ποσότητα 2 mol του ίδιου ιδανικού αερίου.

Το δοχείο βρίσκεται σε σταθερή θερμοκρασία και το έμβολο ισορροπεί

σε τέτοια θέση ώστε: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{2}$.



Αν n_1 ο αριθμός των mol του ιδανικού αερίου που περιέχεται στο πρώτο μέρος του δοχείου τότε:

(α) $n_1 = 1 \text{ mol}$, (β) $n_1 = 1,2 \text{ mol}$, (γ) $n_1 = 1,5 \text{ mol}$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

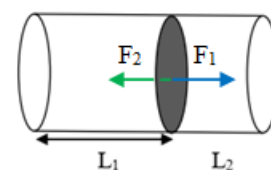
Μονάδες 9

Απάντηση

Ο όγκος κυλίνδρου με εμβαδό βάσης A και ύψος L δίνεται από τη σχέση :

$$V = A \cdot L.$$

Το έμβολο δέχεται δύο πιεστικές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ από το αέριο που βρίσκεται στα δύο τμήματα του δοχείου.



Αφού ισορροπεί, οι δυνάμεις είναι αντίθετες, άρα έχουν ίσα μέτρα.

$$\text{Ισχύει : } F_1 = F_2 \Leftrightarrow p_1 A = p_2 A \Leftrightarrow p_1 = p_2 = p,$$

δηλαδή οι πιέσεις στα δύο τμήματα είναι ίσες.

Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση στα δύο τμήματα.

$$pV_1 = n_1 RT \quad (1)$$

$$pV_2 = n_2 RT \quad (2)$$

Διαιρούμε τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη :

$$\frac{pV_1}{pV_2} = \frac{n_1 RT}{n_2 RT} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{L_1 A}{L_2 A} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow n_2 = \frac{2}{3} n_1. \quad (3)$$

$$\text{Ισχύει : } n_1 + n_2 = n \xrightarrow{(3)} n_1 + \frac{2}{3} n_1 = n \Leftrightarrow \frac{5}{3} n_1 = n \Leftrightarrow n_1 = \frac{3}{5} n \Rightarrow n_1 = 1,2 \text{ mol}.$$

18. (20231) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται μέσα σε δοχείο με σταθερά τοιχώματα σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, με απόλυτη θερμοκρασία T_1 και πίεση p_1 . Τριπλασιάζουμε την απόλυτη θερμοκρασία T του αερίου.

Στη νέα κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας του αερίου, για τη πίεσή του p_2 , θα ισχύει:

(α) $p_2 = \frac{p_1}{3}$, (β) $p_2 = p_1$, (γ) $p_2 = 3p_1$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην ισόχωρη μεταβολή ($V = \text{σταθερός}$) ισχύει ο νόμος του Charles :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \xrightarrow{T_2=3T_1} \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{3T_1} \Leftrightarrow p_2 = 3p_1 .$$

19. (20233) Δύο ποσότητες ιδανικών αερίων με αριθμό γραμμομορίων n_1 και n_2 αντίστοιχα βρίσκονται σε δύο δοχεία ίδιου όγκου $V_1 = V_2 = V$. Τα δύο αέρια εκτελούν τις αντιστρεπτές ισόχωρες μεταβολές (1) και (2) που φαίνονται στο διάγραμμα.

Για τον αριθμό γραμμομορίων των δύο αερίων ισχύει:

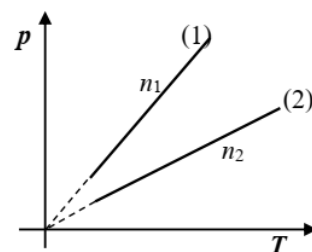
(α) $n_1 > n_2$, (β) $n_1 = n_2$, (γ) $n_1 < n_2$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

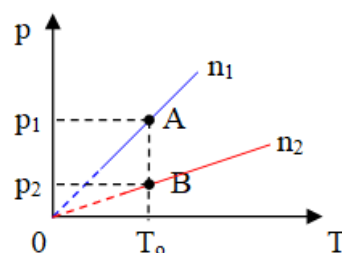
Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για δύο καταστάσεις A και B με την ίδια τιμή της θερμοκρασίας T_0 :

$$p_1 V = n_1 R T_0 \Leftrightarrow p_1 = \frac{n_1 R T_0}{V}. \quad (1)$$

$$p_2 V = n_2 R T_0 \Leftrightarrow p_2 = \frac{n_2 R T_0}{V}. \quad (2)$$

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι: $p_1 > p_2$.

Επομένως, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει: $\frac{n_1 R T_0}{V} > \frac{n_2 R T_0}{V} \Leftrightarrow n_1 > n_2$.



Σχόλιο: Ο όρος «γραμμομόριο» έχει αντικατασταθεί από τον όρο «mol».

20. (20804) Το διάγραμμα σε άξονες p – V της ισόθερμης μεταβολής είναι:

(α) Ευθεία από την αρχή των αξόνων, (β) Παραβολή, (γ) Υπερβολή.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην ισόθερμη μεταβολή **ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου** παραμένει σταθερή η θερμοκρασία του ($T = \text{σταθερή}$).

Σύμφωνα με το νόμο του Boyle, η πίεση και ο όγκος του αερίου συνδέονται με τη σχέση :

$$pV = \alpha \Leftrightarrow p = \frac{\alpha}{V}. \quad (\alpha = \text{σταθερά})$$

Το διάγραμμα αυτής της σχέσης είναι υπερβολή.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η ποσότητα του αερίου είναι σταθερή κατά τη διάρκεια της μεταβολής.

21. (20893) Μέσα στο κλειστό κυλινδρικό δοχείο του σχήματος μήκους L υπάρχει ένα λεπτό έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και δεν επιτρέπει την ανταλλαγή θερμότητας μέσα από αυτό. Στο αριστερό μέρος του δοχείου υπάρχει ορισμένη ποσότητα μάζας m ιδανικού αερίου Α σε θερμοκρασία T ενώ στο δεξιό μέρος υπάρχει ίση ποσότητα μάζας m ιδανικού αερίου Β στην ίδια θερμοκρασία T .

Η σχέση των γραμμομοριακών μαζών M_A και M_B των ιδανικών αερίων Α και Β αντιστοίχως είναι $M_A = 16M_B$. Αν το έμβολο ισορροπεί, οι αποστάσεις του εμβόλου l_1 και l_2 από τα άκρα του δοχείου ικανοποιούν τη σχέση:

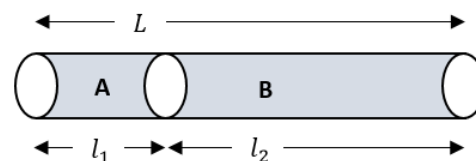
$$(\alpha) l_2 = 16l_1, \quad (\beta) l_2 = 4l_1, \quad (\gamma) l_2 = 2l_1$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



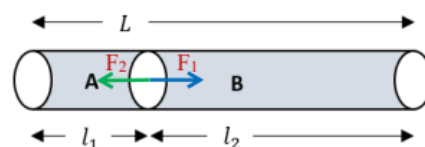
Απάντηση

Το έμβολο δέχεται δύο πιεστικές δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ από το αέριο που βρίσκεται στα δύο τμήματα του δοχείου.

Αφού το έμβολο ισορροπεί, οι δυνάμεις είναι αντίθετες, άρα έχουν ίσα μέτρα.

$$\text{Ισχύει: } F_1 = F_2 \Leftrightarrow p_1 A = p_2 A \Leftrightarrow p_1 = p_2 = p,$$

δηλαδή οι πιέσεις στα δύο τμήματα είναι ίσες.



$$\text{Η καταστατική εξίσωση γράφεται: } pV = nRT \xrightarrow{n=\frac{m}{M}} pV = \frac{m}{M} RT \Leftrightarrow pVM = mRT.$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή στα δύο τμήματα.

$$pV_1 M_A = mRT \quad (1)$$

$$pV_2 M_B = mRT \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει: } V_1 M_A = V_2 M_B \quad (3)$$

$$\text{Για τους όγκους των δύο τμημάτων ισχύουν οι σχέσεις: } V_1 = L_1 A, \quad (4) \quad V_2 = L_2 A. \quad (5)$$

Συνδυάζουμε τις σχέσεις (3), (4), (5):

$$L_1 A M_A = L_2 A M_B \xrightarrow{M_A = 16M_B} L_1 \cdot 16M_B = L_2 M_B \Leftrightarrow L_2 = 16L_1.$$

22. (20895) Μια ποσότητα ιδανικού αερίου θερμαίνεται, από θερμοκρασία T σε $3T$ υπό σταθερή πίεση. Το ποσοστό αύξησης του όγκου του αερίου είναι ίσο με:

(α) 300%, (β) 200% , (γ) 400%

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στη διάρκεια της μεταβολής η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή (ισοβαρής μεταβολή).

Σύμφωνα με τον νόμο του Gay-Lussac ισχύει :

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{3T} \Leftrightarrow V' = 3V.$$

Το ποσοστό μεταβολής του όγκου είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{V' - V}{V} \cdot 100\% = \frac{3V - V}{V} \cdot 100\% = \frac{2V}{V} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 200\%.$$

23. (21175) Ιδανικό αέριο θερμαίνεται ισόχωρα. Η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του:

(α) Μειώνεται

(β) Αυξάνεται

(γ) Παραμένει σταθερή

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η μέση κινητική ενέργεια των μορίων ιδανικού αερίου είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία του :

$$\overline{K} = \frac{3}{2} k T .$$

Αφού το αέριο θερμαίνεται, αυξάνεται η θερμοκρασία του άρα αυξάνεται και η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του.

24. (21438) Δύο ποσότητες ιδανικών αερίων σε mol , n_1 και n_2 αντίστοιχα, εκτελούν ισοβαρείς μεταβολές κάτω από την ίδια πίεση.

Στο διάγραμμα $V - T$ παριστάνεται η μεταβολή της κάθε ποσότητας αερίου.

Με βάση το διάγραμμα για τις ποσότητες σε mol , n_1 και n_2 ισχύει:

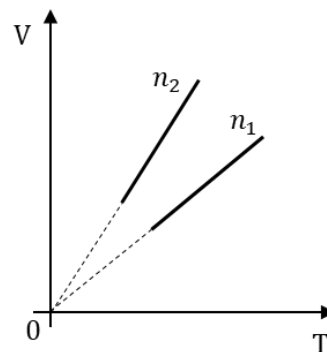
(α) $n_1 > n_2$, (β) $n_1 = n_2$, (γ) $n_1 < n_2$

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

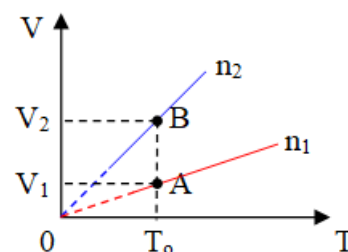
Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για δύο καταστάσεις A, B με την ίδια θερμοκρασία T_0 .

$$p V_1 = n_1 R T_0 \Leftrightarrow V_1 = \frac{n_1 R T_0}{p} \quad (1)$$

$$p V_2 = n_2 R T_0 \Leftrightarrow V_2 = \frac{n_2 R T_0}{p} \quad (2)$$

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι : $V_1 < V_2$. (3)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει : $\frac{n_1 R T_0}{p} < \frac{n_2 R T_0}{p} \Leftrightarrow n_1 < n_2$.



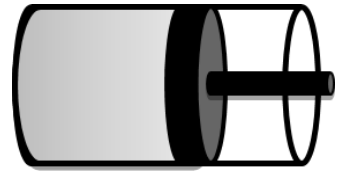
25. (21439) Κυλινδρικό δοχείο με εμβαδόν βάσης A , έχει τον άξονά του οριζόντιο, περιέχει ποσότητα ιδανικού αερίου και κλείνεται με έμβολο βάρους W , το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα. Το έμβολο ισορροπεί όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Αν $p_{\text{ατμ}}$ η ατμοσφαιρική πίεση και p η πίεση που ασκεί το αέριο στο έμβολο, τότε ισχύει:

(α) $p = p_{\text{ατμ}}$, (β) $p < p_{\text{ατμ}}$, (γ) $p > p_{\text{ατμ}}$

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

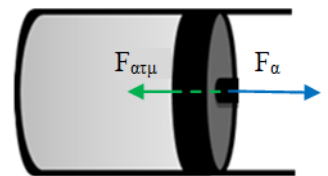
Υποθέτουμε ότι το έμβολο μπορεί να κινείται ελεύθερα χωρίς τριβές.

Στην οριζόντια διεύθυνση το έμβολο δέχεται δύο πιεστικές δυνάμεις :

τη δύναμη $\vec{F}_\alpha$ από το αέριο (με φορά προς τα έξω) που έχει μέτρο $F_\alpha = p A$ και τη δύναμη $\vec{F}_{\text{ατμ}}$ από τον ατμοσφαιρικό αέρα (με φορά προς τα μέσα) που έχει μέτρο $F_{\text{ατμ}} = p_{\text{ατμ}} A$.

Στη θέση ισορροπίας ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_\alpha = F_{\text{ατμ}} \Leftrightarrow p A = p_{\text{ατμ}} A \Leftrightarrow p = p_{\text{ατμ}} .$$



Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι το έμβολο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές.

26. (21440) Το κοινό διάγραμμα όγκου-απόλυτης θερμοκρασίας ($V - T$) δύο ποσοτήτων ιδανικού αερίου n_A και n_B , για τις οποίες ισχύει $n_A = n_B$, δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Για τις σταθερές πιέσεις p_A και p_B κάτω από τις οποίες τα αέρια πραγματοποιούν τις αντιστρεπτές μεταβολές A και B ισχύει:

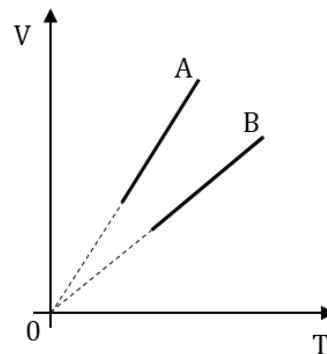
$$(\alpha) p_A < p_B, \quad (\beta) p_A > p_B, \quad (\gamma) p_A = p_B$$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για τις δύο ποσότητες αερίου, σε δύο καταστάσεις A, B με την ίδια θερμοκρασία T_0 .

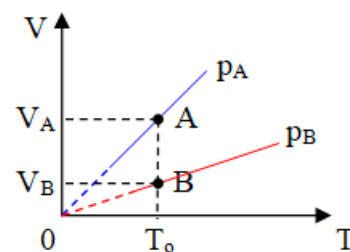
$$p_A V_A = n R T_0 \Leftrightarrow V_A = \frac{n R T_0}{p_A} \quad (1)$$

$$p_B V_B = n R T_0 \Leftrightarrow V_B = \frac{n R T_0}{p_B} \quad (2)$$

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι : $V_A > V_B$.

Επομένως, από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει :

$$\frac{n R T_0}{p_A} > \frac{n R T_0}{p_B} \Leftrightarrow \frac{1}{p_A} > \frac{1}{p_B} \Leftrightarrow p_A < p_B.$$



27. (21490) Δίνεται το επόμενο διάγραμμα το οποίο απεικονίζει την μεταβολή της πίεσης σε συνάρτηση με την απόλυτη θερμοκρασία ($p - T$) για ένα ιδανικό αέριο που υποβάλλεται στην κυκλική μεταβολή ΑΒΓΔ.

Η μεταβολή ΑΒ του διαγράμματος είναι

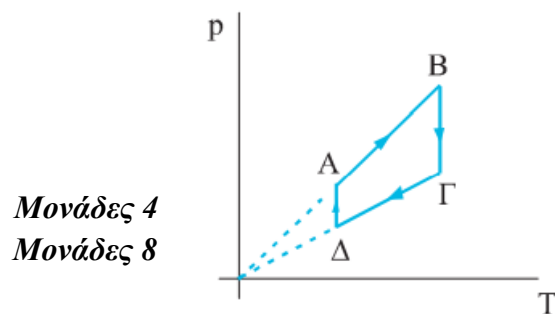
(α) ισοβαρής θέρμανση.

(β) ισόθερμη εκτόνωση.

(γ) ισόχωρη θέρμανση.

Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Απάντηση

Υποθέτουμε ότι **η ποσότητα του αερίου παραμένει σταθερή.**

Κατά τη διάρκεια της μεταβολής ΑΒ η πίεση είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία του αερίου, άρα ο όγκος του αερίου είναι σταθερός δηλαδή η μεταβολή είναι ισόχωρη.

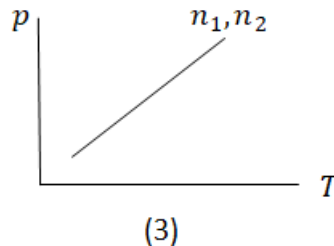
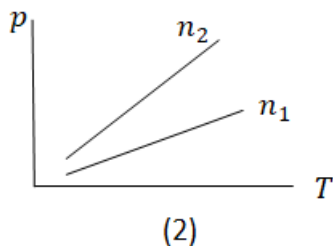
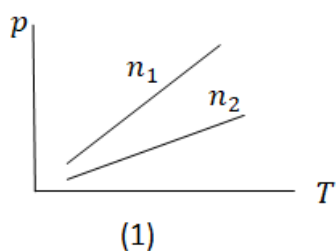
Επίσης, στη διάρκεια της μεταβολής αυξάνεται η θερμοκρασία του αερίου, δηλαδή το αέριο θερμαίνεται.

Επομένως η μεταβολή ΑΒ είναι ισόχωρη θέρμανση.

Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η ποσότητα του αερίου είναι σταθερή.
- 2) Η κυκλική μεταβολή είναι η ΑΒΓΔΑ και όχι η ΑΒΓΔ.

28. (21688) Δύο ποσότητες ιδανικών αερίων n_1 και n_2 σε mol αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει $n_1 < n_2$ βρίσκονται σε διαφορετικά δοχεία Δ_1 και Δ_2 ίσου όγκου και εκτελούν ισόχωρες αντιστρεπτές μεταβολές. Ποιο από τα διαγράμματα αναπαριστά σωστά την προηγούμενη πρόταση;



(α) το (1) , (β) το (2) , (γ) το (3)

A. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. (Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση)

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αφού οι μεταβολές είναι ισόχωρες, ο όγκος του αερίου είναι σταθερός : $V = \text{σταθ.}$

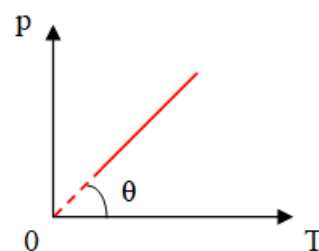
Από την καταστατική εξίσωση, προκύπτει : $p = \frac{nR}{V} \cdot T$.

Για ορισμένη ποσότητα αερίου ($n = \text{σταθ.}$) το διάγραμμα της σχέσης είναι πλάγια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) : $\alpha = \frac{nR}{V}$.

Σύμφωνα με τη σχέση, η κλίση της ευθείας είναι ανάλογη με τον αριθμό $\text{mol } n$ του αερίου (με $V = \text{σταθ.}$).

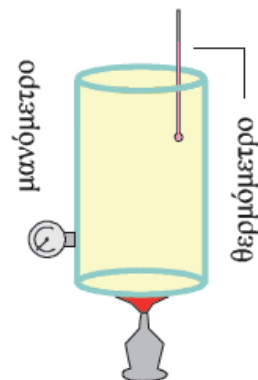
Αφού $n_1 < n_2$, άρα η ευθεία με τη μικρότερη κλίση αντιστοιχεί στον μικρότερο αριθμό $\text{mol } n_1$.

Επομένως, το σωστό διάγραμμα είναι το (2).



29. (21693) Σε πείραμα το οποίο γίνεται σε σχολικό εργαστήριο, το κλειστό δοχείο του σχήματος περιέχει αέρα. Το δοχείο θερμαίνεται από το κάτω μέρος, όπως στο σχήμα. Με τη βοήθεια θερμομέτρου και μανομέτρου λαμβάνονται μετρήσεις της θερμοκρασίας και της πίεσης του αέρα, καθώς αυτός θερμαίνεται. Τα σφάλματα των μετρήσεων θεωρούνται αμελητέα. Οι μετρήσεις αυτές φαίνονται στον πίνακα:

Θερμοκρασία T (K)	Πίεση p (kN/m ²)
300	100
330	130
360	160
390	190
420	210



Για τον αέρα στο δοχείο

(α) συμπεραίνουμε πως συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο.

(β) συμπεραίνουμε πως δεν συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο.

(γ) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της μεταβολής ο όγκος του αερίου είναι σταθερός, άρα η μεταβολή είναι ισόχωρη.

Κατά τη διάρκεια της ισόχωρης μεταβολής ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου, η πίεση και η απόλυτη

θερμοκρασία του αερίου ικανοποιούν τη σχέση : $\frac{P}{T} = \text{σταθερό}$. [νόμος του Charles]

Υπολογίζουμε το πηλίκιο $\frac{P}{T}$ για τις δύο πρώτες μετρήσεις.

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{300 \text{ K}} \cong 0,33 \frac{\text{kN}}{\text{K} \cdot \text{m}^2}.$$

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{130 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{330 \text{ K}} \cong 0,39 \frac{\text{kN}}{\text{K} \cdot \text{m}^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{p_1}{T_1} \neq \frac{p_2}{T_2}$, δηλαδή δεν ισχύει ο νόμος του Charles.

Επομένως, ο αέρας δεν συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο.

30. (21761) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου υφίσταται αντιστρεπτή μεταβολή $A \rightarrow B$, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα της πυκνότητας ρ του αερίου σε συνάρτηση με την πίεση του.

Κατά τη διάρκεια της αντιστρεπτής μεταβολής AB η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου:

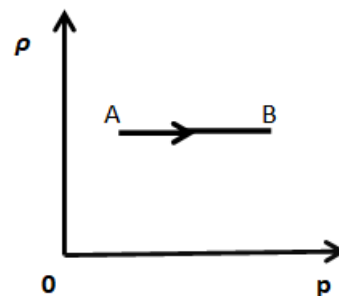
(α) αυξάνεται, (β) μειώνεται, (γ) παραμένει σταθερή

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Το διάγραμμα $\rho = f(p)$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα της πυκνότητας, άρα η πυκνότητα ρ του αερίου παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της μεταβολής.

Αφού η ποσότητα του αερίου είναι σταθερή, από τη σχέση $\rho = \frac{m}{V}$ συμπεραίνουμε ότι και ο όγκος V είναι σταθερός, δηλαδή η μεταβολή είναι ισόχωρη.

Κατά τη διάρκεια της ισόχωρης μεταβολής ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου, η πίεση είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία του αερίου: $p = \text{σταθ} \cdot T$. [νόμος του Charles]

Η πίεση του αερίου αυξάνεται κατά τη διάρκεια της μεταβολής, άρα αυξάνεται και η θερμοκρασία.

Σύμφωνα με τη σχέση $\bar{K} = \frac{3}{2} kT$, η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του ιδανικού αερίου είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία T .

Αφού αυξάνεται η θερμοκρασία άρα αυξάνεται και η μέση κινητική ενέργεια των μορίων.

31. (21767) Στα εργαστήριο φυσικής του Λυκείου κατά την πειραματική μελέτη των νόμων των αερίων, οι μαθητές πήραν μετρήσεις πίεσης και θερμοκρασίας για ορισμένη μάζα αερίου και δημιούργησαν το πιο κάτω γράφημα αφού πρώτα αποτύπωσαν τις μετρήσεις και χάραξαν την βέλτιστη ευθεία (η χάραξη της καλύτερης γραμμής των πειραματικών σημείων).

Η κλίση της πειραματικής ευθείας είναι :

(α) $\frac{p}{T} = \frac{1}{225} \frac{atm}{K}$,

(β) $\frac{p}{T} = 0,005 \frac{atm}{K}$,

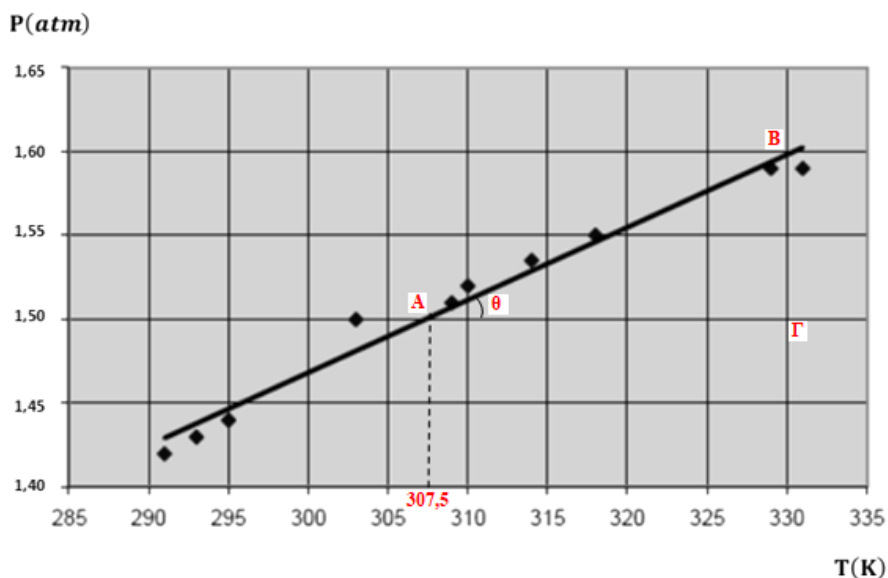
(γ) $\frac{p}{T} = 225 \frac{atm}{K}$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 5

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Επιλέγουμε δύο σημεία A, B του διαγράμματος και υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας :

$$\epsilon_{\theta} = \frac{(BG)}{(AB)} \cong \frac{(1,60 - 1,50) atm}{(330 - 307,5) K} \cong \frac{0,1 atm}{22,5 K} \cong \frac{1}{225} \frac{atm}{K}.$$

Σχόλια

- 1) Η κλίση της ευθείας είναι $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ και όχι $\frac{p}{T}$, αφού η ευθεία δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 2) Η απάντηση που δίνεται είναι κατά εκτίμηση (προσεγγιστική).
- 3) Οι απαντήσεις (α), (β) της εκφώνησης είναι παραπλήσιες ($\frac{1}{225} \cong 0,0044$) και μπορεί οι εξεταζόμενοι/νες να οδηγηθούν στην απάντηση (β) αν κάνουν διαφορετική εκτίμηση για τη θερμοκρασία T_A ή αν επιλέξουν διαφορετικά σημεία του διαγράμματος.

32. (21817) Ορισμένη ποσότητα αερίου, το οποίο θεωρείται ιδανικό, βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ισορροπίας (Α) με όγκο V_1 , πίεση p_1 και θερμοκρασία T_1 . Το αέριο υποβάλλεται σε δύο διαδοχικές και αντιστρεπτές μεταβολές, οι οποίες απεικονίζονται στο διάγραμμα πίεσης-απόλυτης θερμοκρασίας ($p - T$).

Για τις μεταβολές αυτές δίνονται τα στοιχεία:

Η (ΑΒ) είναι ισόχωρη θέρμανση μέχρι τριπλασιασμό της πίεσης του αερίου ($p_B = 3 \cdot p_1$).

Η (ΒΓ) είναι ισοβαρής θέρμανση μέχρι η τελική του απόλυτη θερμοκρασία να γίνει εξαπλάσια της αρχικής που είχε στην κατάσταση Α ($T_\Gamma = 6 \cdot T_1$).

Για τον όγκο του αερίου στην τελική κατάσταση Γ, ισχύει:

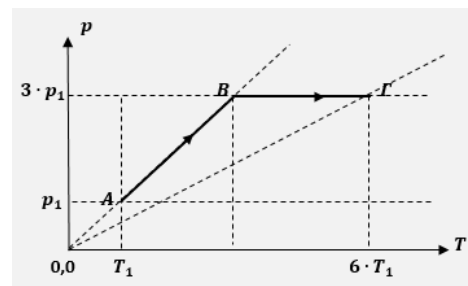
(α) $V_\Gamma = 6 \cdot V_1$, (β) $V_\Gamma = 3 \cdot V_1$, (γ) $V_\Gamma = 2 \cdot V_1$

Α. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για τις καταστάσεις Α, Γ :

$$p_1 V_1 = nRT_1 , \quad (1)$$

$$3p_1 V_\Gamma = nR \cdot 6T_1 \Leftrightarrow p_1 V_\Gamma = 2nRT_1 . \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{p_1 V_\Gamma}{p_1 V_1} = \frac{2nRT_1}{nRT_1} \Leftrightarrow \frac{V_\Gamma}{V_1} = 2 \Leftrightarrow V_\Gamma = 2V_1 .$$

33. (21848) Η αρχική θερμοκρασία μιας ποσότητας ιδανικού αερίου, το οποίο είναι κλεισμένο σε δοχείο σταθερού όγκου, είναι $\theta_1 = 102^\circ \text{C}$. Όταν αυξηθεί η θερμοκρασία του, παρατηρούμε ότι η πίεσή του αυξάνεται κατά 40%.

Η τελική θερμοκρασία του αερίου θα είναι:

$$(\alpha) \theta_2 = 252^\circ \text{C} \quad , \quad (\beta) \theta_2 = 352^\circ \text{C} \quad , \quad (\gamma) \theta_2 = 152^\circ \text{C}$$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η αρχική θερμοκρασία στην κλίμακα Kelvin είναι :

$$T_1 = 273 + \theta_1 \Rightarrow T_1 = (273 + 102) \text{ K} \Rightarrow T_1 = 375 \text{ K}.$$

Αφού η πίεση αυξήθηκε κατά 40%, ισχύει :

$$p_2 = p_1 + 40\%p_1 = p_1 + 0,4p_1 \Leftrightarrow p_2 = 1,4p_1. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Charles για την ισόχωρη μεταβολή :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \xrightarrow{(1)} \frac{p_1}{T_1} = \frac{1,4p_1}{T_2} \Leftrightarrow T_2 = 1,4T_1 \Rightarrow T_2 = 1,4 \cdot 375 \text{ K} \Rightarrow T_2 = 525 \text{ K}.$$

Ισχύει :

$$T_2 = 273 + \theta_2 \Leftrightarrow \theta_2 = T_2 - 273 \Rightarrow \theta_2 = (525 - 273) ^\circ \text{C} \Rightarrow \theta_2 = 252 ^\circ \text{C}.$$

34. (21849) Στο διάγραμμα $P - T$ του σχήματος απεικονίζονται οι τρεις μεταβολές ενός αντιστρεπτού κύκλου, που υφίσταται ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου.

Αν ο όγκος του αερίου στην κατάσταση A είναι 10 L , τότε ο όγκος στην κατάσταση Γ είναι:

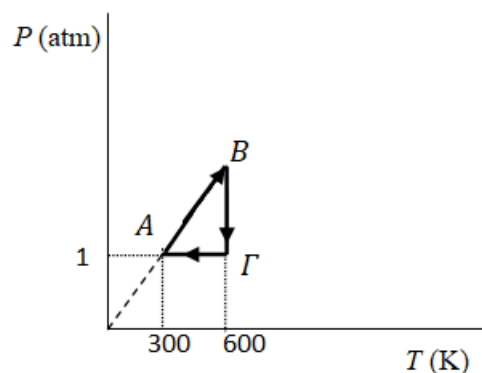
(α) $V_{\Gamma} = 5 \text{ L}$, (β) $V_{\Gamma} = 10 \text{ L}$, (γ) $V_{\Gamma} = 20 \text{ L}$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Κατά τη διάρκεια της μεταβολής $\Gamma \rightarrow A$ η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή.

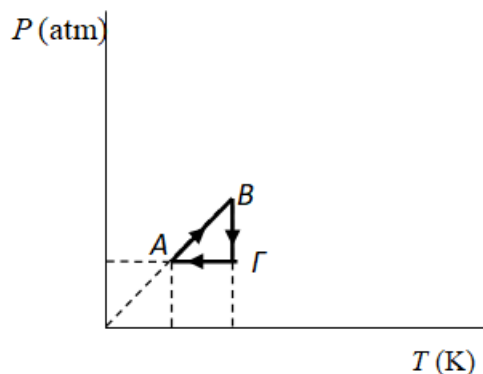
Εφαρμόζουμε το νόμο του Gay-Lussac για την ισοβαρή μεταβολή $\Gamma \rightarrow A$:

$$\frac{V_{\Gamma}}{T_{\Gamma}} = \frac{V_A}{T_A} \Leftrightarrow V_{\Gamma} = V_A \frac{T_{\Gamma}}{T_A} \Rightarrow V_{\Gamma} = (10 \text{ L}) \cdot \frac{600 \text{ K}}{300 \text{ K}} \Rightarrow V_{\Gamma} = 20 \text{ L}.$$

35. (21850) Στο διάγραμμα $P - T$ του σχήματος απεικονίζονται οι τρεις μεταβολές ενός αντιστρεπτού κύκλου που υφίσταται ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου:

A. Να αντιστοιχίσετε τις μεταβολές που αναγράφονται στη στήλη A με τους χαρακτηρισμούς των μεταβολών της στήλης B .

ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
1. AB	α. Ισόχωρη θέρμανση
2. $B\Gamma$	β. Ισοβαρής ψύξη
3. ΓA	γ. Ισόθερμη εκτόνωση
	δ. Ισοβαρής θέρμανση



Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά διάρκεια της μεταβολής AB η πίεση του αερίου αυξάνεται ανάλογα με την απόλυτη θερμοκρασία, άρα ο όγκος του αερίου είναι σταθερός (ισόχωρη μεταβολή).

Αφού η θερμοκρασία αυξάνεται άρα η μεταβολή AB είναι ισόχωρη θέρμανση.

Κατά διάρκεια της μεταβολής $B\Gamma$ η θερμοκρασία του αερίου είναι σταθερή (ισόθερμη μεταβολή).

Στην ισόθερμη μεταβολή ο όγκος του αερίου μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την πίεση.

Αφού η πίεση μειώνεται, ο όγκος του αερίου αυξάνεται άρα η μεταβολή $B\Gamma$ είναι ισόθερμη εκτόνωση.

Κατά διάρκεια της μεταβολής ΓA η πίεση του αερίου είναι σταθερή (ισοβαρής μεταβολή).

Αφού η θερμοκρασία μειώνεται, άρα η μεταβολή ΓA είναι ισοβαρής ψύξη.

Κεφάλαιο 4

Θέματα Β

1. (15889) Κατά την αδιαβατική συμπίεση ποσότητας ιδανικού αερίου, η θερμοκρασία του αερίου:

(α) ελαττώνεται, (β) παραμένει σταθερή, (γ) αυξάνεται

A. Να επιλέξετε την σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην αδιαβατική συμπίεση ο όγκος του αερίου μειώνεται, άρα το έργο του αερίου είναι αρνητικό :

$$\Delta V < 0 \Rightarrow W < 0. \quad (1)$$

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει :

$$\Delta U = -W \xrightarrow{(1)} \Delta U > 0.$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(\Delta T). \quad (2)$$

$$\text{Αφού } \Delta U > 0 \xrightarrow{(2)} \frac{3}{2} nR(\Delta T) > 0 \Leftrightarrow \Delta T > 0 \Leftrightarrow T_{\text{τελ}} > T_{\text{αρχ}}.$$

Άρα η θερμοκρασία του αερίου αυξάνεται.

2. (15891) Θερμική μηχανή απορροφά σε κάθε κύκλο λειτουργίας της θερμότητα 10000 J από τη θερμή δεξαμενή και αποβάλλει ποσό θερμότητας 5000 J στην ψυχρή δεξαμενή. Η απόδοση της μηχανής είναι:

α) 50% , (β) 25% , (γ) 75%

A. **Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.** **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

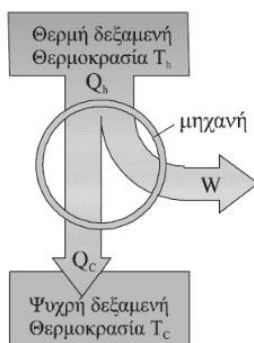
Το ποσό θερμότητας που απορροφά η μηχανή στη διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας είναι $Q_h = 10000 \text{ J}$ και το ποσό θερμότητας που αποβάλλει είναι $|Q_c| = 5000 \text{ J}$.

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι :

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} \Rightarrow e = 1 - \frac{5000 \text{ J}}{10000 \text{ J}} = 1 - 0,5 \Rightarrow e = 0,5.$$

Επομένως, η απόδοση της μηχανής είναι 50%.

3. (15997) Η μαθηματική έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας μιας θερμικής μηχανής, η αρχή λειτουργίας της οποίας, απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα είναι:



(α) $Q_h = Q_c + W$,

(β) $Q_c = Q_h + W$,

(γ) $Q_h = |Q_c| + W$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας η μηχανή απορροφά ποσό θερμότητας Q_h από τη θερμή δεξαμενή, παράγει έργο W και αποβάλλει το υπόλοιπο ποσό θερμότητας Q_c στην ψυχρή δεξαμενή. Αφού η μεταβολή είναι κυκλική, στο τέλος της μεταβολής το αέριο της μηχανής επανέρχεται στην αρχική κατάσταση, άρα : $T_{\text{τελ}} = T_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \Delta T = 0 \Leftrightarrow \Delta U = 0$.

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο της Θερμοδυναμικής για την κυκλική μεταβολή :

$$Q = \Delta U + W \xrightarrow{\Delta U=0} Q = W \Rightarrow Q_h + Q_c = W \Rightarrow Q_h = -Q_c + W. \quad (1)$$

$$\text{Αφού } Q_c < 0 \Leftrightarrow |Q_c| = -Q_c. \quad (2)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει : $Q_h = |Q_c| + W$.

Η σχέση αυτή είναι η μαθηματική έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας κατά τη διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας της θερμικής μηχανής.

4. (15998) Μια ιδανική θερμική μηχανή (μηχανή Carnot) Α έχει απόδοση e_A . Μια άλλη ιδανική θερμική μηχανή (μηχανή Carnot) Β έχει ίδια θερμοκρασία θερμής δεξαμενής με την Α [$T_h(B) = T_h(A)$] και θερμοκρασία ψυχρής δεξαμενής διπλάσια εκείνης της Α [$T_c(B) = 2 T_c(A)$]. Αν η απόδοση της θερμικής μηχανής Β είναι e_B , τότε ισχύει η σχέση:

(α) $e_B = 2e_A - 1$, (β) $e_B = 2e_A + 1$, (γ) $e_A = 2e_B - 1$

Α. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot υπολογίζεται από τη σχέση : $e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h}$.

Μηχανή Α

$$e_A = 1 - \frac{T_{c(A)}}{T_{h(A)}} \Leftrightarrow \frac{T_{c(A)}}{T_{h(A)}} = 1 - e_A \quad (1)$$

Μηχανή Β

$$e_B = 1 - \frac{T_{c(B)}}{T_{h(B)}} \xrightarrow{\frac{T_{c(B)} = 2T_{c(A)}}{T_{h(B)} = T_{h(A)}}} e_B = 1 - \frac{2T_{c(A)}}{T_{h(A)}} \xrightarrow{(1)} e_B = 1 - 2(1 - e_A) \Rightarrow e_B = 2e_A - 1.$$

5. (16047) Μια μηχανή Carnot λειτουργεί ανάμεσα στις θερμοκρασίες $T_h = 500\text{ K}$ και $T_c = 250\text{ K}$. Αν μεταβληθεί η θερμοκρασία T_c της μηχανής με τέτοιο τρόπο ώστε να αυξηθεί ο συντελεστής απόδοσής της κατά 50%, τότε αυτό θα σημαίνει ότι η θερμοκρασία T_c της μηχανής :

(α) μειώθηκε κατά 250 K , (β) μειώθηκε κατά 125 K , (γ) αυξήθηκε κατά 125 K

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αρχικά, ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot είναι :

$$e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{250}{500} \Rightarrow e_c = 0,5.$$

Αφού ο συντελεστής απόδοσης αυξάνεται κατά 50%, ισχύει :

$$e_c' = e_c + 50\%e_c = e_c + 0,5e_c \Leftrightarrow e_c' = 1,5e_c \Rightarrow e_c' = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75.$$

$$e_c' = 1 - \frac{T_c'}{T_h} \Leftrightarrow \frac{T_c'}{T_h} = 1 - e_c' \Leftrightarrow T_c' = T_h(1 - e_c') \Rightarrow T_c' = 500(1 - 0,75) \Rightarrow T_c' = 125\text{ K}.$$

Η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι : $\Delta T_c = T_c' - T_c = 125\text{ K} - 250\text{ K} \Rightarrow \Delta T_c = -125\text{ K}$.

Επομένως, η θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής μειώθηκε κατά 125 K .

6. (16048) Δύο θερμικές μηχανές (1) και (2) έχουν αντίστοιχα συντελεστές απόδοσης e_1 και e_2 .

Η θερμική μηχανή (1) λειτουργεί με απορρόφηση θερμότητας Q_{h1} από τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας και παράγει έργο W_1 . Η θερμική μηχανή (2) λειτουργεί με απορρόφηση θερμότητας Q_{h2} από τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας και παράγει έργο W_2 . Δίνεται ότι για τις θερμότητες Q_{h1} , Q_{h2} και τα έργα W_1 , W_2 των δύο θερμικών μηχανών ισχύουν οι σχέσεις: $Q_{h1} = 2 \cdot Q_{h2}$ και $W_1 = 3 \cdot W_2$.

Για το πηλίκο $\frac{e_1}{e_2}$ των συντελεστών απόδοσης των δύο μηχανών ισχύει η σχέση:

(α) $\frac{e_1}{e_2} = \frac{3}{2}$, (β) $\frac{e_1}{e_2} = 1$, (γ) $\frac{e_1}{e_2} = \frac{2}{3}$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής υπολογίζεται από τη σχέση : $e = \frac{W}{Q_h}$.

Θερμική μηχανή (2)

$$e_2 = \frac{W_2}{Q_{h(2)}} , \quad (1)$$

Θερμική μηχανή (1)

$$e_1 = \frac{W_1}{Q_{h(1)}} = \frac{3W_2}{2Q_{h(2)}} \xrightarrow{(1)} e_1 = \frac{3}{2} e_2 \Leftrightarrow \frac{e_1}{e_2} = \frac{3}{2} .$$

7. (16063) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού, μονοατομικού, αερίου θερμαίνεται κατά ΔT (όπου ΔT η μεταβολή της θερμοκρασίας) με δύο τρόπους: διατηρώντας σταθερό τον όγκο του (αντιστρεπτή ισόχωρη θέρμανση) και διατηρώντας σταθερή την πίεσή του (αντιστρεπτή ισοβαρή θέρμανση). Αν Q_V και Q_P είναι τα ποσά της θερμότητας που πρέπει να απορροφήσει η συγκεκριμένη ποσότητα του ιδανικού μονοατομικού αερίου, για να θερμανθεί κατά ΔT , κατά την αντιστρεπτή ισόχωρη και κατά την αντιστρεπτή ισοβαρή θέρμανση αντίστοιχα, τότε:

$$(α) \quad \frac{Q_p}{Q_v} = \frac{3}{5}, \quad (β) \quad \frac{Q_p}{Q_v} = \frac{5}{3}, \quad (γ) \quad \frac{Q_p}{Q_v} = 1.$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $\Delta U = \frac{3}{2} nR(\Delta T)$.

Στην ισόχωρη θέρμανση το αέριο δεν παράγει έργο : $W_V = 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει : $Q_V = \Delta U \Rightarrow Q_V = \frac{3}{2} nR(\Delta T)$. (1)

Στην ισοβαρή θέρμανση, το έργο του αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $W_p = nR(\Delta T)$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει :

$$Q_p = \Delta U + W_p = \frac{3}{2} nR(\Delta T) + nR(\Delta T) \Rightarrow Q_p = \frac{5}{2} nR(\Delta T). \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{Q_p}{Q_v} = \frac{\frac{5}{2} nR(\Delta T)}{\frac{3}{2} nR(\Delta T)} \Leftrightarrow \frac{Q_p}{Q_v} = \frac{5}{3}.$$

8. (16065) Θερμική μηχανή λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών $T_h = 350\text{ K}$ (θερμοκρασία θερμής δεξαμενής) και $T_c = 300\text{ K}$ (θερμοκρασία ψυχρής δεξαμενής) και έχει απόδοση ίση με το 50% της απόδοσης της ιδανικής θερμικής μηχανής (θερμική μηχανή Carnot), που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών. Για το λόγο $\frac{|Q_c|}{Q_h}$ της θερμικής μηχανής ισχύει:

(α) $\frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{14}{13}$, (β) $\frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{13}{14}$, (γ) $\frac{|Q_c|}{Q_h} = 1$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot η οποία λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών T_c , T_h είναι : $e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300}{350} \Rightarrow e_c = \frac{1}{7}$.

Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι : $e = 50\% \cdot e_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \Leftrightarrow e = \frac{1}{14}$.

Ισχύει : $e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} \Leftrightarrow \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - e \Rightarrow \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - \frac{1}{14} \Rightarrow \frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{13}{14}$.

9. (16096) Θερμική μηχανή παράγει, σε κάθε κύκλο λειτουργίας της, ωφέλιμο έργο 2000J και απορροφά από το περιβάλλον θερμότητα 8000J. Η απόδοση της μηχανής είναι:

(α) 25%.

(β) 33%.

(γ) 50%.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι : $e = \frac{W}{Q_h} = \frac{2000 \text{ J}}{8000 \text{ J}} \Rightarrow e = 0,25$.

Επομένως, η απόδοση της μηχανής είναι 25%.

10. (16105) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι έχει επινοήσει θεωρητικά μια μηχανή Carnot με πολύ μικρή απόδοση, γύρω στο 1%, τόσο μικρή που ακόμη και η απόδοση της μηχανής ενός πολύ παλιού αυτοκινήτου να είναι μεγαλύτερη.

(α) Ο μαθητής έχει δίκιο, διότι κάθε μηχανή Carnot έχει τη μικρότερη απόδοση από οποιαδήποτε άλλη.

(β) Ο μαθητής έχει απολύτως άδικο. Κάθε μηχανή Carnot έχει πάντα μεγαλύτερη απόδοση από κάθε άλλη θερμική μηχανή.

(γ) Ο μαθητής έχει δίκιο, μπορεί να υπάρξει μηχανή Carnot η οποία να έχει απόδοση μικρότερη από κάποια άλλη θερμική μηχανή, ακόμη κι από μια μηχανή πολύ κακής απόδοσης.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η μηχανή Carnot έχει τη μεγαλύτερη (θεωρητική) απόδοση από κάθε άλλη θερμική μηχανή που λειτουργεί ανάμεσα στις ίδιες θερμοκρασίες.

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot η οποία λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών T_c , T_h

είναι : $e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h}$, δηλαδή εξαρτάται από το πηλίκο των θερμοκρασιών $\frac{T_c}{T_h}$.

Αν $T_c \cong T_h$, τότε $\frac{T_c}{T_h} \cong 1$ και ο συντελεστής απόδοσης είναι πολύ μικρός ($e \cong 0$).

π.χ. έστω ότι $T_h = 400\text{ K}$ και $T_c = 396\text{ K}$. Τότε :

$$e_c = \frac{T_h - T_c}{T_h} = \frac{(400 - 396)\text{ K}}{400\text{ K}} = \frac{4}{400} = 0,01, \text{ δηλαδή η μηχανή έχει απόδοση } 1\%.$$

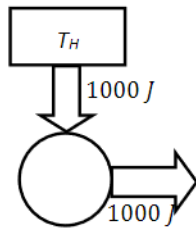
Οι σύγχρονες μηχανές εσωτερικής καύσης έχουν απόδοση 20% – 40%.

Επομένως, είναι δυνατό μία θερμική μηχανή να έχει μεγαλύτερη απόδοση από μία μηχανή Carnot, με την προϋπόθεση ότι το πηλίκο των θερμοκρασιών $\frac{T_c'}{T_h'}$ της θερμικής μηχανής να είναι αρκετά μικρότερο από

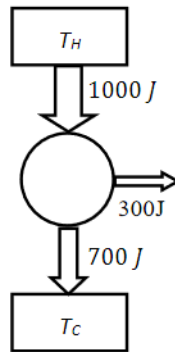
το αντίστοιχο πηλίκο $\frac{T_c}{T_h}$ της μηχανής Carnot.

Σωστή απάντηση : (γ).

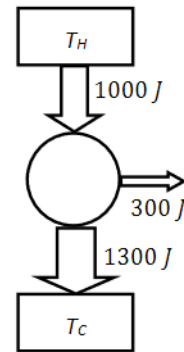
11. (16106) Στα παρακάτω διαγράμματα ο κύκλος παριστάνει τη θερμική μηχανή.



I.



II.



III.

Το διάγραμμα που αναπαριστά σωστά μια θερμική μηχανή είναι το:

(α) I (β) II (γ) III

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας, η θερμική μηχανή απορροφά ποσό θερμότητας Q_h από τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας T_h , παράγει έργο W και αποβάλλει το υπόλοιπο ποσό θερμότητας $|Q_c|$ στη δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας T_c .

Με εφαρμογή του 1ου νόμου της θερμοδυναμικής, προκύπτει η σχέση :

$$Q_h = |Q_c| + W \quad \text{ή} \quad W = Q_h - |Q_c|. \quad (1)$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο της θερμοδυναμικής, για κάθε θερμική μηχανή ισχύει :

$$W < Q_h \quad \text{ή} \quad e = \frac{W}{Q_h} < 1.$$

Για το διάγραμμα (I) ισχύει : $Q_h = W$, άρα $e = 1$ (αδύνατο, γιατί παραβιάζεται ο 2ος νόμος της θερμοδυναμικής για τις θερμικές μηχανές).

Για το διάγραμμα (II) ισχύει : $W + |Q_c| = 300 \text{ J} + 700 \text{ J} = 1000 \text{ J} \Rightarrow W + |Q_c| = Q_h$.

Επομένως, το διάγραμμα (II) αναπαριστά μία θερμική μηχανή.

Για το διάγραμμα (III) ισχύει : $W + |Q_c| = 300 \text{ J} + 1300 \text{ J} = 1600 \text{ J} \Rightarrow W + |Q_c| > Q_h$. (αδύνατο, γιατί παραβιάζεται ο 1ος νόμος της θερμοδυναμικής)

12. (16107) Προσφέρουμε ένα ποσό θερμότητας σε ένα ιδανικό αέριο. Τότε:

(α) Η θερμοκρασία του αερίου μειώνεται πάντα.

(β) Υπάρχει περίπτωση να μειωθεί η θερμοκρασία του αερίου.

(γ) Δεν υπάρχει περίπτωση να μειωθεί η θερμοκρασία του αερίου.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $\Delta U = \frac{3}{2} nR(\Delta T)$.

Αν μειωθεί η εσωτερική ενέργεια του αερίου ($\Delta U < 0$) τότε θα μειωθεί και η θερμοκρασία του ($\Delta T < 0$).

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$Q = \Delta U + W \Leftrightarrow \Delta U = Q - W.$$

Για να είναι $\Delta U < 0$, πρέπει $Q - W < 0$ ή $W > Q$.

Δηλαδή, στη διάρκεια της μεταβολής το αέριο πρέπει να μετατρέψει τη θερμότητα που απορρόφησε και ένα τμήμα της εσωτερικής ενέργειας σε μηχανική ενέργεια.

Αυτό θα μπορούσε να συμβεί (θεωρητικά) σε κάποια μεταβολή.

Σωστή απάντηση : (β).

Σημείωση

Δεν υπάρχει αντιστρεπτή μεταβολή στην οποία το αέριο να απορροφήσει θερμότητα ($Q > 0$) και να μειωθεί η θερμοκρασία του, δηλαδή να ισχύει : $\Delta T < 0$ και $Q < W$.

π.χ. στην ισόθερμη εκτόνωση είναι : $\Delta T = 0$ και $Q = W$.

στην ισοβαρή εκτόνωση είναι : $\Delta T > 0$ και $Q > W$.

Οι προηγούμενες συνθήκες ($Q > 0$ και $\Delta T < 0$) μπορούν να ικανοποιηθούν στις επόμενες περιπτώσεις :

1) Σε μία μη αντιστρεπτή μεταβολή

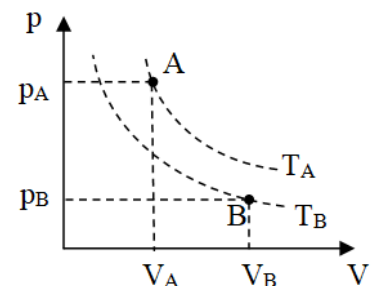
π.χ. στη μη αντιστρεπτή εκτόνωση $A \rightarrow B$ του διπλανού σχήματος.

Το αέριο απορροφά ποσό θερμότητας Q και παράγει έργο W .

Αφού η θερμοκρασία μειώνεται, άρα : $\Delta U < 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$Q = \Delta U + W \xrightarrow{\Delta U < 0} Q < W.$$



2) Με συνδυασμό δύο (ή περισσότερων) αντιστρεπτών μεταβολών

π.χ. με μία ισόθερμη εκτόνωση $A \rightarrow \Gamma$ και μία αδιαβατική εκτόνωση $\Gamma \rightarrow B$ (επόμενο σχήμα).

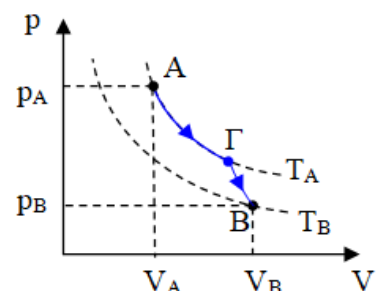
Στην ισόθερμη εκτόνωση $A \rightarrow \Gamma$ είναι : $T_\Gamma = T_A$.

Στην αδιαβατική εκτόνωση $\Gamma \rightarrow B$ είναι : $T_B < T_\Gamma \Rightarrow T_B < T_A$.

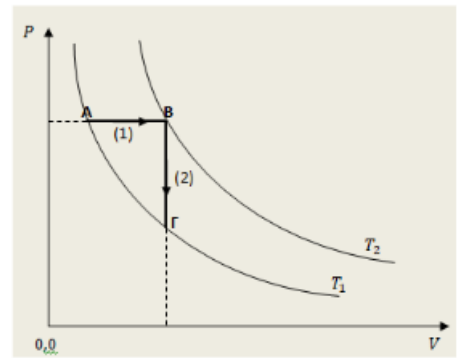
Επομένως : $\Delta U_{A\Gamma B} < 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$Q_{A\Gamma B} = \Delta U_{A\Gamma B} + W_{A\Gamma B} \xrightarrow{\Delta U_{A\Gamma B} < 0} Q_{A\Gamma B} < W_{A\Gamma B}.$$



13. (16117) Στο διάγραμμα πίεσης-όγκου ($P - V$), αποδίδονται δύο αντιστρεπτές μεταβολές, ορισμένης ποσότητας ιδανικού μονοατομικού αερίου. Η ισοβαρής αντιστρεπτή θέρμανση AB (μεταβολή (1)), από αρχική θερμοκρασία T_1 μέχρι θερμοκρασία T_2 και η ισόχωρη αντιστρεπτή ψύξη BΓ (μεταβολή (2)), από τη θερμοκρασία T_2 , μέχρι την αρχική θερμοκρασία T_1 .



Αν είναι Q_2 η θερμότητα που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον κατά την ισόχωρη ψύξη (μεταβολή (2)), τότε για τη θερμότητα Q_1 που ανταλλάσσει στην ισοβαρή θέρμανση (μεταβολή (1)), ισχύει:

(α) $Q_1 = Q_2$, (β) $Q_1 = -Q_2$, (γ) $Q_1 = -\frac{5}{3}Q_2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ισοβαρής εκτόνωση $A \rightarrow B$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1).$$

Το έργο του αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $W_1 = nR(T_2 - T_1)$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει :

$$Q_1 = \Delta U_1 + W_1 = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1) \Rightarrow Q_1 = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Ισόχωρη ψύξη $B \rightarrow \Gamma$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta U_2 = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2).$$

Το αέριο δεν παράγει έργο : $W_2 = 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει :

$$Q_2 = \Delta U_2 \Rightarrow Q_2 = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) \quad \text{ή} \quad Q_2 = -\frac{3}{2} nR(T_2 - T_1). \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)}{-\frac{3}{2} nR(T_2 - T_1)} \Leftrightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow Q_1 = -\frac{5}{3} Q_2.$$

14. (16206) Η απόδοση θερμικής μηχανής Carnot είναι 40 % και η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής της είναι 227°C . Η θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής είναι :

(α) 0°C , (β) 27°C , (γ) 300°C

A. Να επιλέξετε τη ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η απόλυτη θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής είναι : $T_h = (273 + 227)\text{K} = 500\text{K}$.

Αφού η απόδοση της μηχανής είναι 40%, ο συντελεστής απόδοσης είναι : $e_c = 0,4$.

Από τη σχέση του συντελεστή απόδοσης της μηχανής Carnot υπολογίζουμε την απόλυτη θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής T_c :

$$e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} \Leftrightarrow \frac{T_c}{T_h} = 1 - e_c \Leftrightarrow T_c = (1 - e_c)T_h \Rightarrow T_c = (1 - 0,4) \cdot 500\text{K} \Rightarrow T_c = 300\text{K}.$$

$$\text{Ισχύει : } T_c = 273 + \theta_c \Leftrightarrow \theta_c = T_c - 273 \Rightarrow \theta_c = (300 - 273)^{\circ}\text{C} \Rightarrow \theta_c = 27^{\circ}\text{C}.$$

15. (16227) Δύο ιδανικές (υποθετικές) μηχανές Carnot (1) και (2), λειτουργούν μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών $T_1 = T_1' = T_h$ (θερμή δεξαμενή) και $T_2 = T_2' = T_c$ (ψυχρή δεξαμενή). Κατά την ισόθερμη αντιστρεπτή εκτόνωση της μηχανής (1), το αέριο απορροφά θερμότητα Q_1 , ενώ κατά την ισόθερμη αντιστρεπτή εκτόνωση της μηχανής (2), το αέριο απορροφά θερμότητα Q_2 . Δίνεται ότι για αυτά τα ποσά θερμότητας ισχύει η σχέση: $Q_2 = 2 Q_1$. Αν W_1 είναι το ωφέλιμο μηχανικό έργο που παράγεται από τη μηχανή (1) ανά κύκλο λειτουργίας της και W_2 το ωφέλιμο μηχανικό έργο που παράγεται από τη μηχανή (2) ανά κύκλο λειτουργίας της, ισχύει η σχέση:

(α) $W_1 = 2 W_2$, (β) $W_2 = 2 W_1$, (γ) $W_1 = W_2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot υπολογίζεται από τη σχέση: $e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h}$.

Αφού $T_{c(1)} = T_{c(2)}$ και $T_{h(1)} = T_{h(2)}$, άρα: $e_1 = e_2$. (1)

Σε ένα κύκλο Carnot το αέριο απορροφά θερμότητα μόνο κατά τη διάρκεια της ισόθερμης εκτόνωσης,

άρα: $Q_{h(1)} = Q_1$, $Q_{h(2)} = Q_2$.

Μηχανή (1)

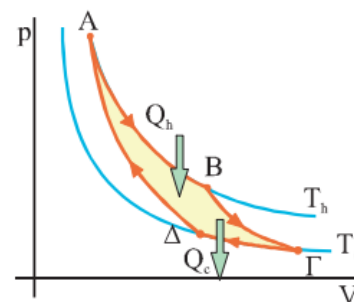
$$e_1 = \frac{W_1}{Q_{h(1)}} \Rightarrow e_1 = \frac{W_1}{Q_1} \quad (2)$$

Μηχανή (2)

$$e_2 = \frac{W_2}{Q_{h(2)}} \Rightarrow e_2 = \frac{W_2}{Q_2} \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε από τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1):

$$\frac{W_1}{Q_1} = \frac{W_2}{Q_2} \xrightarrow{Q_2 = 2Q_1} \frac{W_1}{Q_1} = \frac{W_2}{2Q_1} \Rightarrow W_2 = 2W_1.$$



16. (16245) Μια θερμική μηχανή απορροφά θερμότητα $Q_h = 1000 \text{ J}$ από μια θερμή δεξαμενή θερμοκρασίας $T_h = 400 \text{ K}$. Η μηχανή αυτή θα μπορεί να αποβάλλει, σε μια ψυχρή δεξαμενή θερμοκρασίας $T_c = 300 \text{ K}$, θερμότητα
 (α) μικρότερη ή ίση με 500 J , (β) ανάμεσα σε 501 και 749 J , (γ) 750 J ή μεγαλύτερη .
 Α. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι : $e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h}$. (1)

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot η οποία λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών T_c , T_h είναι : $e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300}{400} \Rightarrow e_c = 0,25$.

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot είναι ο μέγιστος συντελεστής απόδοσης για οποιαδήποτε θερμική μηχανή που λειτουργεί μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών T_c , T_h με τη μηχανή Carnot.

Επομένως ισχύει :

$$e \leq e_c \xrightarrow{(1)} 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} \leq 0,25 \Leftrightarrow \frac{|Q_c|}{Q_h} \geq 0,75 \Leftrightarrow |Q_c| \geq 0,75 \cdot Q_h \Rightarrow |Q_c| \geq 750 \text{ J}.$$

Σωστή απάντηση : (γ).

17. (16299) Ποσότητα μονοατομικού ιδανικού αερίου, που βρίσκεται σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας A, πρόκειται να μεταβεί στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας B, στην οποία η πίεση και ο όγκος έχουν μεγαλύτερη τιμή από ότι στην κατάσταση A. Η μεταβολή του αερίου από την κατάσταση A στη B μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους, εκτελώντας σε κάθε περίπτωση διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές. Με τον πρώτο τρόπο οι διαδοχικές μεταβολές είναι ισοβαρής-ισόχωρη, ενώ με το δεύτερο τρόπο ισόχωρη-ισοβαρής. Οι ενέργειες που μεταφέρονται από το αέριο στο περιβάλλον μέσω του έργου που παράγει είναι

(α) ίσες και με τους δύο τρόπους.

(β) μεγαλύτερη με τον πρώτο τρόπο.

(γ) μεγαλύτερη με το δεύτερο τρόπο.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σχεδιάζουμε σε άξονες $p - V$ τις μεταβολές AΓB (μεταβολή 1) και AΔB (μεταβολή 2).

Μεταβολή $A \rightarrow \Gamma \rightarrow B$ (ισοβαρής – ισόχωρη)

$$W_1 = W_{A\Gamma} + W_{\Gamma B} = p_A(V_B - V_A) + 0 \Rightarrow$$

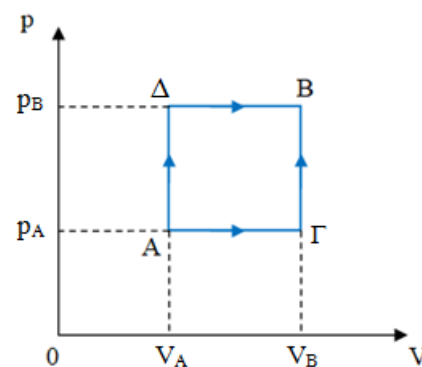
$$W_1 = p_A(V_B - V_A). \quad (1)$$

Μεταβολή $A \rightarrow \Delta \rightarrow B$ (ισόχωρη – ισοβαρής)

$$W_2 = W_{A\Delta} + W_{\Delta B} = 0 + p_B(V_B - V_A) \Rightarrow W_2 = p_B(V_B - V_A). \quad (2)$$

$$\text{Αφού } p_B > p_A \xrightarrow{(1),(2)} W_2 > W_1.$$

Σωστή απάντηση : (γ).



18. (16707) Διαθέτουμε μια θερμική μηχανή (1), η οποία έχει συντελεστή απόδοσης e_1 . Κατά τη λειτουργία της θερμικής μηχανής (1) προσφέρουμε σ' αυτή θερμότητα Q_{h1} , οπότε το ωφέλιμο έργο που αυτή παράγει είναι W_1 .

Μια δεύτερη θερμική μηχανή (2) έχει συντελεστή απόδοσης e_2 . Κατά τη λειτουργία της θερμικής μηχανής (2) προσφέρουμε σ' αυτή θερμότητα διπλάσια απ' αυτή που προσφέραμε στη μηχανή (1) και τότε αυτή παράγει τετραπλάσιο ωφέλιμο έργο, απ' αυτό που παράγει η μηχανή (1).

Για τους συντελεστές απόδοσης e_1 και e_2 των δύο θερμικών μηχανών ισχύει:

$$(α) e_2 = 2 \cdot e_1, \quad (β) e_2 = e_1, \quad (γ) e_2 = \frac{e_1}{2}.$$

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής υπολογίζεται από τη σχέση : $e = \frac{W}{Q_h}$.

Θερμική μηχανή (1)

$$e_1 = \frac{W_1}{Q_{h(1)}}, \quad (1)$$

Θερμική μηχανή (2)

$$e_2 = \frac{W_2}{Q_{h(2)}} = \frac{4W_1}{2Q_{h(1)}} = 2 \cdot \frac{W_1}{Q_{h(1)}} \xrightarrow{(1)} e_2 = 2e_1.$$

19. (16708) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι μπορεί να κατασκευάσει μια θερμική μηχανή η οποία λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών $T_c = 300\text{ K}$ και $T_h = 600\text{ K}$. Ο μαθητής ισχυρίζεται επίσης ότι το έργο το οποίο μπορεί να αποδώσει η μηχανή σε ένα κύκλο έχει τιμή τριπλάσια από την τιμή του Q_c . Πιστεύετε, ότι είναι δυνατόν να κατασκευαστεί μια θερμική μηχανή με τα παραπάνω χαρακτηριστικά;

(α) Ναι, μπορεί να κατασκευαστεί.

(β) Όχι, δεν μπορεί να κατασκευαστεί.

(γ) Δεν επαρκούν τα δεδομένα για ν' απαντήσουμε.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Με βάση τον ισχυρισμό του μαθητή ότι $W = 3|Q_c|$ και τη σχέση $Q_h = W + |Q_c|$, προκύπτει η σχέση :
 $Q_h = 4|Q_c|$.

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής θα ήταν :

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{3|Q_c|}{4|Q_c|} = \frac{3}{4} \Rightarrow e = 0,75.$$

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot η οποία θα λειτουργούσε μεταξύ των θερμοκρασιών $T_c = 300\text{ K}$ και $T_h = 600\text{ K}$ θα ήταν :

$$e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300}{600} \Rightarrow e_c = 0,5.$$

Παρατηρούμε ότι : $e > e_c$, άτοπο, αφού σύμφωνα με το θεώρημα του Carnot δεν μπορεί η απόδοση μιας θερμικής μηχανής να υπερβαίνει την απόδοση της μηχανής Carnot η οποία λειτουργεί ανάμεσα στις ίδιες ακραίες θερμοκρασίες.

Άρα η μηχανή αυτή δεν μπορεί να κατασκευαστεί.

20. (16710) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου μεταβαίνει μέσω αντιστρεπτής μεταβολής από όγκο V_0 σε διπλάσιο όγκο. Η μεταβολή αυτή, η οποία οδηγεί στο διπλασιασμό του όγκου, μπορεί να είναι είτε ισόθερμη, είτε ισοβαρή.

(α) Το έργο στην ισόθερμη είναι ίσο με το έργο στην ισοβαρή.

(β) Το έργο στην ισόθερμη είναι μικρότερο από το έργο στην ισοβαρή.

(γ) Το έργο στην ισόθερμη είναι μεγαλύτερο από το έργο στην ισοβαρή.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Σχεδιάζουμε σε άξονες $p - V$ το διάγραμμα μιας ισοβαρούς εκτόνωσης $A \rightarrow B$ και μιας ισόθερμης εκτόνωσης $A \rightarrow \Gamma$ από αρχικό όγκο V_0 σε τελικό όγκο $2V_0$.

Η απόλυτη τιμή του έργου του αερίου σε κάθε μεταβολή είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό που περικλείεται από το αντίστοιχο διάγραμμα και τον άξονα του όγκου.

Αφού οι μεταβολές είναι εκτονώσεις, τα έργα είναι θετικά.

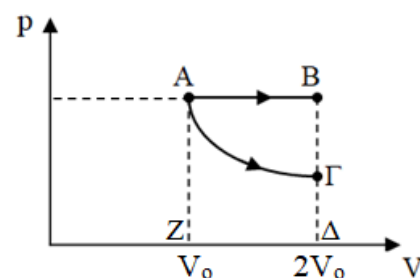
Επομένως :

$$W_{AB} = E_{AB\Delta Z}$$

$$W_{A\Gamma} = E_{A\Gamma\Delta Z}$$

$$\text{Ισχύει : } E_{A\Gamma\Delta Z} < E_{AB\Delta Z} \Rightarrow W_{A\Gamma} < W_{AB} .$$

Σωστή απάντηση : (β).



21. (16711) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου τοποθετείται σε οριζόντιο κυλινδρικό δοχείο που έχει τη μία του βάση ακλόνητη ενώ η άλλη φράσσεται με έμβολο που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές και θερμαίνεται ισοβαρώς. Η θερμότητα που μεταβιβάζεται στο αέριο είναι 500 J ενώ η εσωτερική του ενέργεια αυξάνεται κατά 400 J. Στο έμβολο ασκείται δύναμη 2000 N από το αέριο.

Το έμβολο μετατοπίζεται κατά

(α) 5 cm,

(β) 5 mm,

(γ) 0,05 cm.

A. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Με εφαρμογή του 1ου νόμου της θερμοδυναμικής, υπολογίζουμε το έργο που παράγει το αέριο :

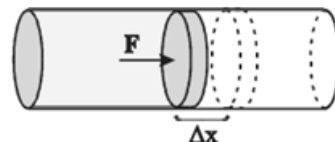
$$W = Q - \Delta U = 500 \text{ J} - 400 \text{ J} \Rightarrow W = 100 \text{ J}.$$

Αφού η δύναμη που ασκεί το αέριο στο έμβολο είναι σταθερή, το έργο της υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W = F(\Delta x).$$

Επομένως :

$$\Delta x = \frac{W}{F} = \frac{100 \text{ J}}{2000 \text{ N}} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{20} \text{ m} = 0,05 \text{ m} \quad \text{ή} \quad \Delta x = 5 \text{ cm}.$$



22. (16733) Μία θερμική μηχανή λειτουργεί σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα, το οποίο απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα. Η θερμή δεξαμενή βρίσκεται σε θερμοκρασία T_h και η ψυχρή δεξαμενή βρίσκεται σε θερμοκρασία $T_c < T_h$, με $T_c > 0\text{ K}$. Αν η θερμική μηχανή απορροφά θερμότητα Q_h από την θερμή δεξαμενή, αποβάλλει θερμότητα Q_c στην ψυχρή δεξαμενή και παράγει έργο W , τότε

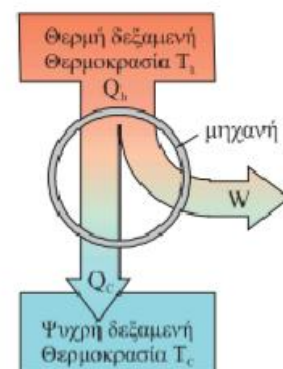
- (α) το ποσό θερμότητας Q_h είναι πάντα μεγαλύτερο από το ποσό θερμότητας $|Q_c|$.
 (β) το ποσό θερμότητας Q_h είναι πάντα μικρότερο από το ποσό θερμότητας $|Q_c|$.
 (γ) το ποσό θερμότητας Q_h είναι πάντα ίσο με το ποσό θερμότητας $|Q_c|$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Αφού η μεταβολή είναι κυκλική, στο τέλος της μεταβολής το αέριο της μηχανής επανέρχεται στην αρχική κατάσταση, άρα : $T_{\text{τελ}} = T_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \Delta T = 0 \Leftrightarrow \Delta U = 0$.

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο της Θερμοδυναμικής για την κυκλική μεταβολή :

$$Q = \Delta U + W \xrightarrow{\Delta U = 0} Q = W \Rightarrow Q_h + Q_c = W. \quad (1)$$

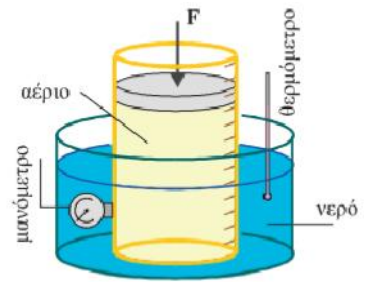
$$\text{Αφού } Q_c < 0 \Leftrightarrow |Q_c| = -Q_c \text{ ή } Q_c = -|Q_c|. \quad (2)$$

$$\text{Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει : } Q_h - |Q_c| = W. \quad (3)$$

Αφού η μηχανή παράγει έργο, άρα $W > 0$.

Από τη σχέση (3) συμπεραίνουμε ότι : $Q_h > |Q_c|$.

23. (16735) Ποσότητα αερίου βρίσκεται μέσα σε ογκομετρικό δοχείο. Το δοχείο με το αέριο περιβάλλεται από λουτρό με νερό του οποίου η θερμοκρασία διατηρείται σταθερή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο δοχείο υπάρχει προσαρμοσμένο μανόμετρο για τη μέτρηση της πίεσης του αερίου. Ασκώντας κατάλληλη δύναμη διπλασιάζουμε την ένδειξη του μανομέτρου. Τότε



- (α) η θερμοκρασία του αερίου θα διπλασιαστεί.
- (β) ο όγκος του αερίου θα υποδιπλασιαστεί.
- (γ) η εσωτερική ενέργεια του αερίου μειώνεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αφού το δοχείο περιβάλλεται από λουτρό με νερό σταθερής θερμοκρασίας, η θερμοκρασία του αερίου στο δοχείο παραμένει σταθερή.

Άρα το αέριο εκτελεί ισόθερμη μεταβολή.

Το μανόμετρο μετρά την πίεση του αερίου. Αφού η ένδειξή του διπλασιάζεται άρα στο τέλος της μεταβολής έχει διπλασιαστεί η πίεση του αερίου : $p_2 = 2p_1$. (1)

Εφαρμόζουμε το νόμο του Boyle : $p_1 V_1 = p_2 V_2 \xrightarrow{(1)} p_1 V_1 = 2p_1 V_2 \Leftrightarrow V_1 = 2V_2 \Leftrightarrow V_2 = \frac{V_1}{2}$.

Επομένως, ο όγκος του αερίου θα υποδιπλασιαστεί.

24. (16867) Το ιδανικό αέριο μιας θερμικής μηχανής εκτελεί το θερμοδυναμικό κύκλο που φαίνεται στο διάγραμμα του διπλανού σχήματος και αποτελείται από δύο ισόθερμες και δύο ισοβαρείς μεταβολές. Αν μια μηχανή Carnot λειτουργούσε μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών T_1, T_2 με τον κύκλο αυτό, θα είχε συντελεστή απόδοσης $e = 0,5$.

Αν γνωρίζετε ότι για το αέριο στο δεδομένο κύκλο είναι $V_B = V_\Delta$, όπως φαίνεται και στο σχήμα, τότε ισχύει:

(α) $V_\Gamma = 3V_A$,

(β) $V_\Gamma = 4V_A$,

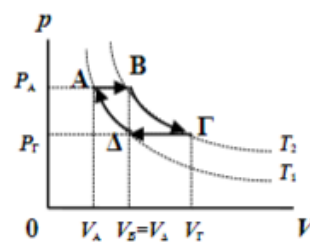
(γ) $V_\Gamma = 6V_A$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Από τον συντελεστή απόδοσης της μηχανής Carnot προκύπτει :

$$e = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = 1 - e \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 0,5 \quad \text{ή} \quad \frac{T_2}{T_1} = 2. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Gay-Lussac στις ισοβαρείς μεταβολές.

Ισοβαρής εκτόνωση $A \rightarrow B$

$$\frac{V_B}{T_2} = \frac{V_A}{T_1} \Leftrightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow{(1)} \frac{V_B}{V_A} = 2 \Rightarrow V_B = 2V_A. \quad (2)$$

Ισοβαρής συμπίεση $\Gamma \rightarrow \Delta$

$$\frac{V_\Gamma}{T_2} = \frac{V_\Delta}{T_1} \xrightarrow{V_\Delta = V_B} \frac{V_\Gamma}{V_B} = \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow{(1)} \frac{V_\Gamma}{V_B} = 2 \Rightarrow V_\Gamma = 2V_B \xrightarrow{(2)} V_\Gamma = 2 \cdot 2V_A \Rightarrow V_\Gamma = 4V_A.$$

25. (16869) Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής Carnot είναι $e = 0,75$.

Αν διατηρήσουμε σταθερή τη θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής (T_c) της μηχανής, για να μειώσουμε το συντελεστή απόδοσης σε $e' = 0,5$ πρέπει:

(α) να αυξήσουμε τη θερμοκρασία (T_h) της θερμής δεξαμενής κατά 50%.

(β) να ελαττώσουμε τη θερμοκρασία (T_h) της θερμής δεξαμενής κατά 50%.

(γ) να αυξήσουμε τη θερμοκρασία (T_h) της θερμής δεξαμενής κατά 75%.

A. Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

1η περίπτωση

$$e = 1 - \frac{T_c}{T_h} \Leftrightarrow \frac{T_c}{T_h} = 1 - e \Rightarrow \frac{T_c}{T_h} = 1 - 0,75 \Rightarrow \frac{T_c}{T_h} = 0,25 \Rightarrow T_h = 4T_c. \quad (1)$$

2η περίπτωση

$$e' = 1 - \frac{T_c}{T_h'} \Leftrightarrow \frac{T_c}{T_h'} = 1 - e' \Rightarrow \frac{T_c}{T_h'} = 1 - 0,5 \Rightarrow \frac{T_c}{T_h'} = 0,5 \Rightarrow T_h' = 2T_c. \quad (2)$$

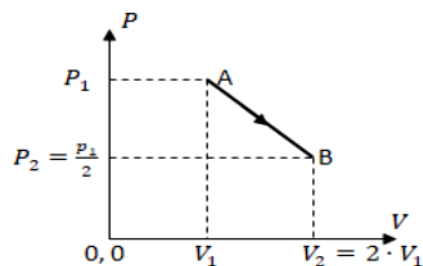
$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : } T_h' = 0,5T_h. \quad (3)$$

Το ποσοστό μεταβολής της απόλυτης θερμοκρασίας της θερμής δεξαμενής είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{T_h' - T_h}{T_h} \cdot 100\% \xrightarrow{(3)} \Pi(\%) = \frac{0,5T_h - T_h}{T_h} \cdot 100\% = \frac{-0,5T_h}{T_h} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -50\%.$$

Επομένως, πρέπει να μειώσουμε την απόλυτη θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής κατά 50%.

26. (18913) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου, βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας με όγκο V_1 και πίεση p_1 (κατάσταση Α). Με μια αντιστρεπτή εκτόνωση το αέριο μεταβαίνει σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας με όγκο $V_2 = 2 \cdot V_1$ και πίεση $p_2 = \frac{p_1}{2}$ (κατάσταση Β).



Στο διάγραμμα πίεσης-όγκου αποδίδονται οι καταστάσεις ισορροπίας Α και Β του αερίου και η αντιστρεπτή μεταβολή (ΑΒ). Κατά τη διάρκεια της αντιστρεπτής μεταβολής (ΑΒ), το αέριο απορροφά θερμότητα Q από το περιβάλλον, η οποία είναι ίση με:

$$(\alpha) \quad Q = p_1 \cdot V_1, \quad (\beta) \quad Q = \frac{1}{2} \cdot p_1 \cdot V_1, \quad (\gamma) \quad Q = \frac{3}{4} \cdot p_1 \cdot V_1.$$

Α. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου είναι :

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} (nRT_2 - nRT_1) = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2} \left(\frac{p_1}{2} \cdot 2V_1 - p_1 V_1 \right) \Rightarrow \Delta U = 0. \quad (1)$$

Η απόλυτη τιμή του έργου που παράγει το αέριο είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα $p - V$:

$$|W| = E_{\text{τραπ}} = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{p_1 + \frac{p_1}{2}}{2} \cdot (2V_1 - V_1) \Rightarrow |W| = \frac{3}{4} p_1 V_1.$$

$$\text{Αφού το αέριο εκτονώνεται, το έργο είναι θετικό άρα : } W = \frac{3}{4} p_1 V_1. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$Q = \Delta U + W \xrightarrow{(1),(2)} Q = \frac{3}{4} p_1 V_1.$$

27. (19227) Μία θερμική μηχανή Carnot έχει συντελεστή απόδοσης $e_c = 0,5$ και η θερμή δεξαμενή της έχει θερμοκρασία 600 K . Εάν γνωρίζετε ότι το ποσό θερμότητας που απορροφά η μηχανή από τη θερμή δεξαμενή ανά κύκλο λειτουργίας της είναι 1500 J ,

A. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$T_c\text{ (K)}$	$W\text{ (J)}$	$ Q_c \text{ (J)}$	$Q_h\text{ (J)}$
			1500

Μονάδες 6

B. Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας στην συμπλήρωση του πίνακα.

Μονάδες 6

Απάντηση

Από τον συντελεστή απόδοσης της μηχανής Carnot υπολογίζουμε την απόλυτη θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής :

$$e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} \Leftrightarrow \frac{T_c}{T_h} = 1 - e_c \Leftrightarrow T_c = (1 - e_c) \cdot T_h \Rightarrow T_c = 0,5 \cdot 600\text{ K} \Rightarrow T_c = 300\text{ K}.$$

Από τον ορισμό του συντελεστή απόδοσης θερμικής μηχανής υπολογίζουμε το έργο που παράγει η μηχανή σε ένα κύκλο :

$$e_c = \frac{W}{Q_h} \Leftrightarrow W = e_c \cdot Q_h \Rightarrow W = 0,5 \cdot 1500\text{ J} \Rightarrow W = 750\text{ J}.$$

Το ποσό θερμότητας που αποβάλλει η μηχανή στη διάρκεια ενός κύκλου υπολογίζεται από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$|Q_c| = Q_h - W \Rightarrow |Q_c| = 1500\text{ J} - 750\text{ J} \Rightarrow |Q_c| = 750\text{ J}.$$

28. (19228) Μία θερμική μηχανή Carnot έχει συντελεστή απόδοσης $e_c = 0,5$. Το καθαρό ποσό θερμότητας που απορροφά το ιδανικό αέριο της μηχανής ανά κύκλο λειτουργίας της είναι 1200 J. Η θερμότητα που απορροφά το ιδανικό αέριο από τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας, ανά κύκλο λειτουργίας της μηχανής είναι ίσο με:

(α) 1200 J , (β) 2400 J , (γ) 2000 J

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το αέριο της θερμικής μηχανής εκτελεί κυκλική μεταβολή, άρα η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας για κάθε κύκλο είναι μηδενική : $\Delta U = 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής $Q = \Delta U + W$, προκύπτει ότι το καθαρό ποσό θερμότητας Q που απορροφά η μηχανή σε ένα κύκλο είναι ίσο με το έργο W που παράγει η μηχανή, δηλαδή :
 $W = Q = 1200 \text{ J}$.

Ο συντελεστής απόδοσης κάθε θερμικής μηχανής υπολογίζεται από τη σχέση : $e = \frac{W}{Q_h}$.

Επομένως, το ποσό θερμότητας Q_h που απορροφά η μηχανή από τη θερμή δεξαμενή σε ένα κύκλο λειτουργίας, είναι :

$$Q_h = \frac{W}{e} \Rightarrow Q_h = \frac{1200 \text{ J}}{0,5} \Rightarrow Q_h = 2400 \text{ J}.$$

29. (19230) Ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται σε θερμοκρασία 25°C. Εάν η θερμοκρασία του αερίου γίνει 50°C, τότε η εσωτερική του ενέργεια:

(α) θα παραμείνει σταθερή , (β) θα διπλασιαστεί , (γ) τίποτα από τα δύο.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Οι απόλυτες θερμοκρασίες του αερίου είναι :

$$T_1 = 273 + \theta_1 = (273 + 25) \text{ K} = 298 \text{ K},$$

$$T_2 = 273 + \theta_2 = (273 + 50) \text{ K} = 323 \text{ K}.$$

Παρατηρούμε ότι : $T_2 \neq T_1$ και $T_2 \neq 2T_1$.

Η εσωτερική ενέργεια ιδανικού αερίου είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία του : $U = \frac{3}{2} nRT$.

Επομένως : $U_2 \neq U_1$ και $U_2 \neq 2U_1$.

Άρα, σωστή απάντηση είναι η (γ).

Σχόλιο : Στην πρόταση «εάν η θερμοκρασία του αερίου γίνει 50 °C, τότε η εσωτερική του ενέργεια . . . » δεν μπορεί να δοθεί σαν απάντηση «τίποτα από τα δύο».

30. (19232) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου εκτονώνεται με τους δύο διαφορετικούς τρόπους που φαίνονται στο σχήμα:

(1) με ισοβαρή αντιστρεπτή μεταβολή και

(2) με ισόθερμη αντιστρεπτή μεταβολή.

Για τη θερμότητα που απορροφά το αέριο σε κάθε περίπτωση ισχύει:

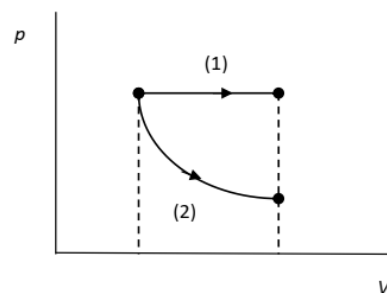
(α) $Q_1 > Q_2$, (β) $Q_1 < Q_2$, (γ) $Q_1 = Q_2$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Σχεδιάζουμε σε άξονες $p - V$ το διάγραμμα μιας ισοβαρούς εκτόνωσης AB και μιας ισόθερμης εκτόνωσης $A\Gamma$ από αρχικό όγκο V_A σε τελικό όγκο V_B .

Η απόλυτη τιμή του έργου του αερίου σε κάθε μεταβολή είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό που περικλείεται από το αντίστοιχο διάγραμμα και τον άξονα του όγκου.

Αφού οι μεταβολές είναι εκτονώσεις, άρα τα έργα είναι θετικά.

Επομένως :

$$W_{AB} = E_{AB\Delta Z}$$

$$W_{A\Gamma} = E_{A\Gamma\Delta Z}$$

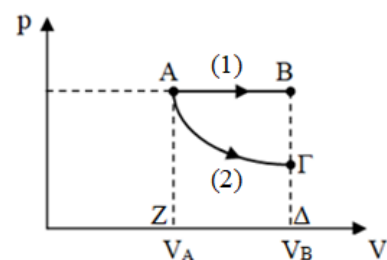
$$\text{Ισχύει : } E_{AB\Delta Z} > E_{A\Gamma\Delta Z} \Rightarrow W_{AB} > W_{A\Gamma} . \quad (1)$$

Για τις μεταβολές της εσωτερικής ενέργειας ισχύουν οι σχέσεις :

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{AB} &= \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2} p_A (V_B - V_A) > 0 \\ \Delta U_{A\Gamma} &= \frac{3}{2} nR(T_\Gamma - T_A) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta U_{AB} > \Delta U_{A\Gamma} . \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$W_{AB} + \Delta U_{AB} > W_{A\Gamma} + \Delta U_{A\Gamma} \Rightarrow Q_{AB} > Q_{A\Gamma} \quad \text{ή} \quad Q_1 > Q_2 .$$



31. (19477) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου που βρίσκεται στην κατάσταση ισορροπίας Α, πρόκειται να μεταβεί στην κατάσταση ισορροπίας Β, στην οποία η πίεση και ο όγκος έχουν διπλάσια τιμή από ότι στην Α. Η μεταβολή του αερίου από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους, εκτελώντας σε κάθε περίπτωση δύο διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές. Με τον τρόπο (1) οι διαδοχικές μεταβολές είναι ισόχωρη – ισοβαρής, ενώ με τον τρόπο (2) οι διαδοχικές μεταβολές είναι ισοβαρής – ισόχωρη. Η ενέργεια που μεταφέρεται από το αέριο στο περιβάλλον μέσω του έργου που παράγει είναι W_1 στην πρώτη περίπτωση και W_2 στη δεύτερη.

Ο λόγος των παραπάνω αναφερόμενων έργων $\frac{W_1}{W_2}$ είναι ίσος με:

- (α) 1 (β) 2 (γ) 3

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σχεδιάζουμε σε άξονες $p - V$ τις μεταβολές ΑΓΒ (μεταβολή 1) και ΑΔΒ (μεταβολή 2).

Μεταβολή $A \rightarrow \Gamma \rightarrow B$

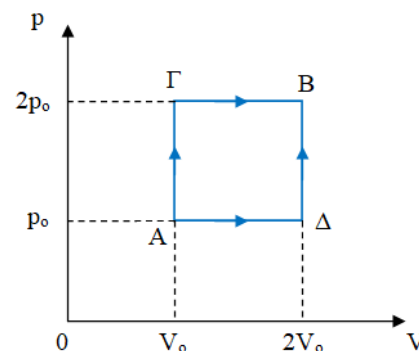
$$W_1 = W_{A\Gamma} + W_{\Gamma B} = 0 + 2p_0(2V_0 - V_0) \Rightarrow W_1 = 2p_0V_0. \quad (1)$$

Μεταβολή $A \rightarrow \Delta \rightarrow B$

$$W_2 = W_{A\Delta} + W_{\Delta B} = p_0(2V_0 - V_0) + 0 \Rightarrow W_2 = p_0V_0. \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{2p_0V_0}{p_0V_0} \Leftrightarrow \frac{W_1}{W_2} = 2.$$



32. (20047) Η αρχή λειτουργίας μιας θερμικής μηχανής απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα.

Ισχύει:

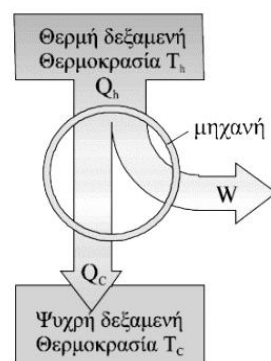
(α) $Q_h = Q_c$, (β) $|Q_c| < Q_h$, (γ) $Q_h < |Q_c|$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Αφού η μεταβολή είναι κυκλική, στο τέλος της μεταβολής το αέριο της μηχανής επανέρχεται στην αρχική κατάσταση, άρα : $T_{\text{τελ}} = T_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \Delta T = 0 \Leftrightarrow \Delta U = 0$.

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο της Θερμοδυναμικής για την κυκλική μεταβολή :

$$Q = \Delta U + W \xrightarrow{\Delta U = 0} Q = W \Rightarrow Q_h + Q_c = W. \quad (1)$$

$$\text{Αφού } Q_c < 0 \Leftrightarrow |Q_c| = -Q_c \text{ ή } Q_c = -|Q_c|. \quad (2)$$

$$\text{Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει : } Q_h - |Q_c| = W. \quad (3)$$

Αφού η μηχανή παράγει έργο, άρα $W > 0$.

Από τη σχέση (3) συμπεραίνουμε ότι : $Q_h > |Q_c|$ ή $|Q_c| < Q_h$.

33. (20048) Θερμική μηχανή απορροφά σε κάθε κύκλο λειτουργίας της θερμότητα 10000 J από τη θερμή δεξαμενή θερμότητας και έχει απόδοση 50%. Η θερμότητα που αποβάλλει η θερμική μηχανή, σε κάθε κύκλο λειτουργίας της, στην ψυχρή δεξαμενή θερμότητας είναι:

α) 5000 J , (β) 10000 J , (γ) 2500 J

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Για τον συντελεστή απόδοσης μιας θερμικής μηχανής ισχύει :

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} \Leftrightarrow \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - e \Leftrightarrow |Q_c| = (1 - e)Q_h \Rightarrow |Q_c| = (1 - 0,5) \cdot 10000\text{ J} \Rightarrow |Q_c| = 5000\text{ J}.$$

34. (20232) Μια μηχανή Carnot λειτουργεί ανάμεσα στις θερμοκρασίες $T_h = 400 \text{ K}$ και $T_c = 300 \text{ K}$. Διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής, μεταβάλλουμε τη θερμοκρασία T_c της ψυχρής δεξαμενής της μηχανής με τρόπο ώστε ο συντελεστής απόδοσης να αυξηθεί κατά 80%.

Για να συμβεί αυτό η θερμοκρασία T_c της ψυχρής δεξαμενής της μηχανής:

(α) αυξήθηκε κατά 100 K , (β) μειώθηκε κατά 100 K , (γ) μειώθηκε κατά 80 K .

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αρχικά, ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot είναι :

$$e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300}{400} \Rightarrow e_c = 0,25.$$

Αφού ο συντελεστής απόδοσης αυξάνεται κατά 80%, ισχύει :

$$e_c' = e_c + 80\% \cdot e_c = e_c + 0,8e_c \Leftrightarrow e_c' = 1,8e_c \Rightarrow e_c' = 0,25 \cdot 1,8 = 0,45.$$

Υπολογίζουμε τη νέα τιμή της απόλυτης θερμοκρασίας της ψυχρής δεξαμενής :

$$e_c' = 1 - \frac{T_c'}{T_h} \Leftrightarrow \frac{T_c'}{T_h} = 1 - e_c' \Leftrightarrow T_c' = T_h(1 - e_c') \Rightarrow T_c' = 400(1 - 0,45) \text{ K} \Rightarrow T_c' = 220 \text{ K}.$$

Η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι : $\Delta T_c = T_c' - T_c = 220 \text{ K} - 300 \text{ K} \Rightarrow \Delta T_c = -80 \text{ K}$.

Επομένως, η θερμοκρασία της ψυχρής δεξαμενής μειώθηκε κατά 80 K .

35. (20634) Μια θερμική μηχανή λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών $T_1 = T$ και $T_2 = 1,5T$ και σε κάθε κύκλο μας δίνει ωφέλιμο μηχανικό έργο W . Η ελάχιστη θερμότητα $Q_{\min}$, που καταναλώνει σε κάθε κύκλο λειτουργίας η θερμική μηχανή για να δώσει το παραπάνω έργο W είναι

(α) $Q_{\min} = W/3$, (β) $Q_{\min} = 1,5W$, (γ) $Q_{\min} = 3W$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot η οποία θα λειτουργούσε μεταξύ των θερμοκρασιών T_1 και T_2 είναι :

$$e_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{T}{1,5T} \Rightarrow e_c = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής υπολογίζεται από τη σχέση : $e = \frac{W}{Q_h}$. (2)

Εφ' όσον η θερμική μηχανή λειτουργεί ανάμεσα στις ίδιες ακραίες θερμοκρασίες T_1 και T_2 με τη μηχανή Carnot, ισχύει :

$$e \leq e_c \xrightarrow{(1),(2)} \frac{W}{Q_h} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow Q_h \geq 3W \Rightarrow Q_{h(\min)} = 3W.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά το ελάχιστο ποσό θερμότητας $Q_{h(\min)}$ που απορροφά η μηχανή σε ένα κύκλο.

36. (20796) Η απόδοση μιας θερμικής μηχανής δίνεται από την σχέση: $e = 1 + \frac{Q_c}{Q_h}$.

Ειδικά για την μηχανή Carnot, η σχέση γίνεται:

$$(α) e = 1 + \frac{T_c}{T_h}, \quad (β) e = 1 - \frac{T_h}{T_c}, \quad (γ) e = 1 - \frac{T_c}{T_h}.$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας, η θερμική μηχανή απορροφά ποσό θερμότητας Q_h από τη δεξαμενή υψηλής θερμοκρασίας T_h , παράγει έργο W και αποβάλλει (το υπόλοιπο) ποσό θερμότητας Q_c στη δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας T_c .

$$\text{Αφού } Q_c < 0 \Rightarrow |Q_c| = -Q_c \text{ ή } Q_c = -|Q_c|. \quad (1)$$

$$\text{Επομένως: } e = 1 + \frac{Q_c}{Q_h} \xrightarrow{(1)} e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h}. \quad (2)$$

$$\text{Για τη μηχανή Carnot που λειτουργεί μεταξύ των θερμοκρασιών } T_c, T_h \text{ ισχύει: } \frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{T_c}{T_h}. \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας από τη σχέση (3) στη (2) προκύπτει ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot :

$$e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h}.$$

37. (20799) Η απόδοση μιας μηχανής Carnot είναι η μέγιστη μεταξύ όλων των θερμικών μηχανών που λειτουργούν μεταξύ των δύο ισόθερμων T_1 και T_2 . Έστω ότι διαθέτουμε μια μηχανή Carnot με θερμοκρασία θερμής πηγής στους 27°C . Η απόδοση αυτής της μηχανής θα ήταν μεγαλύτερη αν την λειτουργούσαμε:

(α) στον Βόρειο Πόλο , (β) στον Ισημερινό , (γ) στη σκιά της Σελήνης, στο διάστημα

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot που θα λειτουργούσε μεταξύ των θερμοκρασιών T_c και T_h υπολογίζεται από τη σχέση : $e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h}$. (1)

Δίνεται ότι : $T_h = (273 + 27) \text{ K} = 300 \text{ K} = \text{σταθερή}$.

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι η απόδοση της μηχανής αυξάνεται όταν το πηλίκο $\frac{T_c}{T_h}$ μειώνεται,

άρα (αφού $T_h = \text{σταθερή}$) όταν η T_c μειώνεται.

Επομένως, η μηχανή Carnot θα είχε τη μεγαλύτερη απόδοση εκεί που θα είχε τη μικρότερη θερμοκρασία περιβάλλοντος T_c , δηλαδή στη σκιά της Σελήνης στο διάστημα.

Σχόλιο

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι

α) (σε κάθε περίπτωση) η δεξαμενή χαμηλής θερμοκρασίας είναι το περιβάλλον.

β) η θερμοκρασία στη σκιά της Σελήνης είναι (περίπου) -270°C (3 K).

38. (20804) Η απόδοση μιας μηχανής Carnot είναι η μέγιστη μεταξύ όλων των θερμικών μηχανών που λειτουργούν μεταξύ των δύο ισόθερμων T_1 και T_2 . Έστω ότι διαθέτουμε μια μηχανή Carnot που λειτουργεί με σταθερή θερμοκρασιακή διαφορά θερμής – ψυχρής δεξαμενής: $\Delta T = T_h - T_c = 100 \text{ K}$.

Η απόδοση της μηχανής:

- (α) είναι μεγαλύτερη όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής.
- (β) είναι μεγαλύτερη όσο χαμηλότερη είναι η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής.
- (γ) είναι η ίδια ανεξάρτητα την θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής Carnot η οποία θα λειτουργούσε μεταξύ των θερμοκρασιών T_c , T_h

$$\text{θα ήταν : } e_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} \Leftrightarrow e_c = \frac{T_h - T_c}{T_h} \text{ ή } e_c = \frac{\Delta T}{T_h}.$$

Όταν η διαφορά θερμοκρασιών $\Delta T = T_h - T_c$ είναι σταθερή, τότε ο συντελεστής απόδοσης είναι αντιστρόφως ανάλογος με την απόλυτη θερμοκρασία T_h της θερμής δεξαμενής.

Επομένως, η απόδοση της μηχανής Carnot θα ήταν μεγαλύτερη αν μειωνόταν η θερμοκρασία T_h της θερμής δεξαμενής.

39. (20808) Σε ένα αέριο θερμοδυναμικό σύστημα η θερμοκρασία αποτελεί μέτρο :

(α) της ποσότητας θερμότητας του αερίου

(β) της μέσης κινητικής ενέργειας του αερίου

(γ) του έργου που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η διατύπωση «η θερμοκρασία αποτελεί μέτρο της ποσότητας θερμότητας του αερίου» είναι λανθασμένη. Η θερμότητα δεν αποθηκεύεται στο σύστημα αλλά μεταφέρεται από το περιβάλλον στο σύστημα και αντίστροφα.

Η απάντηση (α) είναι λάθος.

Το έργο που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον εξαρτάται από το είδος της μεταβολής που εκτελεί το αέριο και δεν είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας του.

Η απάντηση (γ) είναι λάθος.

Η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του ιδανικού αερίου είναι ανάλογη με την απόλυτη θερμοκρασία

του : $\bar{K} = \frac{3}{2} kT$.

Όταν αυξηθεί η μέση κινητική ενέργεια των μορίων τότε θα αυξηθεί και η θερμοκρασία του αερίου.

Η απάντηση (β) είναι σωστή.

Σχόλιο

Η διατύπωση «η θερμοκρασία αποτελεί μέτρο της μέσης κινητικής ενέργειας του αερίου» δεν είναι ακριβής.

Η θερμοκρασία αποτελεί μέτρο της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων του αερίου.

40. (20892) Κατά την ισόβαρη εκτόνωση AB μιας ποσότητας μονοατομικού ιδανικού αερίου έχουμε αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας κατά ΔU . Η θερμότητα Q που απορροφά το αέριο είναι ίση με:

$$(\alpha) \frac{5}{3} \Delta U, \quad (\beta) \frac{2}{3} \Delta U, \quad (\gamma) \frac{4}{3} \Delta U$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Όταν η θερμοκρασία ορισμένης ποσότητας ιδανικού αερίου μεταβάλλεται κατά ΔT , η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου είναι :

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(\Delta T). \quad (1)$$

Στην ισόβαρη εκτόνωση το έργο του αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $W = nR(\Delta T)$. (2)

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : } \Delta U = \frac{3}{2} W \Leftrightarrow W = \frac{2}{3} (\Delta U). \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$Q = \Delta U + W \xrightarrow{(3)} Q = \Delta U + \frac{2}{3} (\Delta U) \Leftrightarrow Q = \frac{5}{3} (\Delta U).$$

41. (20894) Δοχείο σταθερού όγκου περιέχει n mol μονοατομικού ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία T . Για να τριπλασιαστεί η πίεση του αερίου πρέπει να προσφέρουμε ποσό θερμότητας Q ίσο με:

(α) nRT , (β) $3nRT$, (γ) $2nRT$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ο όγκος του αερίου είναι σταθερός, άρα η μεταβολή είναι ισόχωρη θέρμανση.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Charles :

$$\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'} \xrightarrow{p'=3p} \frac{p}{T} = \frac{3p}{T'} \Leftrightarrow T' = 3T. \quad (1)$$

Στην ισόχωρη μεταβολή το αέριο δεν παράγει έργο ($W = 0$).

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει :

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} nR(T' - T) \xrightarrow{(1)} Q = \frac{3}{2} nR(3T - T) = \frac{3}{2} nR(2T) \Rightarrow Q = 3nRT.$$

42. (21175) Για το διάγραμμα $P - V$ ενός κύκλου Carnot, δίνονται τα αντίστοιχα έργα για κάθε μια μεταβολή:

Ισόθερμη εκτόνωση: $W_1 = 10.000 \text{ J}$, Αδιαβατική εκτόνωση: $W_2 = 6.000 \text{ J}$,

Ισόθερμη συμπίεση: $|W_3| = 7.000 \text{ J}$, Αδιαβατική συμπίεση: $|W_4| = 6.000 \text{ J}$

Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι:

(α) 0,4 , (β) 0,3 , (γ) 0,6

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Το έργο που παράγει η μηχανή σε ένα κύκλο είναι :

$$W = W_1 + W_2 - |W_3| - |W_4| = (10000 + 6000 - 7000 - 6000) \text{ J}$$

$$W = 3000 \text{ J}.$$

Η μηχανή Carnot απορροφά θερμότητα μόνο στη διάρκεια της ισόθερμης εκτόνωσης $A \rightarrow B$, άρα :

$$Q_h = Q_{AB} = W_1 \Rightarrow Q_h = 10000 \text{ J}.$$

Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι :

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{3000 \text{ J}}{10000 \text{ J}} \Rightarrow e = 0,3.$$

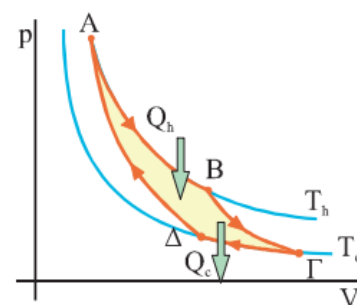
2ος τρόπος

Η μηχανή Carnot απορροφά θερμότητα μόνο στη διάρκεια της ισόθερμης εκτόνωσης $A \rightarrow B$ και αποβάλλει θερμότητα μόνο κατά τη διάρκεια της ισόθερμης συμπίεσης $\Gamma \rightarrow \Delta$, άρα :

$$Q_h = Q_{AB} = W_1 \Rightarrow Q_h = 10000 \text{ J},$$

$$|Q_c| = |Q_{\Gamma\Delta}| = |W_3| = 7000 \text{ J}.$$

$$\text{Ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι : } e = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h} = 1 - \frac{7000 \text{ J}}{10000 \text{ J}} \Rightarrow e = 0,3.$$



43. (21178) Σε μια θερμική μηχανή Carnot, η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής είναι T_h ενώ αντίστοιχα της ψυχρής δεξαμενής, είναι T_c . Για να είναι το ωφέλιμο έργο της θερμικής μηχανής ίσο με τα $2/3$ της θερμότητας (κατά απόλυτη τιμή) που αποβάλλει το αέριο στην ψυχρή δεξαμενή σε κάθε κύκλο, θα πρέπει να ισχύει:

$$(\alpha) T_h = \frac{2}{3} \cdot T_c, \quad (\beta) T_c = \frac{3}{2} \cdot T_h, \quad (\gamma) T_c = \frac{3}{5} \cdot T_h$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σύμφωνα με την εκφώνηση, ισχύει : $W = \frac{2}{3}|Q_c|$. (1)

Με εφαρμογή του 1ου νόμου της θερμοδυναμικής σε ένα κύκλο λειτουργίας της θερμικής μηχανής, προκύπτει :

$$Q_h = |Q_c| + W \xrightarrow{(1)} Q_h = |Q_c| + \frac{2}{3}|Q_c| \Leftrightarrow Q_h = \frac{5}{3}|Q_c| \Leftrightarrow \frac{|Q_c|}{Q_h} = \frac{3}{5}. \quad (2)$$

Για τη θερμική μηχανή Carnot ισχύει :

$$\frac{T_c}{T_h} = \frac{|Q_c|}{Q_h} \xrightarrow{(2)} \frac{T_c}{T_h} = \frac{3}{5} \Rightarrow T_c = \frac{3}{5}T_h.$$

44. (21388) Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η εκτόνωση ενός αερίου με τρεις διαφορετικούς τρόπους: η μεταβολή (1) είναι ισοβαρής, η μεταβολή (2) είναι ισόθερμη και η μεταβολή (3) είναι αδιαβατική.

Για το ποσό θερμότητας που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον σε κάθε μεταβολή, ισχύει ότι:

(α) $Q_1 > Q_2$ και $Q_2 = Q_3$, (β) $Q_1 > Q_2 > Q_3$, (γ) $Q_1 < Q_2 < Q_3$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ισοβαρής εκτόνωση A→B

Το έργο είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα p–V:

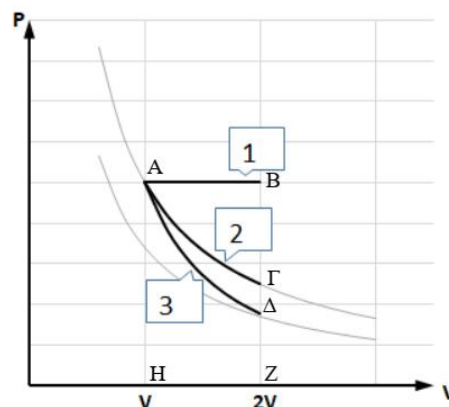
$$W_{AB} = E_{ABZH} > 0. \quad (1)$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι :

$$\Delta U_{AB} = \frac{3}{2} nR(\Delta T_{AB}) = \frac{3}{2} p(\Delta V) \xrightarrow{\Delta V > 0} \Delta U_{AB} > 0. \quad (2)$$

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}. \quad (3)$$



Ισόθερμη εκτόνωση A→Γ

Το έργο είναι ίσο (αριθμητικά) με το εμβαδό στο διάγραμμα p–V:

$$W_{A\Gamma} = E_{A\Gamma ZH} > 0. \quad (4)$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι :

$$\Delta U_{A\Gamma} = \frac{3}{2} nR(\Delta T_{A\Gamma}) \xrightarrow{\Delta T_{A\Gamma} = 0} \Delta U_{A\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής :

$$Q_{A\Gamma} = W_{A\Gamma}. \quad (6)$$

Αδιαβατική εκτόνωση A→Δ

$$Q_{A\Delta} = 0 \quad (7)$$

$$\text{Από το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι : } E_{ABZH} > E_{A\Gamma ZH} \xrightarrow{(1),(4)} W_{AB} > W_{A\Gamma} > 0. \quad (8)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2), (8) προκύπτει :

$$\Delta U_{AB} + W_{AB} > W_{A\Gamma} > 0 \xrightarrow{(3),(6)} Q_{AB} > Q_{A\Gamma} > 0. \quad (9)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (7), (9) προκύπτει :

$$Q_{AB} > Q_{A\Gamma} > Q_{A\Delta} \quad \text{ή} \quad Q_1 > Q_2 > Q_3.$$

45. (21403) Μία θερμική μηχανή απορροφά σε κάθε κύκλο ποσό θερμότητας $Q_h = 2000 \text{ J}$ από την θερμή δεξαμενή και έχει συντελεστή απόδοσης $e = 0,4$. Αν η θερμική μηχανή έχει συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, δηλαδή εκτελεί 10 κύκλους σε κάθε δευτερόλεπτο, τότε η ισχύς που αποδίδει είναι

(α) 8 kW , (β) 20 kW , (γ) 12 kW

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Από τον ορισμό του συντελεστή απόδοσης υπολογίζουμε το έργο που παράγει η μηχανή σε 1 κύκλο :

$$e = \frac{W}{Q_h} \Leftrightarrow W = e \cdot Q_h \Rightarrow W = 0,4 \cdot 2000 \text{ J} \Rightarrow W = 800 \text{ J}.$$

Έστω T το χρονικό διάστημα που χρειάζεται η μηχανή για να εκτελέσει 1 κύκλο (δηλαδή η περίοδος) και

$$f \text{ η συχνότητα λειτουργίας. Ισχύει η σχέση : } f = \frac{1}{T}. \quad (1)$$

Η (μέση) ισχύς της μηχανής είναι :

$$P = \frac{W}{T} = W \cdot \frac{1}{T} \xrightarrow{(1)} P = W \cdot f \Rightarrow P = (800 \text{ J}) \cdot (10 \text{ Hz}) \Rightarrow P = 8000 \text{ W} \text{ ή } P = 8 \text{ kW}.$$

46. (21405) Μία ποσότητα ιδανικού αερίου υποβάλλεται σε αδιαβατική εκτόνωση. Στην μεταβολή αυτή η θερμοκρασία του αερίου:

(α) μειώνεται.

(β) αυξάνεται.

(γ) παραμένει σταθερή.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Στην αδιαβατική εκτόνωση ο όγκος του αερίου αυξάνεται, άρα το έργο του αερίου είναι θετικό :

$$\Delta V > 0 \Rightarrow W > 0. \quad (1)$$

Αφού το αέριο δεν ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον ($Q = 0$), από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει :

$$\Delta U + W = 0 \Leftrightarrow \Delta U = -W \xrightarrow{(1)} \Delta U < 0.$$

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(\Delta T). \quad (2)$$

$$\text{Αφού } \Delta U < 0 \xrightarrow{(2)} \frac{3}{2} nR(\Delta T) < 0 \Leftrightarrow \Delta T < 0 \Leftrightarrow T_{\text{τελ}} - T_{\text{αρχ}} < 0 \Leftrightarrow T_{\text{τελ}} < T_{\text{αρχ}}.$$

Άρα η θερμοκρασία του αερίου μειώνεται.

47. (21686) Σε μια αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή το έργο αερίου μπορεί να είναι:
(α) Θετικό ή αρνητικό , (β) Θετικό ή αρνητικό ή μηδέν , (γ) Μηδέν.
Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

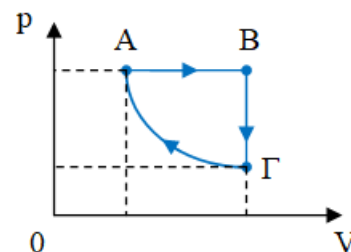
Απάντηση

Σε μία αντιστρεπτή κυκλική μεταβολή, η απόλυτη τιμή του έργου που παράγει το αέριο είναι ίση (αριθμητικά) με το εμβαδό του σχήματος που περικλείεται από την κλειστή γραμμή στο διάγραμμα $p - V$.

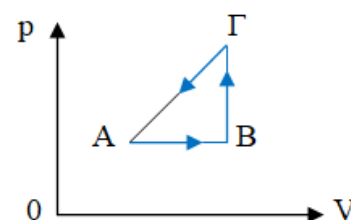
Όταν η μεταβολή διαγράφεται κατά τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (διάγραμμα 1) τότε το έργο είναι θετικό.

Όταν η μεταβολή διαγράφεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (διάγραμμα 2) τότε το έργο είναι αρνητικό.

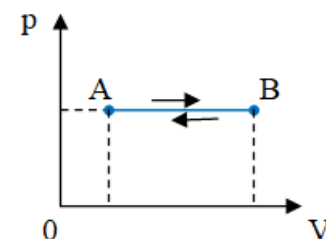
Στην περίπτωση που το αέριο εκτελεί μία αντιστρεπτή μεταβολή (π.χ. ισοβαρή εκτόνωση AB , διάγραμμα 3) και επιστρέφει στην αρχική κατάσταση εκτελώντας την ίδια μεταβολή με αντίθετη φορά (π.χ. ισοβαρή συμπίεση BA) τότε η κλειστή γραμμή του διαγράμματος $p - V$ δεν περικλείει εμβαδό, άρα το έργο του αερίου είναι μηδέν.



διάγραμμα (1)



διάγραμμα (2)

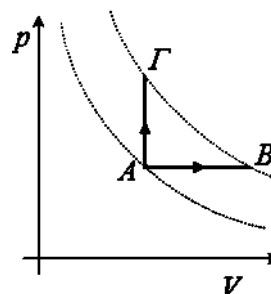


διάγραμμα (3)

48. (21763) Στο εργαστήριο Φυσικής θέλουμε να θερμάνουμε κατά ΔT ορισμένη ποσότητα αερίου. Μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ μια ισοβαρούς και μιας ισόχωρης θέρμανσης. Οι διακεκομμένες γραμμές του διαγράμματος παριστάνουν ισόθερμες καμπύλες. Το ποσό θερμότητας που θα απαιτηθεί να απορροφήσει το αέριο είναι:

- (α) Μικρότερο στην ισόχωρη μεταβολή,
 (β) Μικρότερο στην ισοβαρή μεταβολή,
 (γ) Το ίδιο και στις δυο περιπτώσεις.
 Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4



Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $\Delta U = \frac{3}{2} nR(\Delta T)$.

Στην ισοβαρή θέρμανση AB, το έργο του αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $W_{AB} = nR(\Delta T)$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει :

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = \frac{3}{2} nR(\Delta T) + nR(\Delta T) \Rightarrow Q_{AB} = \frac{5}{2} nR(\Delta T). \quad (1)$$

Στην ισόχωρη θέρμανση ΑΓ το αέριο δεν παράγει έργο : $W_{AG} = 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής προκύπτει : $Q_{AG} = \Delta U_{AG} \Rightarrow Q_{AG} = \frac{3}{2} nR(\Delta T). \quad (2)$

Αφού $\Delta T > 0$, από τις σχέσεις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι : $Q_{AG} < Q_{AB}$.

Σωστή απάντηση : (α).

Εναλλακτική απάντηση

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση : $\Delta U = \frac{3}{2} nR(\Delta T)$.

Αφού $\Delta T_{AB} = \Delta T_{AG}$, άρα : $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AG}$. (1)

Στην ισοβαρή εκτόνωση AB το αέριο παράγει έργο $W_{AB} > 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής : $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$. (2)

Στην ισόχωρη θέρμανση ΑΓ το αέριο δεν παράγει έργο : $W_{AG} = 0$.

Από τον 1ο νόμο της θερμοδυναμικής : $Q_{AG} = \Delta U_{AG} \xrightarrow{(1)} Q_{AG} = \Delta U_{AB}$. (3)

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει : $Q_{AG} < Q_{AB}$.

49. (21768) Σε δημοσίευμα της σχολικής εφημερίδας «ΜΙΚΡΟΙ Αρχισυντάκτες 2^ο ΓΕΛ Καρδίτσας» το 2013 διαβάζουμε ότι ομάδα μαθητών έχει κατασκευάσει διάταξη για επίδειξη της αδιαβατικής μεταβολής. Συγκεκριμένα κατασκευάστηκε «πιστόνι». Σύμφωνα με το άρθρο: «Αυτό αποτελείται από ένα κύλινδρο από plexiglass με μήκος 18 cm. Το έμβολο κατασκευάστηκε από σίδηρο στο οποίο προσαρμόστηκε βαρύ σφαιρίδιο για υποβοήθηση της συμπίεσης. Αυτή πραγματοποιείται με απότομο χτύπημα με σφυρί. Κατά μέσο όρο κατά την συμπίεση ο λόγος του τελικού όγκου προς τον αρχικό όγκο είναι: $\frac{V_{\text{τελ}}}{V_{\text{αρχ}}} = \frac{1}{9}$ ». Βαμβάκι που έχει εμποτιστεί με εύφλεκτη ύλη π.χ. οινόπνευμα έχει τοποθετηθεί στη βάση του σωλήνα. Καθώς η τελική θερμοκρασία υπερβαίνει το σημείο ανάφλεξης προκύπτει εντυπωσιακή φλόγα που αναπτύσσεται κατά την αδιαβατική συμπίεση. Η συμπίεση είναι αδιαβατική έστω και κατά προσέγγιση, γιατί πραγματοποιείται πολύ γρήγορα, ώστε να μην υπάρχει χρόνος για ανταλλαγή θερμότητας με το περιβάλλον.

Ας υποθέσουμε ότι η συμπεριφορά του αέρα στο εσωτερικό του σωλήνα είναι ως ιδανικό αέριο. Κατά τη διάρκεια της παραπάνω αδιαβατικής συμπίεσης:

(α) θα έχουμε φλόγα σε θερμοκρασία 150°C ,

(β) θα έχουμε φλόγα σε θερμοκρασία 2400°C ,

(γ) θα έχουμε φλόγα σε θερμοκρασία 430,2°C.

Για αριθμητικούς υπολογισμούς λάβετε υπόψη σας τα παρακάτω δεδομένα:

Η αρχική θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ ή $T_1 = 293\text{ K}$ και κατά την αδιαβατική συμπίεση ο τελικός όγκος γίνεται εννέα φορές μικρότερος.

Δίνεται ότι η σταθερά Poisson είναι $\gamma = 1,4$ και $9^{0,4} = 2,4$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σύμφωνα με την εκφώνηση, ισχύει : $V_2 = \frac{V_1}{9} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = 9$.

Αφού η μεταβολή θεωρείται αδιαβατική, ισχύει ο νόμος του Poisson : $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$. (1)

Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση για την αρχική και την τελική κατάσταση του αέρα.

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{nRT_1}{V_1}. \quad (2)$$

$$p_2 V_2 = nRT_2 \Leftrightarrow p_2 = \frac{nRT_2}{V_2}. \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις πιέσεις από τις σχέσεις (2), (3) στη σχέση (1) :

$$\frac{nRT_1}{V_1} \cdot V_1^\gamma = \frac{nRT_2}{V_2} \cdot V_2^\gamma \Leftrightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Leftrightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow$$

$$T_2 = 293 \cdot 9^{1,4-1} \text{ K} = 293 \cdot 9^{0,4} \text{ K} = 293 \cdot 2,4 \text{ K} \Rightarrow T_2 = 703,2 \text{ K}.$$

$$\text{Ισχύει : } T_2 = 273 + \theta_2 \Leftrightarrow \theta_2 = T_2 - 273 \Rightarrow \theta_2 = (703,2 - 273) ^\circ\text{C} \Rightarrow \theta_2 = 430,2 ^\circ\text{C}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση έχει υπερβολικά μεγάλη έκταση για ερώτηση εξετάσεων.

50. (21819) Μια ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου, βρίσκεται σε δοχείο με θερμομονωτικά τοιχώματα, μεταβλητού όγκου και είναι αρχικά σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας (Α), με όγκο V_1 , πίεση p_1 και απόλυτη θερμοκρασία T_1 . Το αέριο εκτελεί αδιαβατική μεταβολή, στο τέλος της οποίας καταλήγει και πάλι σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας (Β), με όγκο V_2 , πίεση p_2 και θερμοκρασία T_2 .

Για το έργο του αερίου κατά την παραπάνω αδιαβατική μεταβολή του όγκου του, ισχύει η σχέση:

$$(α) W_{αερ}^{A \rightarrow B} = 0, \quad (β) W_{αερ}^{A \rightarrow B} = p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1, \quad (γ) W_{αερ}^{A \rightarrow B} = \frac{3}{2} \cdot (p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2)$$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην αδιαβατική μεταβολή, το αέριο δεν ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον ($Q_{AB} = 0$).

Με εφαρμογή του 1ου νόμου της θερμοδυναμικής, προκύπτει :

$$\Delta U_{AB} + W_{AB} = 0 \Leftrightarrow W_{AB} = -\Delta U_{AB} \Leftrightarrow W_{AB} = -\frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) \quad \text{ή} \quad W_{AB} = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2). \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση στις δύο καταστάσεις ισορροπίας.

$$\left. \begin{array}{l} p_1 V_1 = nRT_1 \\ p_2 V_2 = nRT_2 \end{array} \right\} \Rightarrow p_1 V_1 - p_2 V_2 = nR(T_1 - T_2). \quad (2)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει : $W_{AB} = \frac{3}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2).$

51. (21853) Στο διάγραμμα $V-T$ του σχήματος απεικονίζεται μία αντιστρεπτή μεταβολή BA , που υφίσταται ποσότητα ιδανικού αερίου ίση με $n = \frac{2}{R} \text{ mol}$ (όπου R η σταθερά των ιδανικών αερίων εκφρασμένη σε $\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$).

Το έργο του αερίου κατά τη μεταβολή BA είναι:

(α) $W_{BA} = -600 \text{ J}$, (β) $W_{BA} = 600 \text{ J}$, (γ) $W_{BA} = 450 \text{ J}$

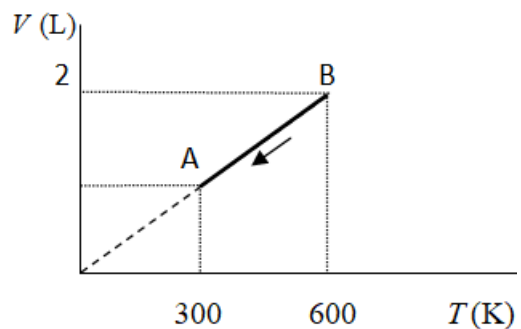
A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Δίνεται: $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$.



Απάντηση

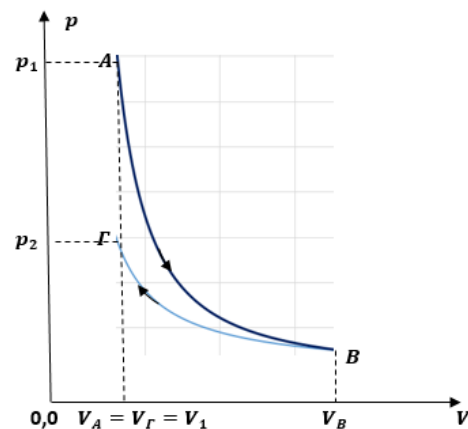
Το διάγραμμα $V-T$ είναι ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα στη διάρκεια της μεταβολής ο όγκος V του αερίου είναι ανάλογος με την απόλυτη θερμοκρασία T .

Επομένως, η πίεση είναι σταθερή και η μεταβολή είναι ισοβαρής συμπίεση – ψύξη.

Στην ισοβαρή μεταβολή το έργο του αερίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$W_{BA} = nR(T_2 - T_1) = \frac{2}{R} \cdot R \cdot (300 - 600) \text{ J} \Rightarrow W_{BA} = -600 \text{ J}.$$

52. (22515) Ορισμένη ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου, βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α, με πίεση p_1 , όγκο V_1 και απόλυτη θερμοκρασία T_1 . Το αέριο υποβάλλεται σε αδιαβατική εκτόνωση ΑΒ, και στη συνέχεια ισόθερμη συμπίεση ΒΓ, έτσι, ώστε να βρεθεί τελικά και πάλι σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Γ, με τελικό όγκο ίσο με τον αρχικό του στην κατάσταση Α ($V_\Gamma = V_A = V_1$) και τελική πίεση p_2 , όπως αποδίδονται στο διάγραμμα πίεσης-όγκου ($p - V$) που ακολουθεί.



Για την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου $\Delta U^{A \rightarrow \Gamma}$, από την αρχική κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας Α, μέχρι την τελική Γ, ισχύει η σχέση:

$$(\alpha) \quad \Delta U^{A \rightarrow \Gamma} = 0 \quad , \quad (\beta) \quad \Delta U^{A \rightarrow \Gamma} = \frac{3}{2} \cdot (p_2 - p_1) \cdot V_1 \quad , \quad (\gamma) \quad \Delta U^{A \rightarrow \Gamma} = (p_2 - p_1) \cdot V_1$$

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του ιδανικού αερίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_{\text{τελ}} - T_{\text{αρχ}}), \text{ για οποιαδήποτε μεταβολή ή συνδυασμό μεταβολών που εκτελεί το αέριο.}$$

Επομένως :

$$\Delta U_{A \rightarrow \Gamma} = \frac{3}{2} nR(T_\Gamma - T_A) = \frac{3}{2} (nRT_\Gamma - nRT_A) \Rightarrow \Delta U_{A \rightarrow \Gamma} = \frac{3}{2} (p_2 V_1 - p_1 V_1) \Rightarrow \Delta U_{A \rightarrow \Gamma} = \frac{3}{2} (p_2 - p_1) V_1.$$

Κεφάλαιο 5

Θέματα Β

Ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο

1. (16036) Τρία σημειακά φορτία $q_A = -2q$, $q_B = +3q$, $q_\Gamma = +q$ διατηρούνται ακίνητα στις κορυφές Α, Β, Γ αντίστοιχα, ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α .

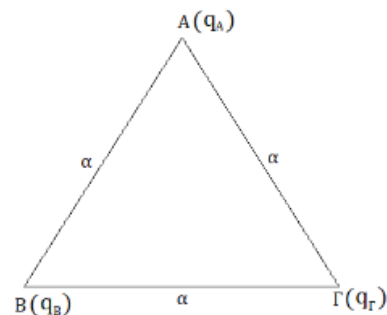
Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια U του συστήματος των τριών φορτίων είναι:

$$(\alpha) \quad -11K_c \frac{q^2}{\alpha}, \quad (\beta) \quad -5K_c \frac{q^2}{\alpha}, \quad (\gamma) \quad +11K_c \frac{q^2}{\alpha}.$$

όπου K_c η σταθερά του Coulomb.

Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια U του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών που έχουν όλα τα (διαφορετικά) ζευγάρια φορτίων, δηλαδή :

$$U = K_c \frac{q_A q_B}{\alpha} + K_c \frac{q_A q_\Gamma}{\alpha} + K_c \frac{q_B q_\Gamma}{\alpha} = K_c \frac{(-2q)(+3q) + (-2q)(+q) + (+3q)(+q)}{\alpha} \Rightarrow$$
$$U = K_c \frac{(-6q^2 - 2q^2 + 3q^2)}{\alpha} = K_c \frac{(-5q^2)}{\alpha} \Rightarrow U = -5K_c \frac{q^2}{\alpha}.$$

2. (16637) Έστω δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 που απέχουν απόσταση $d = 20 \text{ cm}$. Αν η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων είναι $U = -10 \text{ J}$, η δύναμη που ασκείται μεταξύ τους έχει μέτρο:

(α) $F = 10 \text{ N}$,

(β) $F = 5 \text{ N}$,

(γ) $F = 50 \text{ N}$.

A. ~~Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.~~ **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.**

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της δύναμης μεταξύ των δύο φορτισμένων σωμάτων υπολογίζεται από τη σχέση :

$$F = K_C \frac{|q_1 q_2|}{d^2}. \quad (1)$$

Για την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος ισχύει :

$$U = K_C \frac{q_1 q_2}{d} \Rightarrow |U| = K_C \frac{|q_1 q_2|}{d} \quad \text{ή} \quad |U| = K_C \frac{|q_1 q_2|}{d^2} \cdot d. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει :

$$|U| = F \cdot d \Leftrightarrow F = \frac{|U|}{d} \Rightarrow F = \frac{10 \text{ J}}{2 \cdot 10^{-1} \text{ m}} \Rightarrow F = 50 \text{ N}.$$

Σημείωση

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι αρνητική.

Αυτό σημαίνει ότι τα φορτία είναι ετερόσημα και οι δυνάμεις μεταξύ τους είναι ελκτικές.

3. (16869) Δύο φορτισμένα σωματίδια, με το ίδιο φορτίο, συγκρατούνται αρχικά ακίνητα σε απόσταση r και η δυναμική ενέργεια ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης του συστήματος των δύο σωματιδίων είναι U . Αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερα τα δύο σωματίδια να κινηθούν εξαιτίας των απωστικών δυνάμεων που ασκεί το ένα στο άλλο, χωρίς να παίζουν κάποιο ρόλο οι τριβές ή η βαρυτική δύναμη. Όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι διπλάσια της αρχικής ($r' = 2r$), η κινητική ενέργεια κάθε σωματιδίου είναι K και ισχύει:

(α) $K = U$, (β) $K = \frac{U}{4}$, (γ) $K = 4U$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Όταν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι r , η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U = K_C \frac{q_1 q_2}{r} \quad (1)$$

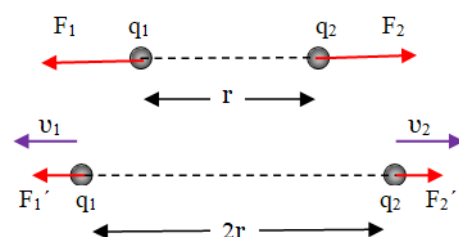
Όταν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι $2r$, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U' = K_C \frac{q_1 q_2}{2r} \xrightarrow{(1)} U' = \frac{U}{2} \quad (2)$$

Τα σωματίδια κινούνται μόνο με την επίδραση των ηλεκτρικών αλληλεπιδράσεων, επομένως η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$E_{\text{μηχ(αρχ)}} = E_{\text{μηχ(τελ)}} \Leftrightarrow U + 0 = \frac{U}{2} + 2K \Leftrightarrow 2K = \frac{U}{2} \Leftrightarrow K = \frac{U}{4}.$$



Παρατήρηση

Το σύστημα των δύο σωματιδίων είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Αν εφαρμόσουμε την ΑΔΟ, προκύπτει :

$$\vec{p}_{\text{ολ(αρχ)}} = \vec{p}_{\text{ολ(τελ)}} \Leftrightarrow 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Δηλαδή οι ορμές των σωματιδίων είναι αντίθετες, επομένως για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow mv_1 = mv_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

Τα σωματίδια έχουν ίσες μάζες και ίσες ταχύτητες, άρα οι κινητικές τους ενέργειες είναι ίσες :

$$K_1 = K_2 = K.$$

Η προηγούμενη απόδειξη δεν είναι απαραίτητη, αφού η εκφώνηση αναφέρει ότι «η κινητική ενέργεια κάθε σωματιδίου είναι K », δηλαδή οι κινητικές ενέργειες των σωματιδίων είναι ίσες.

4. (16871) Δύο μικρά μεταλλικά σφαιρίδια είναι φορτισμένα με ηλεκτρικά φορτία Q_1 και Q_2 και συγκρατούνται αρχικά ακίνητα πάνω σε λείο μονωτικό οριζόντιο δάπεδο, σε κοντινή σχετικά μεταξύ τους απόσταση ώστε να αλληλεπιδρούν ηλεκτρικά. Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων είναι $U = -0,8 \text{ J}$. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερα και τα δύο φορτία ταυτόχρονα να κινηθούν. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Μια επόμενη χρονική στιγμή, ενώ ακόμη τα φορτία κινούνται ελεύθερα, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι δυνατόν να έχει γίνει:

(α) $U' = -1,2 \text{ J}$, (β) $U' = -0,4 \text{ J}$, (γ) $U' = 0,8 \text{ J}$.

A Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Τα σωματίδια κινούνται μόνο με την επίδραση των αμοιβαίων ηλεκτρικών δυνάμεων, επομένως η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\epsilon\lambda)} \Leftrightarrow U + 0 = U' + K_{ολ} \Leftrightarrow U' = U - K_{ολ}. \quad (1)$$

$$K_{ολ} > 0 \xrightarrow{(1)} U' < U.$$

Αφού $U = -0,8 \text{ J}$ άρα η πιθανή τιμή είναι : $U' = -1,2 \text{ J}$.

Σχόλιο

Οι διατυπώσεις «αφήνουμε ελεύθερα τα δύο φορτία», «τα φορτία κινούνται» δεν είναι σωστές. Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίδιο.

5. (19480) Πάνω σε λείο οριζόντιο μονωτικό επίπεδο βρίσκεται ένα σώμα Σ_1 μάζας m_1 και θετικού φορτίου q_1 . Στο ίδιο οριζόντιο μονωτικό επίπεδο και σε απόσταση r από το σώμα Σ_1 βρίσκεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2m_1$ και αρνητικού φορτίου q_2 . Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αφήνονται ταυτόχρονα ελεύθερα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Κάποια επόμενη χρονική στιγμή t_1 οι κινητικές ενέργειες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι K_1 και K_2 αντίστοιχα.

Ο λόγος $\frac{K_1}{K_2}$ ισούται με:

(α) $\frac{K_1}{K_2} = 1$ (β) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{2}$ (γ) $\frac{K_1}{K_2} = 2$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Τα σώματα είναι ετερόσημα φορτισμένα με αποτέλεσμα να έλκονται και να πλησιάζουν μεταξύ τους.

Το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Αν εφαρμόσουμε την ΑΔΟ, προκύπτει :

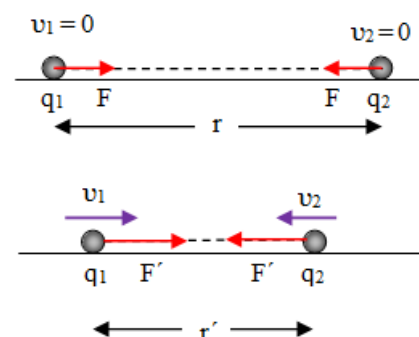
$$\vec{p}_{ολ(τελ)} = \vec{p}_{ολ(αρχ)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Δηλαδή οι ορμές των σωμάτων είναι αντίθετες, επομένως για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \xrightarrow{m_2 = 2m_1} m_1 v_1 = 2m_1 v_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2. \quad (1)$$

Το πηλίκο των κινητικών ενεργειών είναι :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \xrightarrow{m_2 = 2m_1} \frac{K_1}{K_2} = \frac{m_1 (2v_2)^2}{2m_1 v_2^2} = \frac{4v_2^2}{2v_2^2} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = 2.$$



6. (19483) Σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q_1 βρίσκεται σε απόσταση 10 cm από θετικό σημειακό ηλεκτρικό φορτίο $q_2 = 10^{-6}\text{ C}$, οπότε το σύστημα των δύο σημειακών φορτίων έχει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_1 . Αντικαθιστούμε το φορτίο q_2 με ένα άλλο φορτίο $q_2' = 3 \cdot 10^{-6}\text{ C}$ και ταυτόχρονα μειώνουμε την απόσταση μεταξύ του q_1 και του q_2' έτσι ώστε να απέχουν 5 cm , οπότε το σύστημα των δύο σημειακών φορτίων έχει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_2 .

Ο λόγος $\frac{U_1}{U_2}$ ισούται με:

$$(\alpha) \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{2}{3}$$

$$(\beta) \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{3}{2}$$

$$(\gamma) \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{6}$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίων q_1, q_2 όταν απέχουν μεταξύ τους απόσταση r_1 , είναι :

$$U_1 = K_C \frac{q_1 q_2}{r_1} \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίων q_1, q_2' όταν απέχουν μεταξύ τους απόσταση r_2 , είναι :

$$U_2 = K_C \frac{q_1 q_2'}{r_2} \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{K_C \frac{q_1 q_2}{r_1}}{K_C \frac{q_1 q_2'}{r_2}} \Leftrightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{q_2}{q_2'} \cdot \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{10^{-6}\text{ C}}{3 \cdot 10^{-6}\text{ C}} \cdot \frac{5\text{ cm}}{10\text{ cm}} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{6}.$$

7. (20799) Πρωτόνιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα u_0 από πολύ μακριά προς ακίνητο σωματίο α το οποίο όμως είναι ελεύθερο να κινηθεί. Η ταχύτητα του πρωτονίου είναι πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια. Αν δίνεται k η ηλεκτρική σταθερά, $m_p = m_n = m$ η μάζα του πρωτονίου η οποία ισούται με αυτήν του νετρονίου, $q_p = |e|$ το φορτίο του πρωτονίου και ότι το σωματίο α είναι πυρήνας **Ηλίου** με 2 πρωτόνια και 2 νετρόνια, τότε οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων όταν η μεταξύ τους απόσταση θα είναι ελάχιστη δίνεται από την:

(α) $u_p = u_\alpha = u_0$.

(β) $5u_p = u_\alpha = \frac{u_0}{2}$.

(γ) $u_p = u_\alpha = \frac{u_0}{5}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η μάζα του του σωματίου α είναι $m_\alpha = 4m_p$.

Όταν το πρωτόνιο πλησιάσει το σωματίο α αναπτύσσονται μεταξύ τους απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις.

Η δύναμη $\vec{F}_p$ που δέχεται το πρωτόνιο είναι αντίρροπη από την ταχύτητα, με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει, ενώ η δύναμη $\vec{F}_\alpha$ που δέχεται το σωματίο α το επιταχύνει.

Αρχικά το πρωτόνιο έχει μεγαλύτερη ταχύτητα, με αποτέλεσμα να μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους αποκτούν ίσα μέτρα

($u_p = u_\alpha = u$) και στη συνέχεια το σωματίο α έχει μεγαλύτερη

ταχύτητα, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Επομένως, **η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες.**

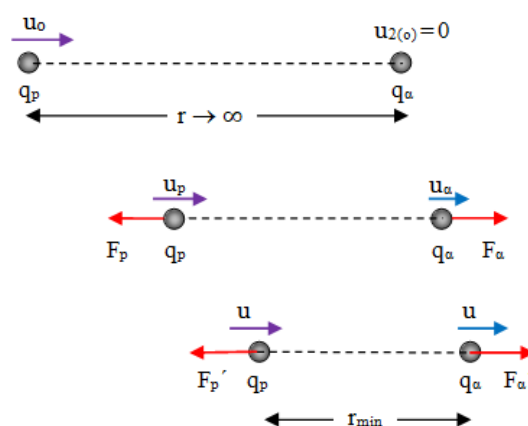
Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα (βαρυτικές δυνάμεις, αντιστάσεις) είναι ασήμαντες, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική κατάσταση τη στιγμή που εκτοξεύεται το πρωτόνιο και τελική τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες :

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow m_p u_0 = m_p u + m_\alpha u \xrightarrow{m_\alpha = 4m_p} m_p u_0 = (m_p + 4m_p)u \Leftrightarrow u = \frac{m_p u_0}{5m_p} \Leftrightarrow u = \frac{u_0}{5}.$$

Άρα, τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη, οι ταχύτητές έχουν μέτρα :

$$u_p = u_\alpha = \frac{u_0}{5}.$$



8. (20808) Πρωτόνιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα u_0 από πολύ μακριά προς ακλόνητο σωματίο α. Αν δίνεται k η ηλεκτρική σταθερά, m_p η μάζα του πρωτονίου, $q_p = |e|$ το φορτίο του πρωτονίου και ότι το σωματίο α είναι πυρήνας ηλίου με 2 πρωτόνια και 2 νετρόνια, τότε η ελάχιστη απόσταση στην οποία το πρωτόνιο θα πλησιάσει το σωματίο α, είναι:

(α) $\frac{4K|e|^2}{m_p u_0^2}$, (β) $\frac{m_p u_0^2}{4K|e|^2}$, (γ) $\frac{m_p u_0^2}{2K|e|}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το φορτίο του σωματίου α είναι : $q_\alpha = 2|e|$.

Αρχικά η απόσταση ανάμεσα στα σωματίδια είναι «άπειρη» με αποτέλεσμα να μην αλληλεπιδρούν.

Όταν το πρωτόνιο πλησιάσει το σωματίο α, αναπτύσσονται μεταξύ τους απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις.

Η δύναμη $\vec{F}_p$ που δέχεται το πρωτόνιο είναι αντίρροπη από τη ταχύτητα, με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει.

Τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του πρωτονίου,

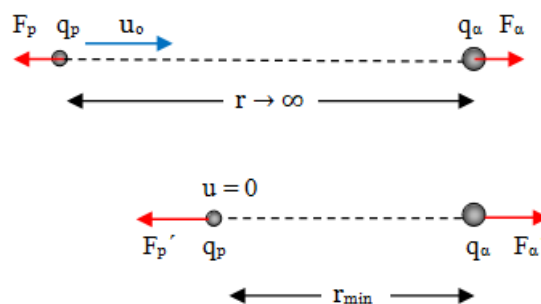
η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη (αφού στη συνέχεια το πρωτόνιο θα απομακρύνεται).

Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ από τη θέση της εκτόξευσης του πρωτονίου μέχρι τη θέση που μηδενίζεται η ταχύτητά του :

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_p u_0^2 + 0 = 0 + K \frac{q_p q_\alpha}{r_{\min}} \xrightarrow{q_p = |e|, q_\alpha = 2|e|} \frac{1}{2} m_p u_0^2 = K \frac{2|e|^2}{r_{\min}} \Leftrightarrow$$

$$r_{\min} = \frac{4K|e|^2}{m_p u_0^2}.$$



9. (20893) Δύο θετικά φορτισμένα σωματίδια εκτοξεύονται με ταχύτητα ίδιου μέτρου v_0 το ένα εναντίον του άλλου από άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Τα φορτία και οι μάζες των σωματιδίων είναι αντίστοιχα q_1, m και $q_2, 4m$. Όταν η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος γίνει μέγιστη, τα δύο φορτισμένα σωματίδια μάζας m και $4m$ αποκτούν ταχύτητες μέτρου v_1 και v_2 αντίστοιχα, ίσες με:

$$(α) v_1 = \frac{3v_0}{5}, v_2 = \frac{3v_0}{5}, \quad (β) v_1 = \frac{3v_0}{4}, v_2 = \frac{3v_0}{5}, \quad (γ) v_1 = \frac{3v_0}{4}, v_2 = \frac{3v_0}{7}$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος υπολογίζεται από

$$\text{τη σχέση : } U = K_C \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1)$$

Αφού $q_1 > 0, q_2 > 0 \xrightarrow{(1)} U > 0$.

Επομένως, η δυναμική ενέργεια του συστήματος γίνεται μέγιστη τη στιγμή που η απόσταση r μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη ($r = r_{\min}$).

Μεταξύ των σωματιδίων αναπτύσσονται απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις οι οποίες τα επιβραδύνουν (αρχικά).

Το μέτρο της επιβράδυνσης του 1ου είναι μεγαλύτερο από του 2ου

$$\left(|\alpha_1| = \frac{F}{m}, |\alpha_2| = \frac{F}{4m} \Rightarrow |\alpha_1| > |\alpha_2| \right).$$

Κάποια στιγμή θα μηδενιστεί η ταχύτητα του 1ου και στη συνέχεια θα αντιστραφεί η φορά κίνησής του, οπότε θα κινούνται προς την ίδια φορά.

Αρχικά το 2ο θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα, με αποτέλεσμα να μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Αφού το 1ο επιταχύνεται και το 2ο επιβραδύνεται, κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους αποκτούν ίσα μέτρα ($v_1 = v_2 = v$) και στη συνέχεια το 1ο θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Επομένως, **η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες.**

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα (βαρυτικές δυνάμεις, αντιστάσεις) είναι ασήμαντες, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική κατάσταση τη στιγμή που εκτοξεύτηκαν και τελική τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες :

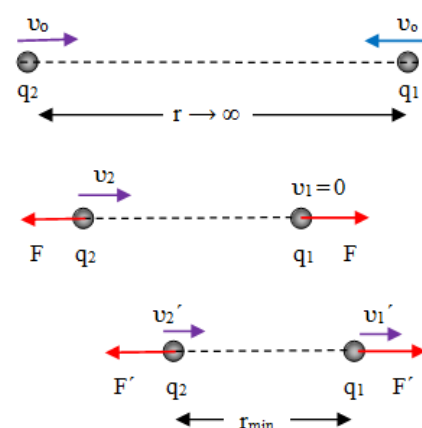
$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow 4mv_0 - mv_0 = (4m+m)v \Leftrightarrow 3mv_0 = 5mv \Leftrightarrow v = \frac{3v_0}{5}.$$

Άρα, τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μέγιστη, οι ταχύτητες των σωματιδίων

$$\text{έχουν μέτρα : } v_1 = v_2 = \frac{3v_0}{5}.$$

Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι δεν υπάρχουν τριβές και οι βαρυτικές δυνάμεις είναι ασήμαντες, ώστε να δεχθούμε ότι το σύστημα είναι μονωμένο.



10. (20895) Από άπειρη απόσταση εκτοξεύουμε ένα αρνητικό φορτίο $q_1 = -2e$ με κινητική ενέργεια K_0 εναντίον ενός μονίμως ακλόνητου αρνητικού φορτίου $q_2 = -2e$. Η απόσταση x από το αρνητικό φορτίο q_2 όπου η κινητική ενέργεια του αρνητικού φορτίου q_1 υποτετραπλασιάζεται είναι:

$$(α) x = \frac{7K_C \cdot e^2}{3K_0}, \quad (β) x = \frac{16K_C \cdot e^2}{3K_0}, \quad (γ) x = \frac{5K_C \cdot e^2}{3K_0}$$

Δίνονται: το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο e και η ηλεκτρική σταθερά K_C .

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αρχικά η απόσταση ανάμεσα στα σωματίδια είναι «άπειρη» με αποτέλεσμα να μην αλληλεπιδρούν.

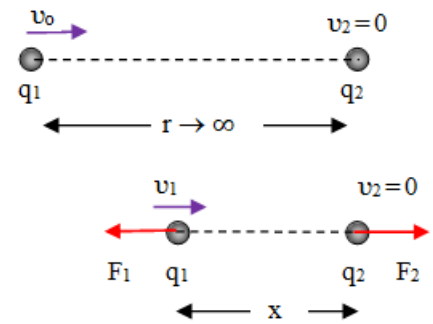
Όταν το 1ο πλησιάσει το 2ο, αναπτύσσονται μεταξύ τους απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις.

Η δύναμη $\vec{F}_1$ που δέχεται το 1ο είναι αντίρροπη από τη ταχύτητα, με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει.

Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ από τη θέση της εκτόξευσης του 1ου μέχρι τη θέση που υποτετραπλασιάζεται η κινητική ενέργεια :

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow K_0 + 0 = \frac{K_0}{4} + K_C \frac{q_1 q_2}{x} \xrightarrow{q_1 = q_2 = -2e} \frac{3K_0}{4} = K_C \frac{4e^2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{16K_C e^2}{3K_0}.$$



Σχόλια :

1) Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίδιο, επομένως δεν έχει μάζα ή κινητική ενέργεια.

Η σωστή διατύπωση είναι : «εκτοξεύουμε ένα σωματίδιο . . . με κινητική ενέργεια K_0 εναντίον ενός ακλόνητου σωματιδίου . . . ».

2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι δεν υπάρχουν τριβές και οι βαρυτικές δυνάμεις είναι ασήμαντες.

11. (21761) Δύο σωματίδια Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 και θετικά φορτία q_1 και q_2 αντίστοιχα συγκρατούνται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο μονωτικό δάπεδο, σε τέτοιες θέσεις ώστε η μεταξύ τους αρχική απόσταση να είναι r . Αν τα σωματίδια αφεθούν ταυτόχρονα ελεύθερα αποκτούν τελικά ταχύτητες μέτρου $v_1 = 4 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$ και $v_2 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}$ αντίστοιχα, όταν η μεταξύ τους απόσταση έχει γίνει $4 \cdot r$. Ο λόγος των κινητικών ενεργειών των δυο σωματιδίων, όταν βρίσκονται σε απόσταση $4 \cdot r$ θα είναι ίσος με:

(α) $\frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{2}$, (β) $\frac{K_1}{K_2} = 2$, (γ) $\frac{K_1}{K_2} = 1$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Τα σωματίδια είναι ομόσημα φορτισμένα, οπότε απωθούνται και απομακρύνονται.

Τη στιγμή που η απόστασή τους είναι $4r$, τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων συνδέονται με τη σχέση :

$$v_1 = 2v_2. \quad (1)$$

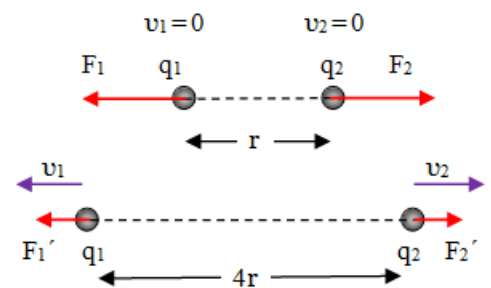
Το σύστημα των δύο σωματιδίων είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$\begin{aligned} p_{ολ(πριν)} &= p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow 0 = -m_1 v_1 + m_2 v_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \xrightarrow{(1)} m_1 \cdot 2v_2 = m_2 v_2 \Rightarrow \\ m_2 &= 2m_1. \quad (2) \end{aligned}$$

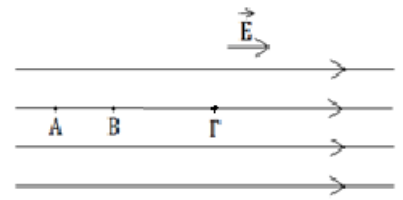
Τη στιγμή που έχουν ταχύτητες $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ το πηλίκο των κινητικών ενεργειών είναι :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \xrightarrow{(1),(2)} \frac{K_1}{K_2} = \frac{m_1}{2m_1} \cdot \left(\frac{2v_2}{v_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = 2.$$



Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

12. (16036) Το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του σχήματος έχει ένταση $\vec{E}$. Τρία σημεία A, B και Γ του πεδίου, ανήκουν στην ίδια δυναμική γραμμή, για τα οποία ισχύει ότι $(B\Gamma) = 2(AB)$. Ένα θετικό ηλεκτρικό φορτίο q_1 αφήνεται στο σημείο A ελεύθερο να κινηθεί. Το έργο της δύναμης του πεδίου για να μεταβεί το ηλεκτρικό φορτίο q_1 από το σημείο A στο B είναι $W_{AB} = 10\text{J}$. Η κινητική ενέργεια K_Γ , που θα αποκτήσει το φορτίο q_1 όταν φτάσει στο σημείο Γ είναι :



- (α) $K_\Gamma = 10\text{J}$, (β) $K_\Gamma = 20\text{J}$, (γ) $K_\Gamma = 30\text{J}$.
Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το φορτισμένο σωματίδιο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη μέτρου $F = E|q_1|$. (1)

Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση του σωματιδίου από το A στο B είναι:

$$W_{AB} = F(AB) \xrightarrow{(1)} W_{AB} = E|q_1|(AB). \quad (2)$$

Η απόσταση $(A\Gamma)$ είναι : $(A\Gamma) = (AB) + (B\Gamma) = (AB) + 2(AB) \Rightarrow (A\Gamma) = 3(AB)$. (3)

Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση του σωματιδίου από το A στο Γ είναι :

$$W_{A\Gamma} = E|q_1|(A\Gamma) \xrightarrow{(3)} W_{A\Gamma} = 3E|q_1|(AB). \quad (4)$$

Με σύγκριση των σχέσεων (2), (4) προκύπτει : $W_{A\Gamma} = 3W_{AB} = 30\text{J}$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το A στο Γ :

$$K_\Gamma - K_A = W_{A\Gamma} \Rightarrow K_\Gamma = W_{A\Gamma} = 30\text{J}.$$

Σχόλιο

Οι διατυπώσεις «ένα φορτίο . . . αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί», «για να μεταβεί το ηλεκτρικό φορτίο», «η κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει το φορτίο» δεν είναι σωστές.

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίδιο.

13. (16047) Οι δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, έντασης μέτρου $E = 5 \cdot 10^2 \text{ N/C}$, έχουν κατεύθυνση προς τις θετικές τιμές του άξονα x . Το δυναμικό στη θέση $x = +5 \text{ m}$ είναι 2500 V .

Ποια η τιμή του δυναμικού στη θέση $x = +2 \text{ m}$;

(α) 3000 V ,

(β) 4000 V ,

(γ) 5000 V .

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Έστω A το σημείο στη θέση $x_A = +5 \text{ m}$ και B το σημείο στη θέση $x_B = +2 \text{ m}$.

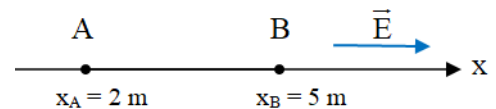
Η απόσταση των σημείων A, B είναι :

$$(AB) = x_B - x_A = 5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 3 \text{ m}.$$

Κατά τη φορά της δυναμικής γραμμής το δυναμικό ελαττώνεται, άρα : $V_B < V_A$ ή $V_A > V_B$.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A, B και το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου συνδέονται με τη σχέση :

$$V_{AB} = E(AB) \Leftrightarrow V_A - V_B = E(AB) \Leftrightarrow V_A = V_B + E(AB) \Rightarrow V_A = 2500 \text{ V} + 5 \cdot 10^2 \cdot 3 \text{ V} \Rightarrow V_A = 4000 \text{ V}.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση χρησιμοποιεί το ίδιο σύμβολο x για δύο διαφορετικές θέσεις.

14. (16048) Δίνεται το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του παρακάτω σχήματος, το οποίο έχει ένταση $\vec{E}$.

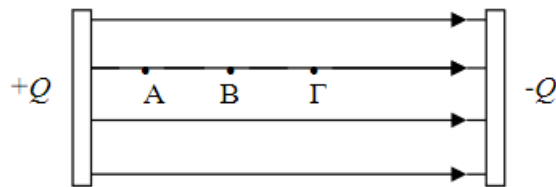
Για τα τρία σημεία A, B, Γ του πεδίου τα οποία ανήκουν στην ίδια δυναμική γραμμή ισχύει ότι $(AB) = (B\Gamma)$.

Για τις διαφορές δυναμικού V_{AB} και $V_{A\Gamma}$, ανάμεσα στα σημεία A, B και A, Γ αντίστοιχα ισχύει:

$$(\alpha) \frac{V_{AB}}{V_{A\Gamma}} = 2, \quad (\beta) \frac{V_{AB}}{V_{A\Gamma}} = \frac{1}{4},$$

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



$$(\gamma) \frac{V_{AB}}{V_{A\Gamma}} = \frac{1}{2}.$$

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A, B είναι : $V_{AB} = E(AB)$. (1)

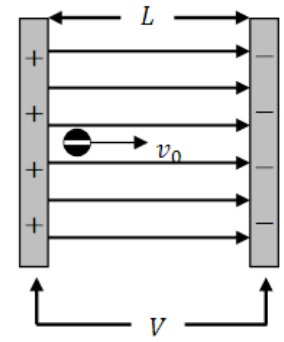
Η απόσταση μεταξύ των σημείων A, Γ είναι : $(A\Gamma) = (AB) + (B\Gamma) = 2(AB)$. (2)

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A, Γ είναι : $V_{A\Gamma} = E(A\Gamma) \xrightarrow{(2)} V_{A\Gamma} = 2E(AB)$. (3)

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (3) :

$$\frac{V_{AB}}{V_{A\Gamma}} = \frac{E(AB)}{2E(AB)} \Rightarrow \frac{V_{AB}}{V_{A\Gamma}} = \frac{1}{2}.$$

15. (16106) Φορτισμένο σωματίδιο μάζας m με αρνητικό φορτίο q βάλλεται με αρχική ταχύτητα v_0 παράλληλα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς πεδίου έντασης $E \rightarrow$ και ομόρροπα με αυτές όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το πεδίο δημιουργείται ανάμεσα σε δύο φορτισμένες πλάκες που παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού V και απέχουν απόσταση L . Θεωρούμε το βάρος του σωματιδίου αμελητέο.



Η απόσταση s_{stop} που θα διανύσει το σωματίδιο μέχρι να ακινητοποιηθεί είναι:

α. $s_{stop} = \frac{v_0 mL}{|q|V}$, β. $s_{stop} = \frac{v_0 mL}{2|q|V}$, γ. $s_{stop} = \frac{v_0^2 mL}{2|q|V}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

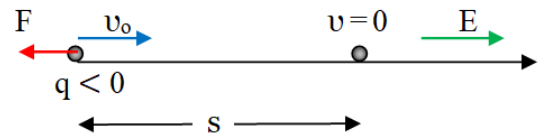
Το σωματίδιο έχει αρνητικό φορτίο, άρα η ηλεκτρική δύναμη έχει αντίθετη φορά από την ένταση του πεδίου, με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει.

Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση :

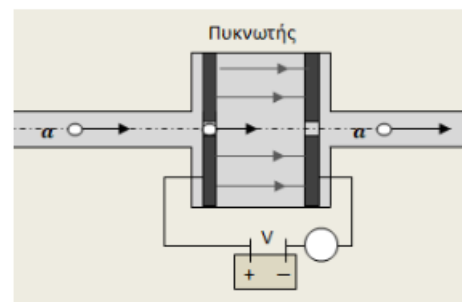
$$F = E|q| = \frac{V|q|}{L}. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση εκτόξευσης μέχρι τη θέση που μηδενίζεται (στιγμιαία) η ταχύτητα :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\eta\lambda} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -F \cdot s \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{V|q|}{L} \cdot s \Leftrightarrow s = \frac{mv_0^2 L}{2|q|V}.$$



16. (16115) Τα σωμάτια α είναι σωματίδια που αποτελούνται από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Σε τμήμα επιταχυντή σωματιδίων, σωμάτια α που κινούνται οριζόντια, ευθύγραμμα και ομαλά, χωρίς να δέχονται δυνάμεις αντίστασης, διαπερνούν κάθετα μια επίπεδη μεταλλική πλάκα, από κατάλληλη οπή και εξέρχονται επίσης κάθετα διαπερνώντας μια δεύτερη μεταλλική επιφάνεια που βρίσκεται απέναντι, σε σταθερή απόσταση από την πρώτη, από κατάλληλη οπή που υπάρχει και σε αυτή.



Τα σωμάτια α κινούνται πάντα ευθύγραμμα και οι δύο οπές βρίσκονται στην ευθεία της κίνησης των σωματιδίων, όπως στην εικόνα. Το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου είναι το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο ($q_p = e$). Μεταξύ των δύο κατακόρυφων μεταλλικών πλακών, δημιουργείται ομογενές **ηλεκτρικό πεδίο με κατεύθυνση** ίδια με αυτή της κίνησης των σωματιδίων, με αυτόματη ενεργοποίηση κατάλληλης τάσης V , τη στιγμή ακριβώς που ένα σωματίο α εισέρχεται στο χώρο μεταξύ των δύο πλακών και καταργείται με απενεργοποίησή της, όταν αυτό εξέρχεται από το χώρο αυτό.

Ένα σωματίο α εισέρχεται στο ομογενές πεδίο με κινητική ενέργεια $K_0 = 500 \text{ eV}$ και εξέρχεται από αυτό με διπλάσια κινητική ενέργεια. Η τάση που εφαρμόστηκε μεταξύ των μεταλλικών πλακών κατά το πέρασμα του σωματιδίου από το χώρο μεταξύ τους, ήταν:

(α) $V = 250 \text{ V}$, (β) $V = 500 \text{ V}$, (γ) $V = 1000 \text{ V}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το ηλεκτρικό φορτίο ενός σωματίου α είναι: $q = 2q_p = 2e$. (1)

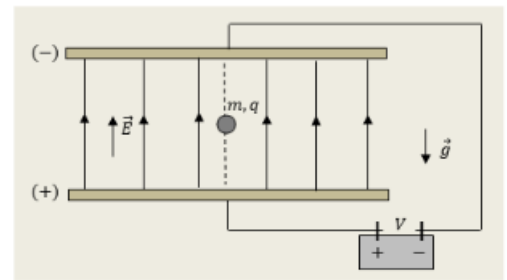
Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σωματίου από το σημείο εισόδου στο ηλεκτρικό πεδίο μέχρι το σημείο εξόδου από αυτό:

$$K - K_0 = W_{\eta\lambda} \Leftrightarrow 2K_0 - K_0 = qV \Leftrightarrow V = \frac{K_0}{q} \xrightarrow{(1)} V = \frac{500 \text{ eV}}{2e} \Rightarrow V = 250 \text{ V}.$$

Σχόλια

- 1) Τα σωμάτια α δεν είναι «σωματίδια» (δεν είναι στοιχειώδη).
- 2) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μία περιοχή του χώρου και δεν έχει κατεύθυνση.
- 3) Η έννοια του ηλεκτρονιοβόλτ (eV) δεν περιλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη, συνεπώς η ερώτηση είναι εκτός ύλης.

17. (16117) Με τη βοήθεια δύο οριζόντιων μεταλλικών πλακών που συγκρατούνται σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους, δημιουργήσαμε **κατακόρυφο** και ομογενές **ηλεκτρικό πεδίο**, φορτίζοντας τις δύο πλάκες, δημιουργώντας τάση V μεταξύ τους, όπως στη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Ένα μικρό μεταλλικό σφαιρίδιο, μάζας m , θετικά φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο q , ισορροπεί ακίνητο μέσα στο κατακόρυφο αυτό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Στην περιοχή η ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης είναι g και οι δυνάμεις από τον αέρα στο σφαιρίδιο, μπορούν να αγνοηθούν.

Αν μπορούσαμε να διπλασιάσουμε ακαριαία την τάση μεταξύ των μεταλλικών πλακών ($V' = 2 \cdot V$), χωρίς να αλλάξουμε την πολικότητά τους, τότε το σφαιρίδιο:

- (α) θα άρχιζε να κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση a μέτρου $a = g$.
- (β) θα εξακολουθούσε να ισορροπεί ακίνητο.
- (γ) θα άρχιζε να κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση a μέτρου $a = g$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4
Μονάδες 8

Απάντηση

Το σφαιρίδιο δέχεται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και τη δύναμη $\vec{F}$ από το ηλεκτρικό πεδίο, που έχει μέτρο : $F = E|q|$.

Αφού το σφαιρίδιο έχει θετικό φορτίο, η ηλεκτρική δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση $\vec{E}$, δηλαδή κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.

Αρχικά το σφαιρίδιο ισορροπεί, άρα ισχύει :

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - B = 0 \Leftrightarrow F = B \Leftrightarrow E|q| = mg. \quad (1)$$

Από τη σχέση $E = \frac{V}{d}$ συμπεραίνουμε ότι αν διπλασιάσουμε την τάση V μεταξύ των πλακών, θα

διπλασιαστεί και το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου : $E' = 2E$.

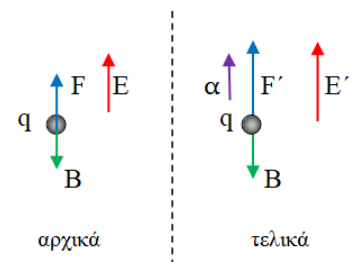
$$\text{Άρα : } F_{\eta\lambda}' = E'|q| = 2E|q| \xrightarrow{(1)} F_{\eta\lambda}' = 2mg. \quad (2)$$

Αφού $F_{\eta\lambda}' > mg$, το σφαιρίδιο θα κινηθεί προς τα πάνω.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F' - B = ma \xrightarrow{(2)} 2mg - mg = ma \Leftrightarrow mg = ma \Leftrightarrow a = g.$$

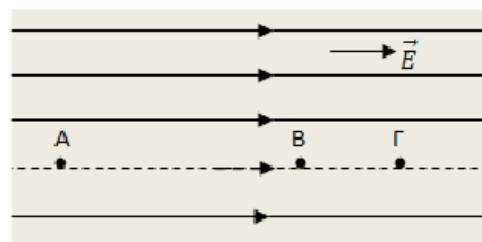
Επομένως, το σφαιρίδιο θα κινηθεί προς τα πάνω με επιτάχυνση μέτρου $a = g$.



Σχόλιο : Η έκφραση «κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο» είναι λάθος.

Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κατακόρυφες.

18. (16226) Τρία σημεία A, B και Γ, βρίσκονται πάνω σε μια δυναμική γραμμή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης $\vec{E}$ όπως στο σχήμα. Για τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων που ορίζουν τα τρία αυτά σημεία ισχύει η σχέση $AG = 4(BG)$. Αν τα δυναμικά των σημείων A και Γ του ηλεκτρικού πεδίου είναι $V_A = 20 \text{ V}$ και $V_\Gamma = 4 \text{ V}$, τότε το δυναμικό του σημείου B είναι:



- (α) $V_B = 16 \text{ V}$, (β) $V_B = 8 \text{ V}$ (γ) $V_B = 12 \text{ V}$.
A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η απόσταση μεταξύ των σημείων A, Γ είναι : $(AG) = 4(BG)$. (1)

Για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A, Γ και το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου ισχύει :

$$V_{AG} = E(AG) \xrightarrow{(1)} V_{AG} = 4E(BG). \quad (2)$$

Για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων B, Γ και το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου ισχύει :

$$V_{BG} = E(BG). \quad (3)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τη σχέση (3) με τη σχέση (2) :

$$\begin{aligned} \frac{V_{BG}}{V_{AG}} &= \frac{E(BG)}{4E(BG)} \Leftrightarrow \frac{V_{BG}}{V_{AG}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_{BG} = \frac{V_{AG}}{4} \Leftrightarrow V_B - V_\Gamma = \frac{V_A - V_\Gamma}{4} \Leftrightarrow V_B = V_\Gamma + \frac{V_A - V_\Gamma}{4} = \frac{3V_\Gamma + V_A}{4} \\ \Rightarrow V_B &= \frac{(12 + 20) \text{ V}}{4} \Rightarrow V_B = 8 \text{ V}. \end{aligned}$$

19. (16243) Φορτίο q αφήνεται να μετακινηθεί απόσταση 2 m κατά μήκος δυναμικής γραμμής ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης $E = 10^3\text{ N/C}$. Στο φορτίο ασκείται δύναμη μόνο από το ηλεκτρικό πεδίο, η επίδραση της βαρύτητας και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ της αρχικής και τελικής του θέσης ισούται με:

(α) $5 \cdot 10^2\text{ V}$, (β) $3 \cdot 10^2\text{ V}$, (γ) $2 \cdot 10^3\text{ V}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A, B που βρίσκονται στην ίδια δυναμική γραμμή και το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου συνδέονται με τη σχέση :

$$V_{AB} = E(AB) = \left(10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \cdot (2\text{ m}) \Rightarrow V_{AB} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{C}} \quad \text{ή} \quad V_{AB} = 2 \cdot 10^3\text{ V}.$$

Σχόλιο

Η διατύπωση «φορτίο q αφήνεται να μετακινηθεί» δεν είναι σωστή.

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίδιο.

$$(\alpha) \ v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_1, \quad (\beta) \ v_2 = \sqrt{2} v_1, \quad (\gamma) \ v_2 = 2 v_1.$$

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του ηλεκτρονίου στα δύο ηλεκτρικά πεδία..

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\eta\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = qV_1 \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{2qV_1}{m}. \quad (1)$$
$$K_{\tau\epsilon\lambda}' - K_{\alpha\rho\chi}' = W_{\eta\lambda}' \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = qV_2 \Leftrightarrow v_2^2 = \frac{2qV_2}{m} \xrightarrow{V_2=2V_1} v_2^2 = 2 \cdot \frac{2qV_1}{m}. \quad (2)$$
$$v_2^2 = 2v_1^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2}v_1.$$

21. (16707) Αρνητικά φορτισμένο σωματίο αφήνεται να κινηθεί σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μεγάλης έκτασης. Η κατεύθυνση της κίνησης του:

- (α) Συμπίπτει με την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
- (β) Είναι αντίθετη με την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών
- (γ) Είναι κάθετη με την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών

Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

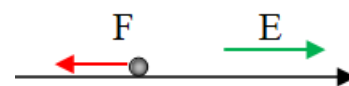
Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το αρνητικά φορτισμένο σωματίο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη αντίρροπη της έντασης του πεδίου.

Αφού είναι αρχικά ακίνητο, θα κινηθεί ευθύγραμμα στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών με φορά αντίθετη από τη φορά των δυναμικών γραμμών.



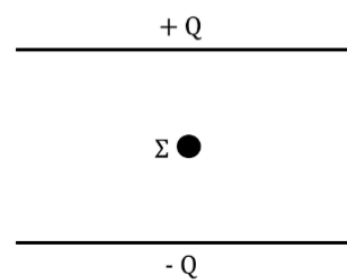
22. (16709) Η διαφορά δυναμικού V μεταξύ δύο οριζόντιων φορτισμένων μεταλλικών πλακών που απέχουν απόσταση ίση με $d = 4 \text{ cm}$ είναι ίση με 400 V . Στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των πλακών, ισορροπεί φορτισμένο σωματίδιο Σ μάζας $m = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$.

Αν θεωρήσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας ίση με 10 m/s^2 , τότε το φορτίο που φέρει το σωματίδιο είναι ίσο με:

(α) $-4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, (β) $-2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, (γ) $2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου και η τάση

μεταξύ των πλακών συνδέονται με τη σχέση: $E = \frac{V}{d}$. (1)

Το φορτισμένο σωματίδιο δέχεται δύο δυνάμεις: Το βάρος και τη δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο.

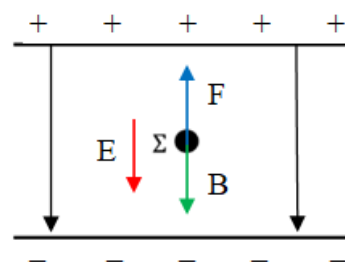
Αφού ισορροπεί, οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες άρα η δύναμη του πεδίου έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω.

$$\text{Ισχύει: } \Sigma F = 0 \Leftrightarrow F = B \Leftrightarrow E|q| = mg \xrightarrow{(1)} \frac{V}{d}|q| = mg \Leftrightarrow |q| = \frac{mgd}{V}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } |q| = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}}{4 \cdot 10^2 \frac{\text{J}}{\text{C}}} \Rightarrow |q| = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$

Αφού η ηλεκτρική δύναμη έχει αντίθετη φορά από την ένταση του πεδίου, άρα το φορτίο είναι αρνητικό.

Επομένως: $q = -2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$.



23. (16734) Ηλεκτρόνια με απόλυτο φορτίο e , που είναι αρχικά ακίνητα μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, επιταχύνονται μεταξύ δύο σημείων που έχουν διαφορά δυναμικού V και αποκτούν ταχύτητα u .

Η ταχύτητα που θα αποκτήσουν μεταξύ δύο σημείων που έχουν διαφορά δυναμικού $4V$ θα είναι

(α) $2u$, (β) $4u$, (γ) u .

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του ηλεκτρονίου στις δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ηλ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m u^2 = eV \Leftrightarrow u^2 = \frac{2eV}{m}. \quad (1)$$

2η περίπτωση

$$K'_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W'_{\text{ηλ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m u'^2 = eV' \Leftrightarrow u'^2 = \frac{2eV'}{m} \xrightarrow{V'=4V} u'^2 = 4 \cdot \frac{2eV}{m}. \quad (2)$$

Με σύγκριση των σχέσεων (1), (2) προκύπτει :

$$u'^2 = 4u^2 \Rightarrow u' = 2u.$$

Σχόλιο : Η διατύπωση «Η ταχύτητα που θα αποκτήσουν μεταξύ δύο σημείων που έχουν διαφορά δυναμικού $4V$. . . », είναι λάθος.

Το σωστό είναι : «Η ταχύτητα που θα αποκτήσουν **όταν επιταχυνθούν** μεταξύ δύο σημείων που έχουν διαφορά δυναμικού $4V$. . . ».

24. (16737) Δέσμη ηλεκτρονίων εκτοξεύεται με ταχύτητα u_0 κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου και κατά την έξοδο από το πεδίο, η δέσμη έχει απόκλιση $y_{\max} = 4\text{cm}$.

Αν διπλασιάσουμε την ταχύτητα εκτόξευσης της δέσμης στο πεδίο, τότε η απόκλιση στην έξοδο θα είναι
(α) 1cm , (β) 4cm , (γ) 8cm

A. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

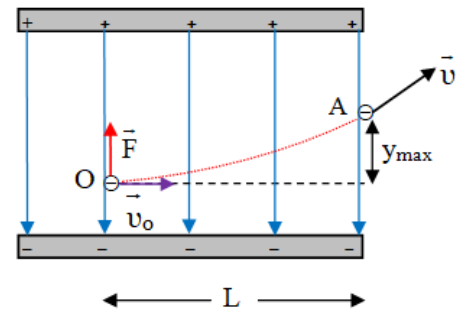
B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Κάθε ηλεκτρόνιο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}$ αντίρροπη από την ένταση $\vec{E}$, άρα θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$ αντίρροπη από τις δυναμικές γραμμές.

Το ηλεκτρόνιο εκτελεί σύνθετη κίνηση που μπορεί να αναλυθεί σε δύο κινήσεις : μία ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα μέτρου u_0 σε διεύθυνση κάθετη στις δυναμικές γραμμές (άξονας x) και μία ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών (άξονας y).



άξονας x

Η μετατόπιση σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση : $x = u_0 t$. (1)

Τη στιγμή t_1 που βγαίνει από το πεδίο έχει μετακινηθεί κατά $x = L$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει : $L = u_0 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{L}{u_0}$. (2)

άξονας y

Για τη μετατόπιση στον άξονα y ισχύει :

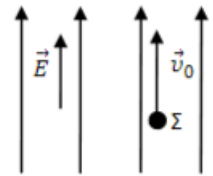
$$y = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow y_{\max} = \frac{1}{2} a t_1^2 \xrightarrow{(2)} y_{\max} = \frac{1}{2} a \frac{L^2}{u_0^2} \quad \text{ή} \quad y_{\max} = \frac{a L^2}{2 u_0^2}. \quad (3)$$

Στην περίπτωση που το ηλεκτρόνιο έχει αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0' = 2u_0$, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι τη στιγμή που βγαίνει από το πεδίο θα έχει απόκλιση :

$$y_{\max}' = \frac{a L^2}{2 (2u_0)^2} \Rightarrow y_{\max}' = \frac{1}{4} \cdot \frac{a L^2}{2 u_0^2}. \quad (4)$$

Από τη σύγκριση των σχέσεων (3), (4) προκύπτει : $y_{\max}' = \frac{1}{4} y_{\max} \Rightarrow y_{\max}' = \frac{1}{4} \cdot 4\text{cm} \Rightarrow y_{\max}' = 1\text{cm}$.

25. (16867) Σε σημείο Σ ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, έντασης $\vec{E}$, εκτοξεύεται κάποια στιγμή ηλεκτρόνιο με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ παράλληλη και ομόρροπη με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου όπως στο σχήμα.



Οι βαρυτικές δυνάμεις και κάθε μορφής αντιστάσεις στη κίνηση του ηλεκτρονίου μπορούν να αγνοηθούν. Το ηλεκτρόνιο επιστρέφει στο αρχικό σημείο μετά από χρονικό διάστημα Δt_1 από τη στιγμή που εκτοξεύτηκε.

Αν η ένταση του πεδίου ήταν διπλάσια, και το ηλεκτρόνιο εκτοξευόταν με την ίδια αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$, θα επέστρεφε στο αρχικό σημείο εκτόξευσης, μετά από χρονικό διάστημα Δt_2 από τη στιγμή της εκτόξευσής του, για το οποίο ισχύει:

(α) $\Delta t_2 = \Delta t_1$, (β) $\Delta t_2 = 2\Delta t_1$, (γ) $\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1}{2}$.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

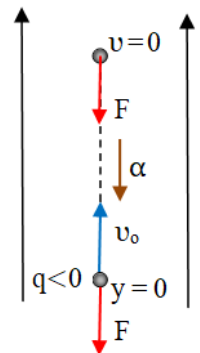
Μονάδες 9

Απάντηση

Το ηλεκτρόνιο δέχεται σταθερή δύναμη $\vec{F}$ αντίρροπη από την ένταση $\vec{E}$ του πεδίου και θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ αντίρροπη από την αρχική ταχύτητα. Επομένως εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Η κατακόρυφη μετατόπιση y υπολογίζεται από τη σχέση: $y = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2$, (1)

(α : το μέτρο της επιτάχυνσης).



Τη στιγμή που επιστρέφει στο σημείο εκτόξευσης, είναι: $y = 0 \xrightarrow{(1)}$

$$v_0 t_{ολ} - \frac{1}{2} \alpha t_{ολ}^2 = 0 \Leftrightarrow t_{ολ} (v_0 - \frac{1}{2} \alpha t_{ολ}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_{ολ} = 0, \text{ απορρίπτεται} \\ \frac{1}{2} \alpha t_{ολ} = v_0 \Rightarrow t_{ολ} = \frac{2v_0}{\alpha} \end{cases} \quad (2)$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής: $\alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{E|q|}{m}$. (3)

Με συνδυασμό των σχέσεων (2), (3) προκύπτει: $t_{ολ} = \frac{2v_0}{\frac{E|q|}{m}} \Rightarrow t_{ολ} = \frac{2mv_0}{E|q|}$. (4)

Εφαρμόζουμε τη σχέση (4) στις δύο περιπτώσεις.

$$\Delta t_1 = \frac{2mv_0}{E|q|}. \quad (5)$$

$$\Delta t_2 = \frac{2mv_0}{2E|q|} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{mv_0}{E|q|}. \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5), (6) προκύπτει: $\Delta t_1 = 2(\Delta t_2) \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta t_1}{2}$.

26. (19227) Ηλεκτρόνιο εισέρχεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$, με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ ίδιας κατεύθυνσης με αυτήν των δυναμικών γραμμών. Θεωρήστε αμελητέες τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

Δίνονται : m η μάζα του ηλεκτρονίου και e το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο.

Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου θα μηδενιστεί στιγμιαία τη χρονική στιγμή t , που είναι ίση με:

(α) $\frac{mv_0}{eE}$, (β) $\frac{mv_0}{2eE}$, (γ) $\frac{2mv_0}{eE}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το ηλεκτρόνιο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $F = Ee$, αντίρροπη από την ένταση $\vec{E}$ του πεδίου και θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ αντίρροπη από την αρχική ταχύτητα (επιβράδυνση).

Επομένως εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (μέχρι να σταματήσει).

Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_0 - \alpha t$ (1)

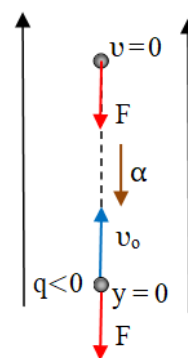
(α : το μέτρο της επιβράδυνσης).

Για $v = 0 \xrightarrow{(1)} v_0 - \alpha t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{\alpha}$. (2)

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζουμε το μέτρο της επιβράδυνσης :

$\alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{Ee}{m}$. (3)

Με συνδυασμό των σχέσεων (2), (3) προκύπτει : $t_1 = \frac{v_0}{\frac{Ee}{m}} \Rightarrow t_1 = \frac{mv_0}{Ee}$.



27. (20639) Δύο σημεία A και B ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που δεν ανήκουν στην ίδια δυναμική γραμμή έχουν δυναμικά V_A και V_B αντίστοιχα και ισχύει ότι $V_A = -3,5V_B$. Ένα άλλο σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία AB έτσι ώστε να ισχύει $(A\Gamma) = 2 \cdot (\Gamma B)$.

Το δυναμικό V_Γ , του σημείου Γ, είναι:

$$(\alpha) \quad V_\Gamma = \frac{V_B}{2}, \quad (\beta) \quad V_\Gamma = -\frac{V_B}{2}, \quad (\gamma) \quad V_\Gamma = \frac{V_B}{3}.$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

1ος τρόπος

Έστω ότι ένα σωματίδιο με θετικό φορτίο q μετακινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB, από το A προς το B.

Στη διάρκεια της μετακίνησης η δύναμη του πεδίου έχει σταθερό μέτρο $F = qE$ και παράγει έργο.

Ισχύουν οι σχέσεις :

Διαδρομή A→Γ

$$\left. \begin{aligned} W_{A\Gamma} &= q(V_A - V_\Gamma) \\ W_{A\Gamma} &= qE(A\Gamma)\cos\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_A - V_\Gamma = E(A\Gamma)\cos\theta. \quad (1)$$

Διαδρομή Γ→B

$$\left. \begin{aligned} W_{\Gamma B} &= q(V_\Gamma - V_B) \\ W_{\Gamma B} &= qE(\Gamma B)\cos\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_\Gamma - V_B = E(\Gamma B)\cos\theta. \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{V_A - V_\Gamma}{V_\Gamma - V_B} = \frac{(A\Gamma)}{(\Gamma B)} \Leftrightarrow \frac{V_A - V_\Gamma}{V_\Gamma - V_B} = 2 \Leftrightarrow V_A - V_\Gamma = 2V_\Gamma - 2V_B \Leftrightarrow 3V_\Gamma = V_A + 2V_B \Leftrightarrow$$

$$V_\Gamma = \frac{V_A + 2V_B}{3} \Rightarrow V_\Gamma = \frac{-3,5V_B + 2V_B}{3} \Rightarrow V_\Gamma = -\frac{V_B}{2}.$$

2ος τρόπος

Από το A φέρνουμε το AΔ κάθετο στη δυναμική γραμμή που διέρχεται από το B και από το Γ φέρνουμε το ΓΖ κάθετο στο AΔ.

Για το μέτρο της έντασης $\vec{E}$ και τις διαφορές δυναμικού μεταξύ των σημείων A, Γ, B ισχύουν οι σχέσεις :

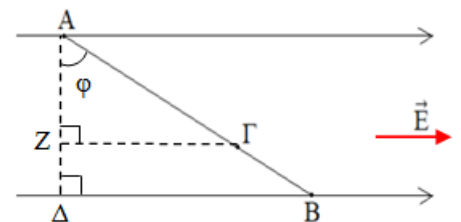
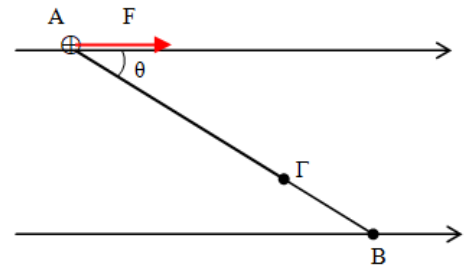
$$E = \frac{V_A - V_\Gamma}{(Z\Gamma)} = \frac{V_A - V_\Gamma}{(A\Gamma)\eta\mu\phi} \quad (1)$$

$$E = \frac{V_A - V_B}{(\Delta B)} = \frac{V_A - V_B}{(AB)\eta\mu\phi} \quad (2)$$

Εξισώνοντας τα 2α μέλη των σχέσεων (1), (2) προκύπτει :

$$\frac{V_A - V_\Gamma}{(A\Gamma)\eta\mu\phi} = \frac{V_A - V_B}{(AB)\eta\mu\phi} \xrightarrow{\frac{(A\Gamma)=2(\Gamma B)}{(AB)=3(\Gamma B)}} \frac{V_A - V_\Gamma}{2(\Gamma B)} = \frac{V_A - V_B}{3(\Gamma B)} \Leftrightarrow 3V_A - 3V_\Gamma = 2V_A - 2V_B \Leftrightarrow 3V_\Gamma = V_A + 2V_B$$

$$\Leftrightarrow V_\Gamma = \frac{V_A + 2V_B}{3} \Rightarrow V_\Gamma = \frac{-3,5V_B + 2V_B}{3} \Rightarrow V_\Gamma = -\frac{V_B}{2}.$$



28. (20643) Φορτισμένη σταγόνα λαδιού, βάρους W και ηλεκτρικού φορτίου q , ισορροπεί μέσα σε **κατακόρυφο** ομογενές **ηλεκτρικό πεδίο**, το οποίο έχει δημιουργηθεί σε ένα πάγκο του εργαστηρίου της Φυσικής. Η κατεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι κατακόρυφη προς τα κάτω. Η σταγόνα ισορροπεί υπό την επίδραση μόνο των δυνάμεων που δέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο και από το βαρυντικό πεδίο της Γης. Αν το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι E , τότε το ηλεκτρικό φορτίο q της σταγόνας του λαδιού

(α) είναι θετικό και ισχύει $|q| = \frac{W}{E}$.

β) είναι αρνητικό και ισχύει $|q| = \frac{W}{E}$.

γ) είναι αρνητικό και ισχύει $|q| = \frac{E}{W}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

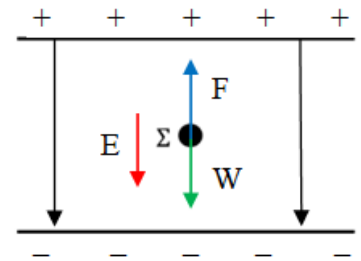
Η φορτισμένη σταγόνα δέχεται δύο δυνάμεις : Το βάρος $\vec{W}$ και τη δύναμη $\vec{F}$ από το ηλεκτρικό πεδίο, που έχει μέτρο $F = E|q|$.

Αφού ισορροπεί, οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες άρα η δύναμη του πεδίου έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω και μέτρο :

$$F = W \Leftrightarrow E|q| = W \Leftrightarrow |q| = \frac{W}{E}.$$

Αφού η ηλεκτρική δύναμη έχει αντίθετη φορά από την ένταση του πεδίου, άρα το φορτίο της σταγόνας είναι αρνητικό.

Σωστή απάντηση : (β).



Σχόλιο

Η διατύπωση «κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο» είναι λανθασμένη.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι περιοχή του χώρου.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κατακόρυφη.

29. (20796) **Ηλεκτρικό φορτίο** $+q$, **μάζας** m , **εκτοξεύεται** κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης E , με αρχική ταχύτητα u_0 .

Η τροχιά που θα ακολουθήσει το φορτίο θα είναι:

- (α) ευθύγραμμη και η ταχύτητά του θα είναι σταθερή
- (β) παραβολική και η επιτάχυνσή του θα είναι σταθερή
- (γ) κυκλική με μεταβαλλόμενη κεντρομόλο επιτάχυνση

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

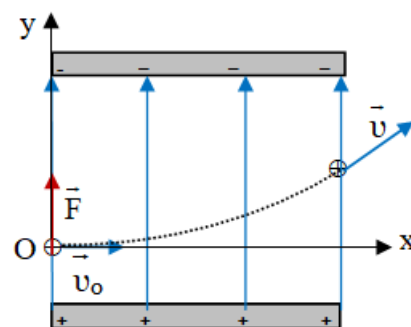
Μονάδες 8

Απάντηση

Το σωματίο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}$ ομόρροπη με την ένταση $\vec{E}$, άρα θα αποκτήσει **σταθερή επιτάχυνση** $\vec{a}$ ομόρροπη

με τις δυναμικές γραμμές, μέτρου : $\alpha = \frac{F}{m} = \frac{E|q|}{m}$.

Το σωματίο εκτελεί σύνθετη κίνηση που μπορεί να αναλυθεί σε δύο κινήσεις : μία ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα μέτρου u_0 σε διεύθυνση κάθετη στις δυναμικές γραμμές (άξονας x) και μία ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών (άξονας y).



άξονας x

Η μετατόπιση σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση : $x = u_0 t$.

Επιλύοντας τη σχέση ως προς t προκύπτει : $t = \frac{x}{u_0}$. (1)

άξονας y

Για τη μετατόπιση στον άξονα y μετά από χρόνο t ισχύει :

$$y = \frac{1}{2} a t^2. \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) το χρόνο t από τη σχέση (1) προκύπτει **η εξίσωση της τροχιάς** :

$$y = \frac{1}{2} a \frac{x^2}{u_0^2} \quad \text{ή} \quad y = \left(\frac{a}{2u_0^2} \right) \cdot x^2.$$

Από τη μαθηματική μορφή της σχέσης ($y = \kappa x^2$, $\kappa = \text{σταθερά}$) συμπεραίνουμε ότι **η τροχιά του σωματίου είναι παραβολική**.

Σχόλια :

1) Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίδιο, επομένως δεν έχει μάζα ή ταχύτητα. Επίσης, η διατύπωση «ηλεκτρικό φορτίο $+q$ » δεν εξασφαλίζει ότι το φορτίο είναι θετικό.

Η σωστή διατύπωση είναι : «Ένα σωματίο που έχει θετικό ηλεκτρικό φορτίο q και μάζα m , εκτοξεύεται ...».

«Η τροχιά που θα ακολουθήσει το σωματίο είναι . . . ».

2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι δεν λαμβάνονται υπ' όψη οι βαρυτικές δυνάμεις και η αντίσταση του αέρα.

30. (20892) Πρωτόνιο μάζας m_p και φορτίου q_p αφήνεται στο σημείο Α, κοντά στη θετική πλάκα του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου του σχήματος. Οι παράλληλες πλάκες απέχουν l μεταξύ τους και έχουν φορτιστεί με τάση V . Το πρωτόνιο κινείται με επιτάχυνση α_1 . Από την ίδια θέση στο ίδιο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο αφήνω ένα φορτίο $q = 4q_p$ και μάζας $m = 2m_p$.

Το φορτίο κινείται με επιτάχυνση α_2 . Ο λόγος των επιταχύνσεων $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ είναι:

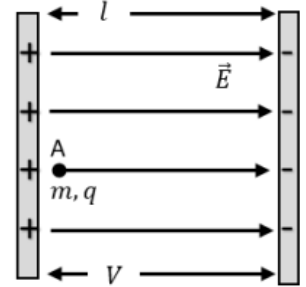
(α) $\frac{1}{2}$, (β) $\frac{2}{3}$, (γ) $\frac{3}{4}$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9



Απάντηση

Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί σε θετικά φορτισμένο σωματίδιο δύναμη μέτρου $F = E|q|$, που έχει την ίδια κατεύθυνση με τις δυναμικές γραμμές.

Στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ισχύει : $E = \frac{V}{l}$.

Επομένως : $F = \frac{V|q|}{l}$.

Δεχόμαστε ότι το βάρος του σωματιδίου είναι αμελητέο, συγκρινόμενο με την ηλεκτρική δύναμη.

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για να υπολογίσουμε το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματιδίου :

$$\Sigma F = m\alpha \Leftrightarrow \frac{V|q|}{l} = m\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{V|q|}{\ell m}. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (1) για κάθε σωματίδιο.

πρωτόνιο

$$\alpha_1 = \frac{V|q_p|}{\ell m_p} \quad (2)$$

σωμάτιο φορτίου q

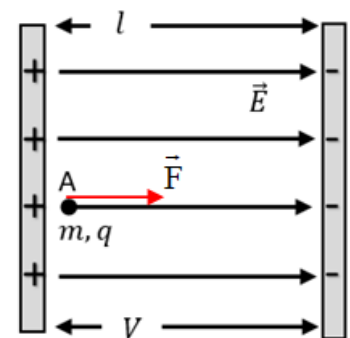
$$\alpha_2 = \frac{V|q|}{\ell m} = \frac{V \cdot 4|q_p|}{\ell \cdot 2m_p} \Leftrightarrow \alpha_2 = 2 \frac{V|q_p|}{\ell m_p}. \quad (3)$$

Με σύγκριση των σχέσεων (2), (3) προκύπτει : $\alpha_2 = 2\alpha_1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2}$.

Σχόλιο :

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίο, επομένως δεν έχει μάζα ή ταχύτητα.

Η σωστή διατύπωση είναι : «...αφήνω ένα σωματίο που έχει φορτίο q και μάζα m ...», «το σωματίο κινείται ...».



31. (20894) Πρωτόνιο μάζας m_p και φορτίου q_p αφήνεται στο σημείο Α, κοντά στη θετική πλάκα του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου του σχήματος. Οι παράλληλες πλάκες απέχουν l μεταξύ τους και έχουν φορτιστεί με τάση V . Το πρωτόνιο φτάνει στην αρνητική πλάκα στο σημείο Γ με ταχύτητα μέτρου v_1 . Από την ίδια θέση στο ίδιο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο αφήνεται ένα θετικό φορτίο $q = 4q_p$ και μάζας $m = 4m_p$.

Το θετικό φορτίο q φτάνει στην αρνητική πλάκα στο σημείο Γ με ταχύτητα μέτρου v_2 .

Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων $\frac{v_1}{v_2}$ είναι ίσος με:

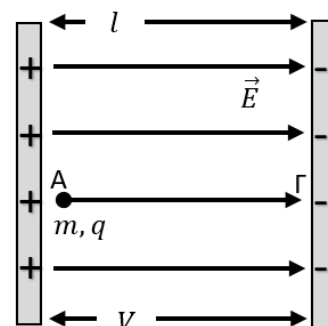
(α) 1, (β) 2, (γ) 3

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8



Απάντηση

Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί σε θετικά φορτισμένο σωματίδιο σταθερή δύναμη, η οποία έχει την ίδια κατεύθυνση με τις δυναμικές γραμμές.

Δεχόμαστε ότι το βάρος του σωματιδίου είναι αμελητέο, συγκρινόμενο με την ηλεκτρική δύναμη.

Κάθε σωματίδιο επιταχύνεται από τάση V και μετακινείται από την θετική πλάκα στην αρνητική.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση κάθε σωματιδίου μέχρι να φτάσει στην αρνητική πλάκα.

πρωτόνιο

$$K_p' - K_p = W_F \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_p v_1^2 - 0 = q_p V \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{2q_p V}{m_p} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}}. \quad (1)$$

σωμάτιο φορτίου q

$$K' - K = W_F' \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - 0 = qV \Leftrightarrow v_2^2 = \frac{2qV}{m} \xrightarrow{m=4m_p, q=4q_p}$$

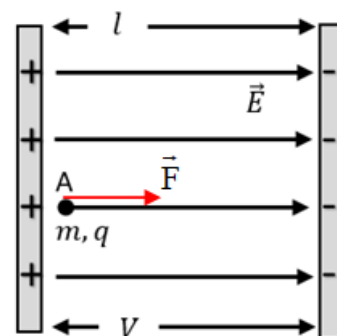
$$v_2^2 = \frac{2 \cdot 4q_p V}{4m_p} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}}. \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι: } v_1 = v_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1.$$

Σχόλιο :

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίο, επομένως δεν έχει μάζα ή ταχύτητα.

Η σωστή διατύπωση είναι: «...αφήνεται ένα σωματίο που έχει θετικό φορτίο q και μάζα m ...», «το σωματίο φτάνει ...».



32. (21173) Θετικά φορτισμένο σωματίδιο επιταχύνεται από την ηρεμία μεταξύ δυο σημείων ηλεκτροστατικού πεδίου που επικρατεί τάση V_0 και στη συνέχεια εισέρχεται κάθετα στις δυναμικές γραμμές άλλου ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, που σχηματίζεται από δύο παράλληλες οριζόντιες μεταλλικές πλάκες. Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις πλάκες είναι V_0 , η μεταξύ τους απόσταση d και το μήκος των πλακών είναι $2d$. Αν βάρος και δυνάμεις αντίστασης αμελούνται, η γωνιακή εκτροπή του σωματιδίου κατά την έξοδο από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι:

(α) 45° , (β) 30° , (γ) 60°

2.2.A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

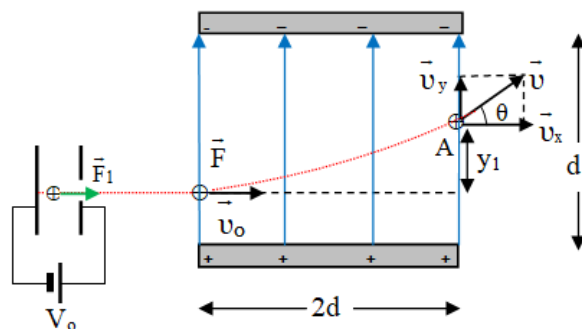
2.2.B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ στο 1ο ηλεκτρικό πεδίο για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_0$ που έχει το σωματίδιο στην έξοδο από το πεδίο :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = q V_0 \Leftrightarrow v_0^2 = \frac{2qV_0}{m}. \quad (1)$$



Στο 2ο ηλεκτρικό πεδίο το σωματίδιο δέχεται σταθερή

δύναμη $\vec{F}$ κάθετη στην αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ και εκτελεί σύνθετη κίνηση, που μπορεί να αναλυθεί σε δύο κινήσεις : μία ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα μέτρου v_0 σε διεύθυνση κάθετη στις δυναμικές γραμμές (άξονας x) και μία ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών (άξονας y).

άξονας x

Η μετατόπιση σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση : $x = v_0 t$. (2)

Τη στιγμή που βγαίνει από το πεδίο, ισχύει : $x = 2d \xrightarrow{(2)} t = \frac{2d}{v_0}$. (3)

άξονας y

Το σωματίδιο αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου : $\alpha = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m} \xrightarrow{E = \frac{V_0}{d}} \alpha = \frac{qV_0}{md}$. (4)

Τη στιγμή που βγαίνει από το πεδίο, η συνιστώσα $\vec{v}_y$ της ταχύτητας στον άξονα y έχει μέτρο :

$$v_y = \alpha t \xrightarrow{(3),(4)} v_y = \frac{2qV_0}{m v_0}. \quad (5)$$

Για τη γωνιακή εκτροπή στην έξοδο ισχύει :

$$\epsilon\phi\theta = \frac{v_y}{v_x} \xrightarrow{(5)} \epsilon\phi\theta = \frac{m v_0}{m v_0^2} = \frac{2qV_0}{m v_0^2} \xrightarrow{(1)} \epsilon\phi\theta = \frac{2qV_0}{m \frac{2qV_0}{m}} \Rightarrow \epsilon\phi\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

33. (21405) Δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες φορτισμένες με αντίθετα φορτία απέχουν απόσταση d και δημιουργούν ανάμεσά τους ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E . Ένα ηλεκτρόνιο με μάζα m και φορτίο $-e$ αφήνεται πολύ κοντά στην αρνητική πλάκα, στο σημείο που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Θεωρώντας το βάρος του ηλεκτρονίου αμελητέο, η ταχύτητα με την οποία θα χτυπήσει το ηλεκτρόνιο στην θετικά φορτισμένη μεταλλική πλάκα είναι:

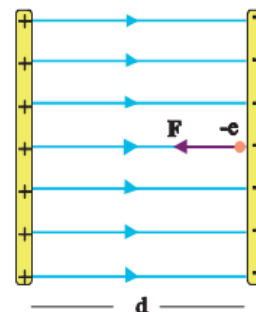
$$(α) u = \sqrt{\frac{Eed}{2m}} \quad , \quad (β) u = \sqrt{\frac{2Eed}{m}} \quad , \quad (γ) u = \sqrt{\frac{Eed}{m}}$$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9



Απάντηση

Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί στο ηλεκτρόνιο σταθερή δύναμη, μέτρου $F = eE$, η οποία έχει την ίδια διεύθυνση με τις δυναμικές γραμμές και φορά από την αρνητική προς τη θετική πλάκα.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του ηλεκτρονίου από την αρνητική πλάκα μέχρι να φτάσει στη θετική πλάκα.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ηλ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = Fd \Leftrightarrow v^2 = \frac{2Fd}{m} \xrightarrow{F=eE} v = \sqrt{\frac{2eEd}{m}}.$$

34. (21693) Σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου E που δημιουργείται μεταξύ δύο αντίθετα φορτισμένων παραλλήλων πλακών αφήνουμε χωρίς αρχική ταχύτητα ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο έτσι ώστε να ισαπέχουν από τις φορτισμένες πλάκες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε ότι η απόσταση των σωματιδίων είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Ποιο από τα δύο σωματίδια θα φτάσει πρώτο σε φορτισμένη πλάκα;

(α) το πρωτόνιο p

(β) το ηλεκτρόνιο e

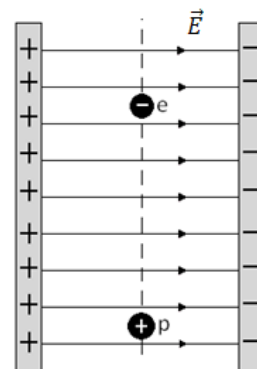
(γ) και τα δύο ταυτόχρονα

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9



Απάντηση

Τα δύο σωματίδια δέχονται αντίρροπες δυνάμεις ίσου μέτρου $F = eE$ και επιταχύνονται ομαλά, στη διεύθυνση των δυναμικών γραμμών.

Το ηλεκτρόνιο αποκτά επιτάχυνση μέτρου $\alpha_e = \frac{eE}{m_e}$ και φτάνει στη θετική

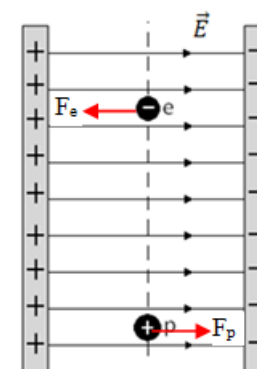
πλάκα σε χρόνο t_e , αφού διανύσει απόσταση $\frac{d}{2}$.

Το πρωτόνιο αποκτά επιτάχυνση μέτρου $\alpha_p = \frac{eE}{m_p}$ και φτάνει στην αρνητική

πλάκα σε χρόνο t_p , αφού διανύσει απόσταση $\frac{d}{2}$.

Γνωρίζουμε ότι $m_e < m_p$, άρα $\alpha_e > \alpha_p$.

Αφού διανύουν ίσες αποστάσεις, το ηλεκτρόνιο που έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση θα φτάσει πρώτο στην αντίστοιχη πλάκα (δηλαδή $t_e < t_p$).



Βαρυτικό πεδίο

1. (14785, 2.2)

Τεχνητός δορυφόρος της Γης διαγράφει ελλειπτική τροχιά, όπως δείχνει το σχήμα.

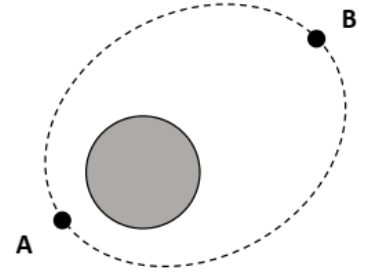
Το σημείο Α είναι το πιο κοντινό στο κέντρο της Γης (περίγειο) και το σημείο Β είναι το πιο απομακρυσμένο από το κέντρο της Γης (απόγειο).

Η μάζα της Γης είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη του δορυφόρου και δεν επηρεάζεται η κινητική της κατάσταση από τον δορυφόρο.

A. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Όταν ο δορυφόρος κινείται από το Α προς το Β το μέτρο της ταχύτητάς του :

- i. Αυξάνεται ii. Μειώνεται iii. Παραμένει σταθερό

B. Να εξηγήσετε πλήρως την απάντησή σας



Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

Έστω M , m οι μάζες της Γης και του δορυφόρου αντίστοιχα και r_π , r_α οι ακτίνες της τροχιάς στο περίγειο και το απόγειο.

Ισχύει : $r_\alpha > r_\pi \Leftrightarrow r_\alpha - r_\pi > 0$.

Θεωρούμε ότι η Γη με τον δορυφόρο αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα σωμάτων.

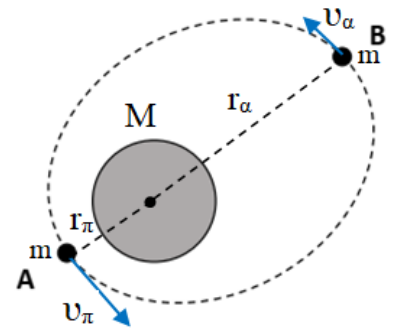
Η μοναδική δύναμη που ασκείται στον δορυφόρο είναι η βαρυτική έλξη της Γης, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για το περίγειο Α και το απόγειο Β :

$$K_A + U_A = K_B + U_B \Leftrightarrow K_A - K_B = U_B - U_A \Rightarrow K_A - K_B = -G \frac{Mm}{r_\alpha} + G \frac{Mm}{r_\pi} = GMm \left(\frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha r_\pi} \right) > 0$$
$$\Rightarrow K_A > K_B.$$

Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου είναι μεγαλύτερο στο περίγειο Α.

Άρα, όταν ο δορυφόρος κινείται από το Α προς το Β, το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα.

Οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

2. (15885) Για τα μέτρα των εντάσεων του πεδίου βαρύτητας της Γης g_A και g_B , σε δύο σημεία του Α και Β αντίστοιχα, ισχύει: $g_A = g_B/4$. Για τις αποστάσεις r_A και r_B των σημείων Α και Β αντίστοιχα, από το κέντρο της Γης, ισχύει:

(α) $r_A = 2r_B$, (β) $r_A = 4r_B$, (γ) $r_A = r_B/2$

Α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης σε απόσταση $r \geq R_\Gamma$ από το κέντρο της υπολογίζεται από τη σχέση :

$$g = G \frac{M_\Gamma}{r^2}.$$

Σημείο Α

$$g_A = G \frac{M_\Gamma}{r_A^2} \quad (1)$$

Σημείο Β

$$g_B = G \frac{M_\Gamma}{r_B^2} \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει : } g_A = \frac{1}{4} g_B \xrightarrow{(1),(2)} G \frac{M_\Gamma}{r_A^2} = \frac{1}{4} G \frac{M_\Gamma}{r_B^2} \Leftrightarrow r_A^2 = 4r_B^2 \Leftrightarrow r_A = 2r_B.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ .

3. (15889) Η διαφορά δυναμικού $V_A - V_B$ δύο σημείων Α και Β αντίστοιχα, ενός πεδίου βαρύτητας είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι:

(α) για να μεταφερθεί σημειακή μάζα m από το σημείο Α στο σημείο Β απαιτείται να προσφερθεί ενέργεια.

(β) για να μεταφερθεί σημειακή μάζα m από το σημείο Α στο σημείο Β δεν απαιτείται να προσφερθεί ενέργεια.

(γ) κατά τη μεταφορά σημειακής μάζας m από το σημείο Α στο σημείο Β, το έργο της δύναμης του πεδίου είναι θετικό.

Α. Να επιλέξετε την σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μεταφορά σωματίου μάζας m από το Α στο Β και η διαφορά δυναμικού $V_A - V_B$ συνδέονται με τη σχέση :

$$W_{A \rightarrow B} = m(V_A - V_B). \quad (1)$$

Αφού $m > 0$ και $V_A - V_B < 0 \xrightarrow{(1)} W_{A \rightarrow B} < 0$.

Άρα πρέπει να προσφερθεί ενέργεια για τη μεταφορά του σωματίου από το Α στο Β.

Σωστή απάντηση : (α).

4. (15977) Τρεις ίσες σημειακές μάζες $m_1 = m$, $m_2 = m$, και $m_3 = m$ βρίσκονται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου με μήκος πλευράς a και έχουν δυναμική ενέργεια βαρύτητας U . Αν σε άλλο ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς $4a$, τοποθετήσουμε στις κορυφές του τις σημειακές μάζες $m_1' = 2m$, $m_2' = 2m$ και $m_3' = 2m$, τότε αυτές θα έχουν

(α) δυναμική ενέργεια μεγαλύτερη της U .

(β) δυναμική ενέργεια μικρότερη της U .

(γ) δυναμική ενέργεια ίση με την U .

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

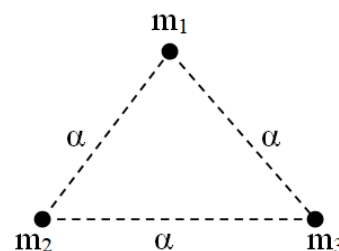
Μονάδες 8

Απάντηση

Η δυναμική ενέργεια του 1ου συστήματος είναι :

$$U = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = -G \frac{m_1 m_2}{a} - G \frac{m_1 m_3}{a} - G \frac{m_2 m_3}{a} \Rightarrow$$

$$U = -G \frac{m^2}{a} - G \frac{m^2}{a} - G \frac{m^2}{a} \Leftrightarrow U = -3G \frac{m^2}{a}. \quad (1)$$



Η δυναμική ενέργεια του 2ου συστήματος είναι :

$$U' = U_{1,2}' + U_{1,3}' + U_{2,3}' = -G \frac{2m \cdot 2m}{4a} - G \frac{2m \cdot 2m}{4a} - G \frac{2m \cdot 2m}{4a} = -G \frac{m^2}{a} - G \frac{m^2}{a} - G \frac{m^2}{a} \Leftrightarrow$$

$$U' = -3G \frac{m^2}{a}. \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow U' = U.$$

5. (15977) Από ύψος $h = R_{\Gamma}$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου R_{Γ} η ακτίνα της Γης, εκτοξεύουμε κατακόρυφα προς τα πάνω ένα σώμα με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = \sqrt{g_0 R_{\Gamma}}$, όπου g_0 το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης. Αν το σώμα κατά την κίνησή του δέχεται μόνο τη δύναμη βαρύτητας, τότε το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας στη θέση όπου η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στιγμιαία είναι:

(α) $-g_0 R_{\Gamma}$, (β) 0, (γ) $-2g_0 R_{\Gamma}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της

$$\text{Γης ισχύει: } g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2. \quad (1)$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ύψος $h = R_{\Gamma}$ είναι :

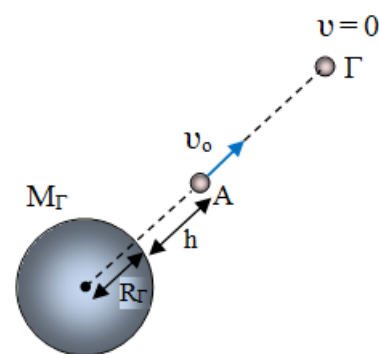
$$V_A = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h} \xrightarrow{(1)} V_A = -\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{2R_{\Gamma}} \Rightarrow V_A = -\frac{g_0 R_{\Gamma}}{2}. \quad (2)$$

Έστω ότι η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στη θέση Γ.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος από το Α στο Γ :

$$W_{\beta(A \rightarrow \Gamma)} = K_{\Gamma} - K_A \Leftrightarrow m(V_{\Gamma} - V_A) = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow V_{\Gamma} - V_A = \frac{1}{2}v_0^2 \Leftrightarrow V_{\Gamma} = \frac{1}{2}v_0^2 + V_A \xrightarrow[\text{(2)}]{v_0 = \sqrt{g_0 R_{\Gamma}}}$$

$$V_{\Gamma} = \frac{1}{2}g_0 R_{\Gamma} - \frac{g_0 R_{\Gamma}}{2} \Rightarrow V_{\Gamma} = 0.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} και ακτίνας R_{Γ} . Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

6. (15998) Δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 συγκρατούνται σε απόσταση r , σε περιοχή μακριά από άλλα βαρυτικά πεδία. Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να μεταφερθούν οι δύο μάζες σε αρκετά μεγάλη απόσταση, ώστε η μεταξύ τους αλληλεπίδραση να γίνει ασήμαντη, είναι:

(α) $-G \frac{m_1 m_2}{r}$, (β) $G \frac{m_1 m_2}{r}$, (γ) 0.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αρχικά τα σωμάτια είναι ακίνητα ($K_{αρχ} = 0$) σε απόσταση r μεταξύ τους και η δυναμική ενέργεια του

συστήματος είναι : $U_{αρχ} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$. (1)

Όταν η απόσταση μεταξύ των σωματίων είναι πολύ μεγάλη, οπότε δεν αλληλεπιδρούν, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι : $U_{τελ} = 0$.

Έστω $W_{απ}$ το έργο της εξωτερικής δύναμης που μετακινεί τα σωμάτια σε «άπειρη» απόσταση.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ : $W_{απ} + W_{β} = K_{τελ} - K_{αρχ} \xrightarrow{K_{αρχ}=0} W_{απ} = K_{τελ} - W_{β}$. (2)

Ισχύει : $W_{β} = U_{αρχ} - U_{τελ} \xrightarrow{U_{τελ}=0} W_{β} = U_{αρχ}$. (3)

Με συνδυασμό των σχέσεων (2), (3) προκύπτει : $W_{απ} = K_{τελ} - U_{αρχ}$.

Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται είναι τόση ώστε τα σωμάτια να μην αποκτήσουν κινητική ενέργεια, δηλαδή : $K_{τελ} = 0$.

Επομένως : $W_{απ(min)} = -U_{αρχ} \xrightarrow{(1)} W_{απ(min)} = G \frac{m_1 m_2}{r}$.

2ος τρόπος

Αρχικά τα σωμάτια είναι ακίνητα ($K_{αρχ} = 0$) σε απόσταση r μεταξύ τους, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι :

$E_{μ(αρχ)} = U_{αρχ} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$. (1)

Όταν η απόσταση μεταξύ των σωματίων είναι πολύ μεγάλη, οπότε δεν αλληλεπιδρούν, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι : $U_{τελ} = 0$, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι :

$E_{μ(τελ)} = K_{τελ}$.

Η ενέργεια που απαιτείται για να μεταφερθούν τα σωμάτια σε «άπειρη» απόσταση υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) : $E_{απ} = E_{μ(τελ)} - E_{μ(αρχ)} = K_{τελ} - U_{αρχ}$.

Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται είναι τόση ώστε τα σωμάτια να μην αποκτήσουν κινητική ενέργεια, δηλαδή : $K_{τελ} = 0$.

Επομένως : $E_{απ(min)} = -U_{αρχ} \xrightarrow{(1)} E_{απ(min)} = G \frac{m_1 m_2}{r}$.

Σχόλιο : Οι διατυπώσεις «δύο σημειακές μάζες συγκρατούνται . . . », «για να μεταφερθούν οι δύο μάζες» δεν είναι σωστές. Η μάζα δεν είναι σώμα αλλά φυσικό μέγεθος.

Η σωστή διατύπωση είναι : «δύο σωμάτια συγκρατούνται ...», «για να μεταφερθούν τα δύο σωμάτια ...».

7. (16064) Δύο σημειακές μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 4m$ βρίσκονται σε απόσταση r . Στο σημείο O που η ένταση του βαρυτικού τους πεδίου είναι μηδέν, το δυναμικό έχει τιμή :

(α) $V_O = -5G \frac{m}{r}$,

(β) $V_O = -9G \frac{m}{r}$,

(γ) $V_O = -15G \frac{m}{r}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το σημείο O που μηδενίζεται η ένταση του πεδίου βαρύτητας των δύο σωματίων, ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα δύο σωματίδια.

Έστω x η απόσταση του O από το 1ο σωματίο.

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$g_1 = G \frac{m_1}{x^2} = G \frac{m}{x^2} \quad (1)$$

$$g_2 = G \frac{m_2}{(r-x)^2} = 4G \frac{m}{(r-x)^2} \quad (2)$$

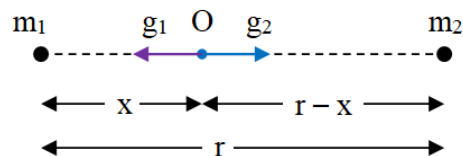
Ισχύει :

$$g_{ολ(O)} = 0 \Leftrightarrow g_1 = g_2 \xrightarrow{(1),(2)} G \frac{m}{x^2} = 4G \frac{m}{(r-x)^2} \Leftrightarrow (r-x)^2 = 4x^2 \xrightarrow{r-x>0, x>0}$$

$$r-x=2x \Leftrightarrow r=3x \Leftrightarrow x=\frac{r}{3}. \quad (3)$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας των δύο σωματίων στο σημείο O είναι :

$$V_O = -G \frac{m_1}{x} - G \frac{m_2}{r-x} \xrightarrow{(3)} V_O = -G \frac{m}{\frac{r}{3}} - G \frac{4m}{\frac{2r}{3}} = -3G \frac{m}{r} - 6G \frac{m}{r} \Rightarrow V_O = -9G \frac{m}{r}.$$



8. (16066) Τρεις σημειακές μάζες m_1 και m_2 και m_3 βρίσκονται στις κορυφές Α, Β και Γ αντίστοιχα, ισόπλευρου τριγώνου με μήκος πλευράς r . Αν υποδιπλασιάσουμε το μήκος κάθε πλευράς του τριγώνου η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών αυτών μαζών:

(α) διπλασιάζεται, (β) τετραπλασιάζεται, (γ) εξαπλασιάζεται.

Α. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

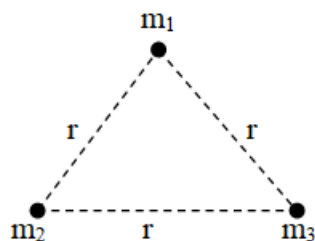
Μονάδες 9

Απάντηση

Αρχικά, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = -G \frac{m_1 m_2}{r} - G \frac{m_1 m_3}{r} - G \frac{m_2 m_3}{r} \Leftrightarrow$$

$$U = -\frac{G}{r} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3). \quad (1)$$



Τελικά, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U' = U_{1,2}' + U_{1,3}' + U_{2,3}' = -G \frac{m_1 m_2}{\frac{r}{2}} - G \frac{m_1 m_3}{\frac{r}{2}} - G \frac{m_2 m_3}{\frac{r}{2}} \Leftrightarrow U' = -2 \frac{G}{r} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3). \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow U' = 2U.$$

9. (16067, 16383) Δύο μαθητές, ο Πέτρος και ο Μάνος, συζητούν για το βαρυτικό πεδίο της Γης. Ο Πέτρος θεωρεί ότι η ένταση του πεδίου, σε οποιοδήποτε σημείο του, έχει μέτρο $10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ενώ ο Μάνος υποστηρίζει ότι η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται με το ύψος και ότι το μέτρο της μειώνεται καθώς το ύψος αυξάνεται. Τελικά,
- (α) ο Μάνος έχει δίκιο, διότι το μέτρο της έντασης σε σημείο του πεδίου βαρύτητας της Γης, μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης του σημείου από το κέντρο της Γης.
- (β) ο Μάνος έχει δίκιο, διότι το μέτρο της έντασης σε σημείο του πεδίου βαρύτητας της Γης μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο του ύψους από την επιφάνεια της Γης.
- (γ) ο Πέτρος έχει δίκιο, αφού το πεδίο βαρύτητας της Γης είναι ομογενές και η έντασή του διατηρεί σταθερό μέτρο και ίσο με $10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ σε κάθε σημείο του.
- A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση. Μονάδες 4
- B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. Μονάδες 8

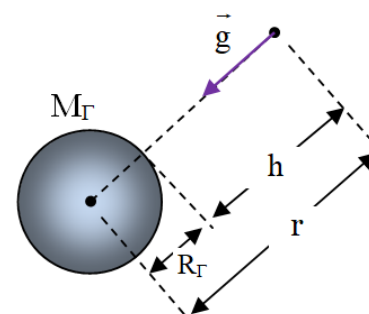
Απάντηση

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης σε απόσταση r από το κέντρο της ($r \geq R_{\Gamma}$), υπολογίζεται από τη σχέση :

$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{r^2}$$

δηλαδή **μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο της Γης.**

Σωστή απάντηση : (α).



Σχόλια :

- 1) Η μονάδα μέτρησης της έντασης g ενός πεδίου βαρύτητας είναι το $1 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}$ και όχι το $1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.
- 2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} και ακτίνας R_{Γ} .

10. (16069) Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h = R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης έχει μέτρο:

(α) $v_\delta = \sqrt{g_o R_\Gamma}$.

(β) $v_\delta = \sqrt{\frac{g_o R_\Gamma}{2}}$,

(γ) $v_\delta = \sqrt{2g_o R_\Gamma}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

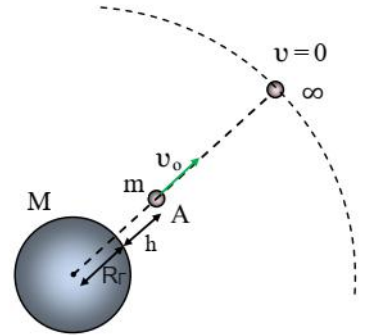
Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της

Γης ισχύει :

$$g_o = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_o R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής v_δ ενός σώματος, όταν εκτοξευτεί από σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h = R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{2R_\Gamma}} = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}} \xrightarrow{(1)} v_\delta = \sqrt{\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma}} \Rightarrow v_\delta = \sqrt{g_o R_\Gamma}.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ .

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι g_o .

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

12. (16071) Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h = 3R_{\Gamma}$ από την επιφάνεια της Γης έχει μέτρο:

(α) $v_{\delta} = \sqrt{g_0 R_{\Gamma}}$,

(β) $v_{\delta} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}}{2}}$.

(γ) $v_{\delta} = \sqrt{2g_0 R_{\Gamma}}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

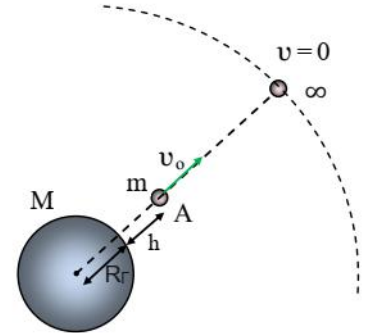
Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της

Γης ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2. \quad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής v_{δ} ενός σώματος από σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h = 3R_{\Gamma}$ από την επιφάνεια της Γης, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{4R_{\Gamma}}} = \sqrt{\frac{GM_{\Gamma}}{2R_{\Gamma}}} \xrightarrow{(1)} v_{\delta} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{2R_{\Gamma}}} \Rightarrow v_{\delta} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}}{2}}.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} και ακτίνας R_{Γ} . Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι g_0 . Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

13. (16083) Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι g_0 και η ακτίνα της Γης είναι R_Γ . Σε ύψος $h = 3R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι:

(α) $\frac{g_0}{16}$, (β) $\frac{g_0}{8}$, (γ) $\frac{g_0}{4}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της υπολογίζεται από τη σχέση :

$$g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}. \quad (1)$$

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης σε σημείο που βρίσκεται σε ύψος $h = 3R_\Gamma$ είναι :

$$g = G \frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2} = G \frac{M_\Gamma}{(4R_\Gamma)^2} = G \frac{M_\Gamma}{16R_\Gamma^2} \xrightarrow{(1)} g = \frac{g_0}{16}.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

14. (16083) Αν ο λόγος των ακτινών σε κυκλική τροχιά δύο δορυφόρων της Γης είναι $\frac{r_1}{r_2} = 4$, τότε ο

αντίστοιχος λόγος των περιόδων περιστροφής τους είναι:

(α) 8, (β) 2, (γ) 4.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Δορυφόρος μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από το κέντρο της Γης, με ταχύτητα μέτρου v .

Η βαρυτική έλξη της Γης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη :

$$F_\beta = F_k \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_\Gamma}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}}. \quad (1)$$

Η περίοδος T της κίνησης του δορυφόρου είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{(1)} T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM_\Gamma}}. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (2) για τους δύο δορυφόρους.

$$T_1 = 2\pi r_1 \sqrt{\frac{r_1}{GM_\Gamma}} \quad (3)$$

$$T_2 = 2\pi r_2 \sqrt{\frac{r_2}{GM_\Gamma}} \quad (4)$$

Από τη σχέση $\frac{r_1}{r_2} = 4$ προκύπτει : $r_1 = 4r_2$.

$$\text{Άρα : } T_1 = 2\pi \cdot 4r_2 \sqrt{\frac{4r_2}{GM_\Gamma}} = 2\pi \cdot 4r_2 \cdot 2 \sqrt{\frac{r_2}{GM_\Gamma}} \Rightarrow T_1 = 8 \cdot \left(2\pi r_2 \sqrt{\frac{r_2}{GM_\Gamma}} \right) \xrightarrow{(4)} T_1 = 8T_2 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 8.$$

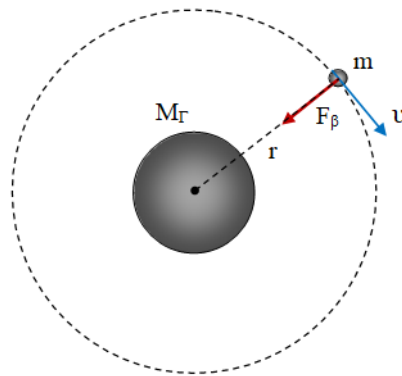
Σχόλια :

1) Η διατύπωση «ο λόγος των ακτινών σε κυκλική τροχιά δύο δορυφόρων της Γης . . . » δεν είναι σωστή.

Η σωστή διατύπωση είναι : «ο λόγος των ακτινών των κυκλικών τροχιών δύο δορυφόρων της Γης . . . ».

2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ .

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.



15. (16096) Το πιο γνωστό, ίσως, διαστημικό τηλεσκόπιο είναι το Hubble, που κινείται σε τροχιά γύρω από τη Γη σε ύψος $h_H = \frac{R_\Gamma}{12}$ (όπου R_Γ η ακτίνα της Γης).

Το πρώτο, όμως, διαστημικό τηλεσκόπιο που έθεσε σε σχεδόν κυκλική τροχιά η NASA ήταν το τηλεσκόπιο OAO 2 (Orbiting Astronomical Observatory 2) το 1968, μόλις τρεις εβδομάδες πριν από την πρώτη επανδρωμένη αποστολή στη Σελήνη. Το τηλεσκόπιο αυτό τέθηκε σε δορυφορική τροχιά γύρω από τη Γη, σε ύψος $h_O = \frac{R_\Gamma}{8}$ από την επιφάνειά της (όπου R_Γ η ακτίνα της Γης).

Αν θεωρήσετε, ως v_O το μέτρο της ταχύτητας με την οποία κινούνταν το OAO 2 και v_H το μέτρο της ταχύτητας του τηλεσκοπίου Hubble, τότε ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων $\frac{v_O}{v_H}$ είναι ίσος με:

(α) $\sqrt{\frac{26}{27}}$, (β) $\sqrt{\frac{27}{26}}$, (γ) $\sqrt{\frac{8}{12}}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ένας δορυφόρος της Γης μάζας m κινείται σε (σχεδόν) κυκλική τροχιά ακτίνας r ίσης με την απόστασή του από το κέντρο της Γης.

Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη :

$$F_\beta = F_k \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_\Gamma}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}}. \quad (1)$$

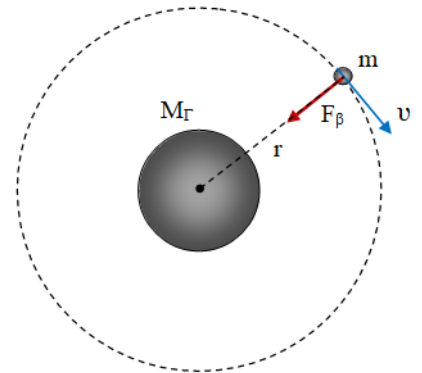
Εφαρμόζουμε τη σχέση (1) για τα δύο τηλεσκόπια – δορυφόρους.

$$v_O = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_O}} = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + \frac{R_\Gamma}{8}}} = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{\frac{9R_\Gamma}{8}}} \Leftrightarrow v_O = \sqrt{\frac{8GM_\Gamma}{9R_\Gamma}}. \quad (2)$$

$$v_H = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h_H}} = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + \frac{R_\Gamma}{12}}} = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{\frac{13R_\Gamma}{12}}} \Leftrightarrow v_H = \sqrt{\frac{12GM_\Gamma}{13R_\Gamma}}. \quad (3)$$

Το πηλίκο των μέτρων των ταχυτήτων των δύο τηλεσκοπίων είναι :

$$\frac{v_O}{v_H} = \frac{\sqrt{\frac{8GM_\Gamma}{9R_\Gamma}}}{\sqrt{\frac{12GM_\Gamma}{13R_\Gamma}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 13}{12 \cdot 9}} \Leftrightarrow \frac{v_O}{v_H} = \sqrt{\frac{26}{27}}.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ .

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

Θεωρούμε ότι η κίνηση κάθε τηλεσκοπίου είναι ομαλή κυκλική.

16. (16098) Δύο παιδιά, η Κυβέλη και ο Αντώνης, συζητούν για το λογοτεχνικό βιβλίο του Ιουλίου Βερν «Γύρω από τη Σελήνη». Σε αυτό, ένα βλήμα που μεταφέρει δύο ανθρώπους, αφού εκτοξεύεται από τη Γη, καταλήγει να γίνει τεχνητός δορυφόρος της Σελήνης, σε ύψος h από την επιφάνειά της.

Η συζήτηση των παιδιών αφορά στην ταχύτητα που έχει ένας τεχνητός δορυφόρος της Σελήνης σε κάποιο ύψος από την επιφάνειά της και κατά πόσο το μέτρο της ταχύτητας αυτής εξαρτάται από τη μάζα του δορυφόρου. Η Κυβέλη ισχυρίζεται ότι το μέτρο της ταχύτητας αυτής δεν εξαρτάται από τη μάζα του δορυφόρου, ενώ ο Αντώνης ότι εξαρτάται. Τελικά,

(α) η Κυβέλη έχει δίκιο, διότι το μέτρο της ταχύτητας του τεχνητού δορυφόρου εξαρτάται από την ακτίνα περιστροφής από το κέντρο της Σελήνης και από τη μάζα της Σελήνης.

(β) ο Αντώνης έχει δίκιο διότι το μέτρο της ταχύτητας περιστροφής εξαρτάται από την ακτίνα περιστροφής από το κέντρο της Σελήνης και τη μάζα του τεχνητού δορυφόρου.

(γ) ο Αντώνης έχει δίκιο διότι το μέτρο της ταχύτητας περιστροφής εξαρτάται μόνο από τη μάζα του σώματος που περιστρέφεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m κινείται ομαλά σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Σελήνη, με ακτίνα r ίση με την απόστασή του από το κέντρο της Σελήνης.

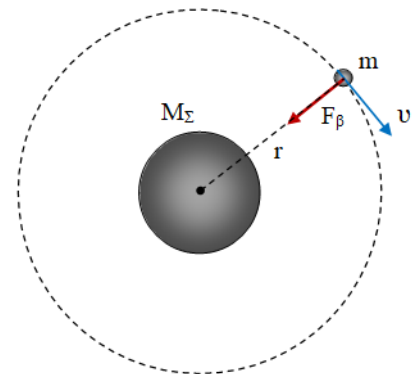
Η βαρυτική έλξη της Σελήνης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη :

$$F_{\beta} = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Sigma} m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_{\Sigma}}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{\Sigma}}{r}}, \quad (1)$$

όπου $r = R_{\Sigma} + h$. (R_{Σ} : η ακτίνα της Σελήνης)

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι **το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου δεν εξαρτάται από τη μάζα του**, αλλά εξαρτάται από τη μάζα M_{Σ} της Σελήνης και την ακτίνα r της τροχιάς.

Σωστή απάντηση : (α).



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Σελήνη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Σ} και ακτίνας R_{Σ} . Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

17. (16103) Πλανήτης έχει ακτίνα R . Ο πίνακας δείχνει το δυναμικό σε δύο χαρακτηριστικά ύψη από την επιφάνεια του πλανήτη.

Ύψος h	Δυναμικό V
R	V_1
$2R$	V_2

Η σχέση ανάμεσα στα V_1 και V_2 είναι

(α) $V_1 = \frac{3}{2} V_2$, (β) $V_1 = 2V_2$, (γ) $V_1 = 4V_2$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Δεχόμαστε ότι ο πλανήτης είναι απομονωμένη ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R .

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας του πλανήτη σε απόσταση από το κέντρο του $r \geq R$ υπολογίζεται από τη σχέση :

$$V = -G \frac{M}{r} \xrightarrow{r=R+h} V = -G \frac{M}{R+h}.$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση για τα δύο σημεία.

Σημείο (1)

$$V_1 = -G \frac{M}{R+R} \Rightarrow V_1 = -G \frac{M}{2R}. \quad (1)$$

Σημείο (2)

$$V_2 = -G \frac{M}{R+2R} \Rightarrow V_2 = -G \frac{M}{3R}. \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{-G \frac{M}{2R}}{-G \frac{M}{3R}} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{3}{2} V_2.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι ο πλανήτης είναι απομονωμένη ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R .

18. (16116) Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Σελήνης με ταχύτητα $\vec{u}_0$ που έχει διεύθυνση ίδια με τη διεύθυνση της ακτίνας της Σελήνης που περνάει από το σημείο εκτόξευσης και φορά προς το διάστημα. Αν τη στιγμή της εκτόξευσης το σώμα, έχει θετική μηχανική ενέργεια $E_{M(αρχ)} = E_0 > 0$ και μετά την εκτόξευσή του κινείται ελεύθερα με μοναδική δύναμη την έλξη του από τη Σελήνη, τότε:

(α) το σώμα δεν θα καταφέρει να διαφύγει από την έλξη της Σελήνης.

(β) το σώμα θα καταφέρει να διαφύγει από την έλξη της Σελήνης, με μηδενική ταχύτητα.

(γ) το σώμα θα καταφέρει να διαφύγει από την έλξη της Σελήνης, κινούμενο προς το διάστημα με

ταχύτητα μέτρου $v = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Έστω M η μάζα και R η ακτίνα της Σελήνης.

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής ενός σώματος, όταν εκτοξευτεί από

την επιφάνεια της Σελήνης, είναι : $v_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. (1)

Για την αρχική μηχανική ενέργεια του σώματος ισχύει :

$$E_{μ(αρχ)} = K_{αρχ} + U_{αρχ} > 0.$$

Επομένως :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} > 0 \Leftrightarrow v_0^2 > 2G\frac{M}{R} \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow v_0 > v_\delta$, επομένως **το σώμα θα διαφύγει** από το πεδίο βαρύτητας της Σελήνης.

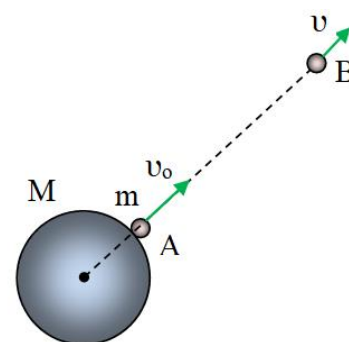
Κατά την κίνηση του σώματος από την αρχική θέση A στο διάστημα (άπειρο), η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή :

$$E_{μ(αρχ)} = K_\infty + U_\infty \Leftrightarrow E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Leftrightarrow v^2 = \frac{2E_0}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}.$$

Σωστή απάντηση : (γ).

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Σελήνη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R .



19. (16266) Ένας δορυφόρος μεταφέρεται από την γήινη επιφάνεια σε ύψος h όπου το βάρος του γίνεται το $\frac{1}{16}$ του βάρους που είχε στην επιφάνεια της Γης. Με κατάλληλη διάταξη ο δορυφόρος τίθεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη στο ύψος h .

Αν το g_0 είναι η επιτάχυνση βαρύτητας στη γήινη επιφάνεια και R_Γ η ακτίνα της Γης, τότε η ταχύτητα περιφοράς του είναι:

(α) $\frac{1}{16}\sqrt{g_0 R_\Gamma}$, (β) $\frac{1}{4}\sqrt{g_0 R_\Gamma}$, (γ) $\frac{1}{2}\sqrt{g_0 R_\Gamma}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το βάρος του σώματος σε απόσταση r από το κέντρο της Γης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$B = G \frac{M_\Gamma m}{r^2}. \quad (1)$$

Το βάρος του σώματος στην επιφάνεια της Γης είναι : $B_0 = G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma^2}. \quad (2)$

Ισχύει : $B = \frac{1}{16} B_0 \xrightarrow{(1),(2)} G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = \frac{1}{16} \cdot G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow r^2 = 16 R_\Gamma^2 \Leftrightarrow r = 4 R_\Gamma. \quad (3)$

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης, ισχύει :

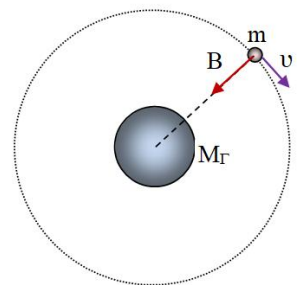
$$g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow G M_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (4)$$

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, με ακτίνα r ίση με την απόστασή του από το κέντρο της Γης.

Η βαρυτική έλξη της Γης στο σώμα είναι η κεντρομόλος δύναμη :

$$B = F_\kappa \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{G M_\Gamma}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{G M_\Gamma}{r}} \xrightarrow{(3), (4)}$$

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{4 R_\Gamma}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{4}} \Leftrightarrow v = \frac{1}{2} \sqrt{g_0 R_\Gamma}.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ . Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

20. (16266) Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος, αν εκτοξευτεί από την επιφάνεια της Γης, έχει μέτρο v_δ . Τοποθετούμε το σώμα σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης ως δορυφόρο σε κυκλική τροχιά, ώστε η γραμμική του ταχύτητα να έχει μέτρο $v = \frac{v_\delta}{2}$.

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην γήινη επιφάνεια είναι g_0 και η ακτίνα της Γης R .

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στο ύψος h είναι:

(α) $\frac{g_0}{8}$, (β) $\frac{g_0}{4}$, (γ) $\frac{g_0}{16}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής ενός σώματος, όταν εκτοξευτεί από την επιφάνεια της Γης, δίνεται από

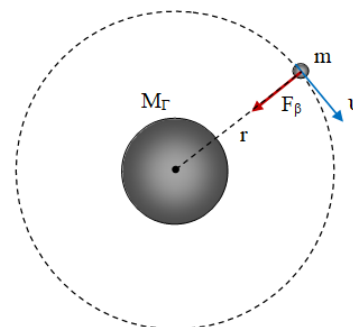
τη σχέση : $v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}}$. (1)

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, με ακτίνα r ίση με την απόστασή του από το κέντρο της Γης.

Η βαρυτική έλξη της Γης στο σώμα είναι η κεντρομόλος δύναμη :

$$F_\beta = F_\kappa \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_\Gamma}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}}. \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει : } v = \frac{1}{2} v_\delta \xrightarrow{(1),(2)} \frac{GM_\Gamma}{r} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma} \Leftrightarrow r = 2R_\Gamma.$$



Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι: $g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}$. (3)

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας σε απόσταση $r = 2R_\Gamma$ από το κέντρο της Γης ισχύει :

$$g = G \frac{M_\Gamma}{r^2} \Rightarrow g = G \frac{M_\Gamma}{4R_\Gamma^2}. \quad (4)$$

Με σύγκριση των σχέσεων (3), (4) προκύπτει : $g = \frac{g_0}{4}$.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ . Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

21. (16299) Δύο δορυφόροι της Γης Δ_1 και Δ_2 με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 4m$ αντίστοιχα, κινούνται σε κυκλικές τροχιές με ακτίνες r_1 και r_2 αντίστοιχα. Αν το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του δορυφόρου Δ_1 είναι τετραπλάσιο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του δορυφόρου Δ_2 , τότε οι ακτίνες r_1 και r_2 των τροχιών των δορυφόρων συνδέονται με τη σχέση:

(α) $r_1 = r_2/2$,

(β) $r_1 = r_2/4$,

(γ) $r_1 = 2r_2$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

Μονάδες 9

Απάντηση

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε δορυφόρου είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη, δηλαδή με το βάρος του δορυφόρου :

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{B} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Το βάρος κάθε δορυφόρου υπολογίζεται από το νόμο της βαρύτητας :

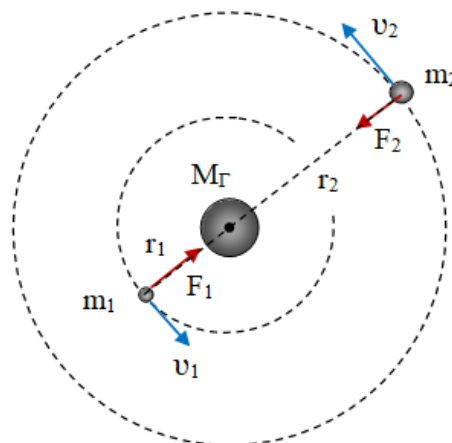
$$B_1 = G \frac{M_\Gamma m_1}{r_1^2}. \quad (1)$$

$$B_2 = G \frac{M_\Gamma m_2}{r_2^2}. \quad (2)$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση ισχύει :

$$B_1 = 4B_2 \xrightarrow{(1)} G \frac{M_\Gamma m_1}{r_1^2} = 4 \cdot G \frac{M_\Gamma m_2}{r_2^2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = 4 \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \xrightarrow{m_2 = 4m_1} \frac{m}{r_1^2} = 4 \cdot \frac{4m}{r_2^2} \Leftrightarrow$$

$$r_2^2 = 16r_1^2 \Leftrightarrow r_2 = 4r_1 \Leftrightarrow r_1 = \frac{r_2}{4}.$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ και ακτίνας R_Γ . Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

22. (16384) Θεωρούμε ότι ο λόγος των ακτίνων της Γης και της Σελήνης είναι ίσος με $\frac{R_{\Gamma}}{R_{\Sigma}} = \frac{11}{3}$ ενώ

ο λόγος των μέτρων της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης προς την αντίστοιχη επιτάχυνση στην επιφάνεια της Σελήνης είναι ίσος με $\frac{g_{o\Gamma}}{g_{o\Sigma}} = 6$. Αν $v_{\delta\Gamma}$ είναι το μέτρο της ταχύτητας

διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης και $v_{\delta\Sigma}$ το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από την επιφάνεια της Σελήνης, τότε ο λόγος των μέτρων των δύο ταχυτήτων είναι ίσος με:

(α) $\frac{1}{\sqrt{22}}$, (β) $\sqrt{22}$, (γ) $\sqrt{\frac{11}{2}}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_{\delta(\Gamma)} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} \quad (1)$$

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης, ισχύει :

$$g_{o(\Gamma)} = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_{o(\Gamma)} R_{\Gamma}^2 \quad (2)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει : $v_{\delta(\Gamma)} = \sqrt{2g_{o(\Gamma)} R_{\Gamma}} \quad (3)$

Όμοια, το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από την επιφάνεια της Σελήνης είναι : $v_{\delta(\Sigma)} = \sqrt{2g_{o(\Sigma)} R_{\Sigma}} \quad (4)$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) :

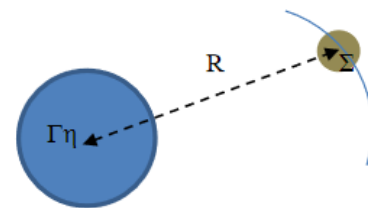
$$\frac{v_{\delta(\Gamma)}}{v_{\delta(\Sigma)}} = \frac{\sqrt{2g_{o(\Gamma)} R_{\Gamma}}}{\sqrt{2g_{o(\Sigma)} R_{\Sigma}}} = \sqrt{\frac{g_{o(\Gamma)}}{g_{o(\Sigma)}} \cdot \frac{R_{\Gamma}}{R_{\Sigma}}} = \sqrt{6 \cdot \frac{11}{3}} \Leftrightarrow \frac{v_{\delta(\Gamma)}}{v_{\delta(\Sigma)}} = \sqrt{22}.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη και η Σελήνη θεωρούνται ακίνητες ομογενείς σφαίρες με μάζες M_{Γ} και M_{Σ} .

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

23. (16385, 2.1) Η μάζα της Γης είναι $M_{\Gamma} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ ενώ της Σελήνης m_{Σ} . Η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο σωμάτων είναι $R = 3,84 \times 10^5 \text{ km}$ ενώ δεχόμαστε ότι η Σελήνη εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από την Γη. Δίνεται $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg} \cdot \text{s}^2}$.

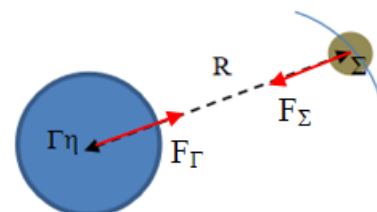


- (α) Η δύναμη που ασκεί η Γη στην Σελήνη είναι μεγαλύτερη από αυτήν της Σελήνης στη Γη.
 (β) Η δύναμη που ασκεί η Γη στην Σελήνη είναι μικρότερη από αυτήν της Σελήνης στη Γη.
 (γ) Οι δύο δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα.
 Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.
 Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4
 Μονάδες 8

Απάντηση

Σύμφωνα με το αξίωμα δράσης – αντίδρασης, η δύναμη $\vec{F}_{\Sigma}$ που ασκεί η Γη στη Σελήνη και η δύναμη $\vec{F}_{\Gamma}$ που ασκεί η Σελήνη στη Γη είναι αντίθετες, άρα έχουν ίσα μέτρα :



$$F_{\Gamma} = F_{\Sigma} = G \frac{M_{\Gamma} m_{\Sigma}}{R^2} . \quad (\text{νόμος της βαρύτητας})$$

24. (16385, 2.2) Θεωρώντας ότι η Σελήνη εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η επιτάχυνσή της κατά την κίνηση αυτή είναι:

- (α) $10,37 \times 10^6 \text{ m/s}^2$, (β) $2,7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$, (γ) $5,4 \times 10^3 \text{ m/s}^2$.
 Α. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η Σελήνη εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R γύρω από τη Γη. Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_{\Sigma}$ που ασκεί η Γη στη Σελήνη είναι η κεντρομόλος δύναμη :

$$F_{\Sigma} = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Gamma} m_{\Sigma}}{R^2} = m_{\Sigma} \alpha_{\kappa} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa} = G \frac{M_{\Gamma}}{R^2} \Rightarrow \alpha_{\kappa} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{(3,85 \cdot 10^8)^2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\kappa} \cong 2,69 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} .$$

Σωστή απάντηση : (β).

Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι

α) η Γη και η Σελήνη θεωρούνται ομογενείς σφαίρες,

β) οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

25. (16386, 2.1) Ένα σώμα μάζας m εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από ένα άλλο μάζας M , λόγω της βαρυτικής έλξης μεταξύ των δύο σωμάτων. Αν τετραπλασιάσουμε την μάζα του σώματος M χωρίς να μεταβάλλουμε τη μεταξύ τους απόσταση, για να συνεχίσει να εκτελεί την ίδια τροχιά το σώμα m , η γραμμική ταχύτητά του:

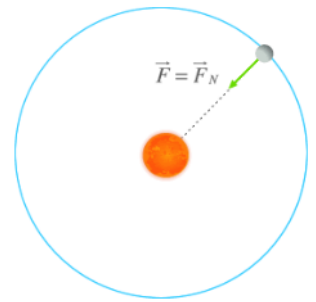
(α) θα πρέπει να παραμείνει η ίδια.

(β) θα πρέπει να διπλασιαστεί.

(γ) θα πρέπει να υποδιπλασιαστεί.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Μονάδες 4

Μονάδες 8

Απάντηση

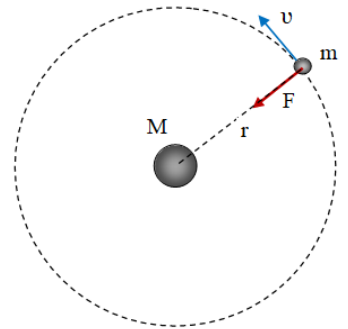
Το σώμα – δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά με ακτίνα r ίση με την απόστασή του από το κέντρο του σώματος μάζας M .

Η βαρυτική έλξη που ασκείται στο σώμα – δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα ισχύει :

$$F = F_k \Leftrightarrow G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (1)$$

Αν τετραπλασιαστεί η μάζα του σώματος ($M' = 4M$), για να κινείται ο δορυφόρος στην ίδια τροχιά πρέπει το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας να γίνει :

$$v' = \sqrt{\frac{GM'}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot 4M}{r}} = 2\sqrt{\frac{GM}{r}} \xrightarrow{(1)} v' = 2v.$$



Σχόλιο

Δεχόμαστε ότι τα δύο σώματα είναι σημειακά ή ομογενείς σφαίρες και r είναι η απόσταση των κέντρων τους.

26. (16386, 2.2) Υποτριπλασιάζουμε την απόσταση των δύο σωμάτων. Πόσο πρέπει να μεταβληθεί η μάζα του m , χωρίς να αλλάξει η μάζα M του άλλου σώματος, ώστε για την μεταξύ τους βαρυτική δύναμη να ισχύει $F' = 27F$:

(α) 100% , (β) 200% , (γ) 300% .

A. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Αρχικά

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

Τελικά

$$F' = G \frac{Mm'}{\left(\frac{r}{3}\right)^2} = G \frac{Mm'}{\frac{r^2}{9}} \Rightarrow F' = 9G \frac{Mm'}{r^2}. \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει : } F' = 27F \xrightarrow{(1),(2)} 9G \frac{Mm'}{r^2} = 27G \frac{Mm}{r^2} \Leftrightarrow m' = 3m.$$

Το ποσοστό μεταβολής της μάζας είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{m' - m}{m} \cdot 100\% = \frac{3m - m}{m} \cdot 100\% = \frac{2m}{m} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 200\%.$$

Σχόλιο

Δεχόμαστε ότι τα δύο σώματα είναι σημειακά ή ομογενείς σφαίρες και r είναι η απόσταση των κέντρων τους.

27. (16390) Δύο δορυφόροι έχουν ίδια μάζα m και διαγράφουν την ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από την Γη κινούμενοι με αντίθετες φορές. Οι δορυφόροι συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά.

Τι κίνηση θα κάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση;

(α) θα παραμείνει ακίνητο.

(β) θα εξακολουθήσει να είναι δορυφόρος της Γης κινούμενος στην ίδια κυκλική τροχιά.

(γ) θα εκτελέσει επιταχυνόμενη κίνηση με αυξανόμενη επιτάχυνση από το ύψος που έγινε η σύγκρουση.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

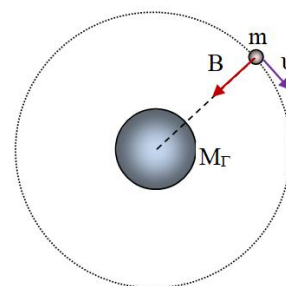
Μονάδες 8

Απάντηση

Κάθε δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, με ακτίνα r ίση με την απόστασή του από το κέντρο της Γης.

Η βαρυτική έλξη της Γης στο σώμα είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα ισχύει :

$$B = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Gamma} m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_{\Gamma}}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{\Gamma}}{r}}. \quad (1)$$



Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι αφού οι δύο δορυφόροι κινούνται στην ίδια τροχιά, οι ταχύτητές τους έχουν ίσα μέτρα : $v_1 = v_2 = v$.

Τη στιγμή της σύγκρουσης οι ταχύτητες των δορυφόρων έχουν αντίθετες φορές.

Η διάρκεια της σύγκρουσης είναι ασήμαντη, άρα μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow 2mV = mv - mv \Leftrightarrow V = 0.$$

Δηλαδή, αμέσως μετά την κρούση η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι μηδενική.

Όμως το συσσωμάτωμα δέχεται ελκτική βαρυτική δύναμη από τη Γη, επομένως θα κινηθεί ευθύγραμμα με κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης, με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας ($\vec{a} = \vec{g}$).

Στη διάρκεια της κίνησης μειώνεται η απόσταση από το κέντρο της Γης με αποτέλεσμα να αυξάνεται το

μέτρο της επιτάχυνσης, σύμφωνα με τη σχέση : $g = G \frac{M_{\Gamma}}{r^2}$.

Άρα το συσσωμάτωμα μετά την κρούση εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση με αυξανόμενη επιτάχυνση μέχρι να φτάσει στην επιφάνεια της Γης.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα.

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

28. (16633) Δύο μάζες m_1 και m_2 απέχουν μεταξύ τους απόσταση r . Πόσο μεταβάλλεται η βαρυτική δύναμη, αν διπλασιαστούν οι μάζες των σωμάτων και τετραπλασιαστεί η μεταξύ τους απόσταση;

(α) η δύναμη τετραπλασιάζεται.

(β) η δύναμη υποτετραπλασιάζεται.

(γ) η δύναμη διπλασιάζεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Αρχικά, το μέτρο της βαρυτικής δύναμης μεταξύ των σωμάτων είναι : $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$. (1)

Όταν διπλασιαστούν οι μάζες των σωμάτων και τετραπλασιαστεί η απόστασή τους, το μέτρο της βαρυτικής δύναμης γίνεται :

$$F' = G \frac{2m_1 \cdot 2m_2}{(4r)^2} = 4G \frac{m_1 m_2}{16r^2} = G \frac{m_1 m_2}{4r^2} \xrightarrow{(1)} F' = \frac{F}{4}.$$

Σχόλια

1) Η διατύπωση «Δύο μάζες . . . απέχουν μεταξύ τους . . .» δεν είναι σωστή.

Η μάζα είναι φυσικό μέγεθος και όχι σώμα.

2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι τα σώματα είναι ομογενείς σφαίρες και ότι r είναι η απόσταση ανάμεσα στα κέντρα τους.

29. (16633) Στην επιφάνεια της Γης ένα σώμα έχει βάρος $w = 300\text{N}$. Να βρείτε το βάρος του σώματος σε έναν πλανήτη, που έχει ακτίνα ίση με την ακτίνα της Γης και μάζα ίση με το μισό της μάζας της Γης.

(α) 600N , (β) 50N , (γ) 150N .

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Στην επιφάνεια της Γης, το βάρος του σώματος υπολογίζεται από τη σχέση : $W = G \frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}^2}$. (1)

Στην επιφάνεια του (σφαιρικού) πλανήτη, το βάρος του ίδιου σώματος είναι :

$$W' = G \frac{Mm}{R^2} = G \frac{\frac{M_{\Gamma}}{2} \cdot m}{R_{\Gamma}^2} = \frac{1}{2} \left(G \frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}^2} \right) \xrightarrow{(1)} W' = \frac{W}{2} \Rightarrow W' = 150\text{N}.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη και ο πλανήτης θεωρούνται ομογενείς σφαίρες.

Οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

30. (16636, 2.1) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου που οφείλεται σε δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 , ισούται με το μηδέν στο σημείο K. Αν οι αποστάσεις του σημείου K από τις m_1 και m_2 είναι L_1 και L_2 , με $\frac{L_1}{L_2} = 4$, για τη σχέση μαζών των δύο σωμάτων ισχύει:

(α) $m_1 = 16m_2$, (β) $m_2 = 4m_1$, (γ) $m_1 = \frac{m_2}{16}$.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

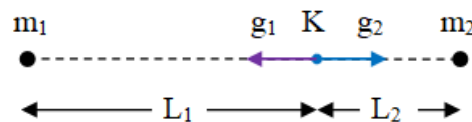
Απάντηση

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας των δύο σωμάτων μηδενίζεται σε σημείο K που βρίσκεται ανάμεσά τους και απέχει L_1 , L_2 αντίστοιχα από τα δύο σώματα.

Τα μέτρα των εντάσεων του πεδίου βαρύτητας κάθε σωματίου στο K δίνονται από τις σχέσεις :

$$g_1 = G \frac{m_1}{L_1^2} \quad (1)$$

$$g_2 = G \frac{m_2}{L_2^2} \quad (2)$$



Ισχύει :

$$g_{ολ(K)} = 0 \Rightarrow g_1 = g_2 \xrightarrow{(1),(2)} G \frac{m_1}{L_1^2} = G \frac{m_2}{L_2^2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 = 4^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 16 \text{ ή } m_1 = 16m_2.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι **τα σώματα θεωρούνται σημειακά**.

31. (16636, 2.2) Ένας πλανήτης έχει μάζα M και σε σχέση με τη Γη, έχει ίδια πυκνότητα και τριπλάσια ακτίνα. Αν στην επιφάνεια της Γης η ένταση του βαρυτικού πεδίου ισούται με 10 N/kg και ο όγκος μιας σφαίρας είναι $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, τότε το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια του πλανήτη είναι:

(α) 20 N/kg , (β) 15 N/kg , (γ) 30 N/kg .

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Ο όγκος σφαίρας ακτίνας R υπολογίζεται από τη σχέση: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. (1)

Από τη σχέση ορισμού της πυκνότητας ομογενούς σώματος $d = \frac{M}{V}$ προκύπτει: $M = dV$. (2)

Με συνδυασμό των σχέσεων (1), (2) προκύπτει η σχέση: $M = \frac{4}{3}\pi dR^3$. (3)

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια ομογενούς σφαιρικού πλανήτη είναι:

$$g = G \frac{M}{R^2} \xrightarrow{(3)} g = G \frac{\frac{4}{3}\pi dR^3}{R^2} \Leftrightarrow g = \frac{4}{3}\pi GdR. \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (4) για τη Γη και τον πλανήτη.

Για τη Γη

$$g_{\Gamma} = \frac{4}{3}\pi GdR_{\Gamma} \quad (5)$$

Για τον πλανήτη

$$g_{\Pi} = \frac{4}{3}\pi GdR_{\Pi} \xrightarrow{R_{\Pi}=3R_{\Gamma}} g_{\Pi} = \frac{4}{3}\pi Gd \cdot 3R_{\Gamma} = 3\left(\frac{4}{3}\pi GdR_{\Gamma}\right) \xrightarrow{(5)} g_{\Pi} = 3g_{\Gamma} \Rightarrow g_{\Pi} = 30 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη και ο πλανήτης θεωρούνται ομογενείς σφαίρες.

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

32. (16637) Ένας δορυφόρος κινείται κυκλικά γύρω από τη Γη και η απόστασή του από την επιφάνεια της Γης, σταδιακά μειώνεται. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

(α) Το μέτρο της επιτάχυνσης του δορυφόρου μειώνεται.

(β) Η κινητική ενέργεια του δορυφόρου αυξάνεται.

(γ) Η δύναμη που ασκείται στον δορυφόρο από τη Γη μειώνεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η επιτάχυνση του δορυφόρου σε κάθε σημείο είναι ίση με την ένταση του πεδίου βαρύτητας της Γης σε αυτό το σημείο.

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ύψος h υπολογίζεται από τη σχέση :

$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{(R_{\Gamma} + h)^2}.$$

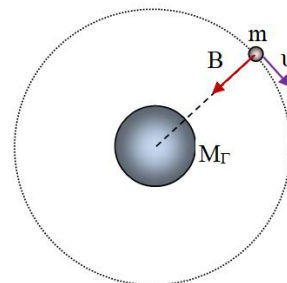
Όταν μειώνεται το ύψος h από την επιφάνεια της Γης, αυξάνεται το μέτρο της έντασης $\vec{g}$ και της επιτάχυνσης του δορυφόρου. [(α) : Λάθος]

Από τη σχέση $W = mg$ συμπεραίνουμε ότι και **το βάρος του δορυφόρου αυξάνεται.** [(γ) : Λάθος]

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη, με ακτίνα r ίση με την απόστασή του από το κέντρο της Γης.

Η βαρυτική έλξη της Γης στο σώμα είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα ισχύει :

$$B = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Gamma} m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_{\Gamma}}{r}. \quad (1)$$



Η κινητική ενέργεια του δορυφόρου είναι :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{(1)} K = \frac{1}{2} \cdot \frac{GM_{\Gamma}}{r} \quad \text{ή} \quad K = \frac{GM_{\Gamma}}{2(R_{\Gamma} + h)}.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι **όταν μειώνεται το ύψος h από την επιφάνεια της Γης, η κινητική ενέργεια του δορυφόρου αυξάνεται.** [(β) : Σωστό]

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} και ακτίνας R_{Γ} .

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

33. (16638, 2.1) Να μελετήσετε τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος αυξάνεται καθώς αυτό πλησιάζει την επιφάνεια της Γης.

(β) Η δυναμική ενέργεια στο βαρυτικό πεδίο της Γης έχει αρνητικό πρόσημο, διότι η ελκτική δύναμη μεταξύ Γης και σωμάτων είναι μικρού μέτρου.

(γ) Ένα σώμα το οποίο αφήνεται ελεύθερο σε βαρυτικό πεδίο, κινείται από υψηλότερη δυναμική ενέργεια σε χαμηλότερη.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m στο πεδίο βαρύτητας της Γης, δίνεται από τη σχέση :

$$U = -G \frac{M_{\Gamma} m}{r} \quad (1)$$

Με βάση τη σχέση (1), όταν η απόσταση r από το κέντρο της Γης μειώνεται η απόλυτη τιμή της δυναμικής ενέργειας αυξάνεται, άρα η αλγεβρική τιμή της δυναμικής ενέργειας μειώνεται.

Η απάντηση (α) είναι λάθος.

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος σε μία θέση A του πεδίου βαρύτητας ορίζεται με τη σχέση :

$$U_A = W_{\beta(A \rightarrow \infty)} \quad (2)$$

Η βαρυτική δύναμη είναι ελκτική, άρα απαιτείται η δαπάνη ενέργειας κατά τη μεταφορά του σώματος από το A στο «άπειρο». Αυτό σημαίνει ότι το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι αρνητικό.

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι και η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική.

Η απάντηση (β) είναι λάθος.

Όταν αφήσουμε ελεύθερο ένα σώμα μέσα σε πεδίο βαρύτητας, θα μετακινηθεί με την επίδραση της βαρυτικής δύναμης.

Το έργο της βαρυτικής δύναμης και η δυναμική ενέργεια συνδέονται με τη σχέση :

$$W_{\beta} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda} \quad (2)$$

$$\text{Αφού } W_{\beta} > 0 \xrightarrow{(2)} U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda} > 0 \Leftrightarrow U_{\alpha\rho\chi} > U_{\tau\epsilon\lambda} \text{ ή } U_{\tau\epsilon\lambda} < U_{\alpha\rho\chi},$$

άρα η δυναμική ενέργεια μειώνεται.

Σωστή απάντηση : (γ).

Σχόλιο για την απάντηση (γ)

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Όταν ένα σώμα αφήνεται ελεύθερο σε βαρυτικό πεδίο, η δυναμική ενέργεια μειώνεται».

34. (16638, 2.2) Δύο δορυφόροι έχουν την ίδια μάζα και περιστρέφονται γύρω από τη Γη σε ύψη $h_1 = R_\Gamma$ και $h_2 = 2R_\Gamma$ αντίστοιχα, όπου R_Γ η ακτίνα της Γης. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

(1). Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων τους είναι: $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{3}$.

(2). Ο λόγος των κινητικών ενεργειών τους είναι: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{2}{3}$.

(3). Ο λόγος των κινητικών ενεργειών τους είναι: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{2}$.

(α) η πρόταση 1 ,

(β) η πρόταση 2 ,

(γ) η πρόταση 3 .

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Δορυφόρος μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r ίσης με την απόστασή του από το κέντρο της Γης. Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα ισχύει :

$$B = F_k \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_\Gamma}{r} \xrightarrow{r=R_\Gamma+h} v = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h}}. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (1) για τους δύο δορυφόρους.

Δορυφόρος 1

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h_1}} \xrightarrow{h_1=R_\Gamma} v_1 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma}}. \quad (2)$$

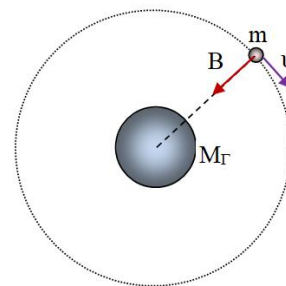
Δορυφόρος 2

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma+h_2}} \xrightarrow{h_2=2R_\Gamma} v_2 = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{3R_\Gamma}}. \quad (3)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (2), (3) :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma}}}{\sqrt{\frac{GM_\Gamma}{3R_\Gamma}}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (4) \quad \text{άρα η απάντηση (α) είναι λάθος.}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}mv_2^2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \xrightarrow{(4)} \frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{2}, \quad \text{άρα η απάντηση (γ) είναι σωστή.}$$



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ . Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

35. (16734) Η τροχιά που διαγράφει η Γη καθώς κινείται γύρω από τον Ήλιο είναι ελλειπτική και στην μία εστία βρίσκεται ο Ήλιος. Όταν η Γη διέρχεται από το σημείο της τροχιάς της με την μικρότερη απόσταση από τον Ήλιο λέμε ότι βρίσκεται στο περιήλιο, ενώ το σημείο της τροχιάς με την μεγαλύτερη απόσταση από τον Ήλιο λέγεται αφήλιο. Θεωρώντας πως η κίνηση της Γης γίνεται μόνο με την επίδραση της βαρυτικής δύναμης από τον Ήλιο συμπεραίνουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας της Γης είναι

(α) μεγαλύτερο στο αφήλιο.

(β) μεγαλύτερο στο περιήλιο.

(γ) ίδιο, τόσο στο περιήλιο όσο και στο αφήλιο.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Θεωρούμε ότι η Γη με τον Ήλιο αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα σωμάτων.

Η μόνη δύναμη που ασκείται στη Γη είναι η βαρυτική έλξη του Ήλιου, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

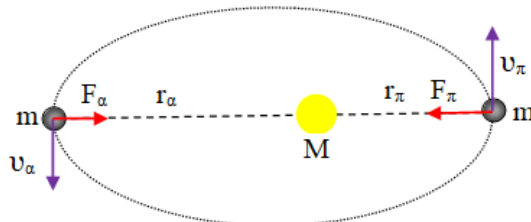
Έστω K_π , K_α η κινητική ενέργεια της Γης (λόγω της περιφοράς γύρω από τον Ήλιο) στο περιήλιο και το αφήλιο αντίστοιχα.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για το περιήλιο και το αφήλιο :

$$K_\pi + U_\pi = K_\alpha + U_\alpha \Leftrightarrow K_\pi - K_\alpha = U_\alpha - U_\pi \Rightarrow K_\pi - K_\alpha = -G \frac{Mm}{r_\alpha} + G \frac{Mm}{r_\pi} = GMm \left(\frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha r_\pi} \right). \quad (1)$$

$$\text{Αφού } r_\alpha > r_\pi \Rightarrow r_\alpha - r_\pi > 0 \xrightarrow{(1)} K_\pi > K_\alpha.$$

Από τη σχέση $K = \frac{1}{2}mv^2$ συμπεραίνουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας της Γης είναι μεγαλύτερο στο περιήλιο.



Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη και ο Ήλιος θεωρούνται ομογενείς σφαίρες.

Δεν λαμβάνεται υπ' όψη η περιστροφή της Γης γύρω από τον άξονά της.

36. (16735) Ένας εξωπλανήτης (πλανήτης που δεν ανήκει στο ηλιακό σύστημα) έχει εννεαπλάσια μάζα από αυτήν που έχει η Γη και 4 φορές μεγαλύτερη ακτίνα από την ακτίνα της Γης. Αν η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης είναι $u_{\delta} = 11,2 \text{ km/s}$, πόση είναι η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια αυτού του πλανήτη;

(α) $5,6 \text{ km/s}$,

(β) $11,2 \text{ km/s}$,

(γ) $16,8 \text{ km/s}$

A. Να επιλέξετε την ορθή απάντηση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$u_{\delta(\Gamma)} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} \quad (1)$$

Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια του πλανήτη είναι :

$$u_{\delta(\Pi)} = \sqrt{\frac{2GM_{\Pi}}{R_{\Pi}}} \xrightarrow{M_{\Pi}=9M_{\Gamma}, R_{\Pi}=4R_{\Gamma}} u_{\delta(\Pi)} = \sqrt{\frac{2G \cdot 9M_{\Gamma}}{4R_{\Gamma}}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} \xrightarrow{(1)} u_{\delta(\Pi)} = \frac{3}{2} u_{\delta(\Gamma)} \Rightarrow$$

$$u_{\delta(\Pi)} = \frac{3}{2} \cdot 11,2 \frac{\text{Km}}{\text{s}} \Rightarrow u_{\delta(\Pi)} = 16,8 \frac{\text{Km}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη και ο πλανήτης θεωρούνται ακίνητες ομογενείς σφαίρες. Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

37. (19474) Δύο σημειακές μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = m$ βρίσκονται σε απόσταση r . Στο μέσο M της μεταξύ τους απόστασης:

- (α) η ένταση του βαρυτικού τους πεδίου είναι μηδέν
(β) το δυναμικό του βαρυτικού τους πεδίου είναι μηδέν
(γ) η ένταση και το δυναμικό του βαρυτικού τους πεδίου είναι μηδέν
Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

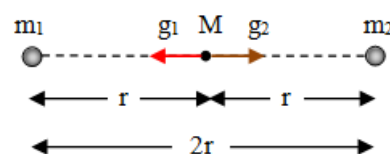
Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας κάθε σωματίου στο μέσο M της απόστασής τους, δίνεται από τις σχέσεις :

$$g_1 = G \frac{m_1}{r^2} \Rightarrow g_1 = G \frac{m}{r^2} . \quad (1)$$

$$g_2 = G \frac{m_2}{r^2} \Rightarrow g_2 = G \frac{m}{r^2} . \quad (2)$$



Στο σημείο M οι εντάσεις $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ είναι αντίρροπες, άρα η συνολική ένταση έχει μέτρο :

$$g_M = g_2 - g_1 \xrightarrow{(1),(2)} g_M = 0.$$

Άρα η πρόταση (α) είναι σωστή.

Παρατήρηση

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας των δύο σωματίων στο μέσο M είναι :

$$V_M = -G \frac{m}{r} - G \frac{m}{r} = -2G \frac{m}{r} \Rightarrow V_M \neq 0.$$

Ο υπολογισμός του δυναμικού στο σημείο M δεν είναι απαραίτητος, αφού διαπιστώσαμε ότι η απάντηση (α) είναι σωστή.

Σχόλιο

Η διατύπωση «δύο σημειακές μάζες . . . βρίσκονται σε απόσταση r » είναι λανθασμένη.

Το σωστό είναι : «δύο σωματίδια με μάζες . . . βρίσκονται σε απόσταση r ».

38. (20045) Για τις αποστάσεις r_A και $r_B > R_\Gamma$ (R_Γ η μέση ακτίνα της Γης) δύο σημείων Α και Β αντίστοιχα, από το κέντρο της Γης, ισχύει $r_A = 2 \cdot r_B$. Για τα μέτρα των εντάσεων του πεδίου βαρύτητας της Γης g_A και g_B , στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, ισχύει:

(α) $g_A = \frac{g_B}{4}$, (β) $g_A = 4 \cdot g_B$, (γ) $g_A = \frac{g_B}{2}$.

Α. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 9

Απάντηση

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης σε απόσταση $r \geq R_\Gamma$ από το κέντρο της υπολογίζεται από τη σχέση : $g = G \frac{M_\Gamma}{r^2}$.

Σημείο Α

$$g_A = G \frac{M_\Gamma}{r_A^2} = G \frac{M_\Gamma}{(2r_B)^2} = G \frac{M_\Gamma}{4r_B^2}. \quad (1)$$

Σημείο Β

$$g_B = G \frac{M_\Gamma}{r_B^2}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι : $g_A = \frac{g_B}{4}$.

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

39. (20046) Η διαφορά δυναμικού $V_A - V_B$ δύο σημείων Α και Β αντίστοιχα, ενός πεδίου βαρύτητας είναι θετική. Αυτό σημαίνει ότι:

- (α) για να μεταφερθεί σημειακή μάζα m από το σημείο Α στο σημείο Β απαιτείται να προσφερθεί ενέργεια,
(β) για να μεταφερθεί σημειακή μάζα m από το σημείο Β στο σημείο Α δεν απαιτείται να προσφερθεί ενέργεια,
(γ) κατά τη μεταφορά σημειακής μάζας m από το σημείο Α στο σημείο Β, το έργο της δύναμης του πεδίου είναι θετικό.

Α. Να επιλέξετε την σωστή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μεταφορά σωματίου μάζας m από το Α στο Β και η διαφορά δυναμικού $V_A - V_B$ συνδέονται με τη σχέση :

$$W_{A \rightarrow B} = m(V_A - V_B). \quad (1)$$

Αφού $m > 0$ και $V_A - V_B > 0 \xrightarrow{(1)} W_{A \rightarrow B} > 0$.

Το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μεταφορά του σωματίου από το Α στο Β είναι θετικό.

Αυτό σημαίνει ότι μεταφέρεται ενέργεια από το πεδίο βαρύτητας στο σωματίο, άρα δεν χρειάζεται να προσφερθεί ενέργεια για τη μεταφορά του σωματίου από το Α στο Β.

Σχόλιο

Οι διατυπώσεις «για να μεταφερθεί σημειακή μάζα . . .», «κατά τη μεταφορά σημειακής μάζας . . .» δεν είναι σωστές.

Το σωστό είναι : «για να μεταφερθεί σωματίο μάζας . . .», «κατά τη μεταφορά σωματίου μάζας . . .».

40. (20634) Δύο απομονωμένες σημειακές μάζες $m_1 = M$ και $m_2 = 8M$ βρίσκονται στα σημεία A και B αντίστοιχα μιας ευθείας (ε) και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d. Σε ένα σημείο Γ της ευθείας (ε) και ανάμεσα στα σημεία A και B, που απέχει απόσταση d/4 από το σημείο A, αφήνουμε ελεύθερη τρίτη σημειακή μάζα m, η οποία στη συνέχεια:

- (α) θα παραμείνει ακίνητη.
 (β) θα κινηθεί προς το σημείο A.
 (γ) θα κινηθεί προς το σημείο B.
 Α. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

Β. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Όταν τοποθετήσουμε το σωματίο μάζας m στη θέση Γ, θα ασκηθούν σ' αυτό ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ από τα άλλα δύο σωματίδια.

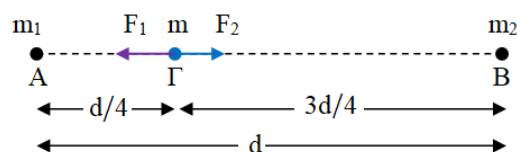
Τα μέτρα των δυνάμεων δίνονται από τις σχέσεις :

$$F_1 = G \frac{Mm}{\left(\frac{d}{4}\right)^2} = G \frac{Mm}{\frac{d^2}{16}} \Leftrightarrow F_1 = 16G \frac{Mm}{d^2}.$$

$$F_2 = G \frac{8Mm}{\left(\frac{3d}{4}\right)^2} = G \frac{8Mm}{\frac{9d^2}{16}} \Leftrightarrow F_2 = \frac{128}{9}G \frac{Mm}{d^2} \quad \text{ή} \quad F_2 \cong 14,2G \frac{Mm}{d^2}.$$

Παρατηρούμε ότι : $F_1 > F_2$.

Αφού οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ είναι αντίρροπες, η συνισταμένη τους έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\vec{F}_1$, άρα το σωματίο θα κινηθεί προς το σημείο A.



Σχόλιο

Η διατύπωση «δύο απομονωμένες σημειακές μάζες . . . βρίσκονται στα σημεία . . . απέχουν απόσταση d» δεν είναι σωστή.

41. (20639) Ένας δορυφόρος Δ, περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος $h = R_{\Gamma}/2$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου R_{Γ} , είναι η ακτίνα της Γης, με περίοδο περιφοράς T . Αν ο δορυφόρος Δ, περιφέρεται γύρω από τη Γη σε ύψος $h' = 5R_{\Gamma}$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, η περίοδος περιφοράς του

(α) τριπλασιάζεται.

(β) τετραπλασιάζεται.

(γ) οκταπλασιάζεται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Ο δορυφόρος μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r ίσης με την απόστασή του από το κέντρο της Γης.

Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα ισχύει :

$$B = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Gamma} m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_{\Gamma}}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{\Gamma}}{r}}. \quad (1)$$

Η περίοδος T της κίνησης του δορυφόρου είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{(1)} T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_{\Gamma}}{r}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{GM_{\Gamma}}}. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση (2) για τις δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{GM_{\Gamma}}}. \quad (3)$$

2η περίπτωση

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{r'}{GM_{\Gamma}}}. \quad (4)$$

Το πηλίκο των ακτίνων των δύο τροχιών είναι :

$$\frac{r'}{r} = \frac{6R_{\Gamma}}{\frac{3R_{\Gamma}}{2}} \Leftrightarrow \frac{r'}{r} = 4. \quad (5)$$

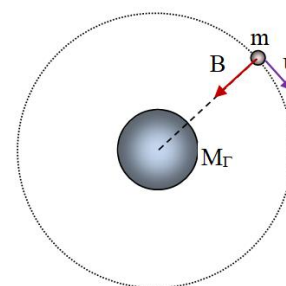
Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) :

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{r'}{GM_{\Gamma}}}}{2\pi \sqrt{\frac{r}{GM_{\Gamma}}}} = \frac{r'}{r} \sqrt{\frac{r}{r'}} \xrightarrow{(5)} \frac{T'}{T} = 4\sqrt{4} \Leftrightarrow \frac{T'}{T} = 8 \Leftrightarrow T' = 8T.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.



43. (21401) Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης. Κατά την διάρκεια της ανόδου το σώμα διέρχεται από διαδοχικά σημεία στα οποία:

(α) το βαρυτικό δυναμικό αυξάνεται και η ένταση του βαρυτικού πεδίου μειώνεται.

(β) το βαρυτικό δυναμικό μειώνεται και η ένταση του βαρυτικού πεδίου αυξάνεται.

(γ) το βαρυτικό δυναμικό και η ένταση του βαρυτικού πεδίου μειώνονται.

A. Να επιλέξετε την ορθή πρόταση.

Μονάδες 4

B. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 8

Απάντηση

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας σε απόσταση $r \geq R_{\Gamma}$ από το κέντρο της Γης δίνεται από τη

$$\text{σχέση : } g = G \frac{M_{\Gamma}}{r^2}. \quad (1)$$

Με βάση τη σχέση (1), όταν αυξάνεται η απόσταση r από το κέντρο της Γης τότε μειώνεται το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας.

Το δυναμικό ενός σημείου του πεδίου βαρύτητας σε απόσταση $r \geq R_{\Gamma}$ από το κέντρο της Γης δίνεται από

$$\text{τη σχέση : } V = -G \frac{M_{\Gamma}}{r}. \quad (2)$$

Με βάση τη σχέση (2), όταν αυξάνεται η απόσταση r από το κέντρο της Γης τότε η απόλυτη τιμή του δυναμικού μειώνεται, άρα η αλγεβρική τιμή του δυναμικού αυξάνεται.

Σωστή απάντηση : (α).

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} και ακτίνας R_{Γ} .

Οι επιδράσεις των υπόλοιπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

Κεφάλαιο 1

Θέματα Δ

1. (16053)

Μικρή σφαίρα μάζας $m = 200\text{ g}$ κρέμεται δεμένη στο κάτω άκρο αβαρούς μη ελαστικού νήματος, μήκους l . Το πάνω άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο O, το οποίο απέχει από οριζόντιο δάπεδο (δ), ύψος $H = 1,25\text{ m}$. Θέτουμε το σύστημα σε αιώρηση με τέτοιο τρόπο ώστε τελικά το σώμα να κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο με το νήμα τεντωμένο.

Τη στιγμή που η σφαίρα περνάει από την κατώτερη θέση Γ της κυκλικής τροχιάς της, με το νήμα τεντωμένο και κατακόρυφο, η κεντρομόλος επιτάχυνσή της έχει μέτρο 20 m/s^2 .

Ακριβώς τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση Γ, το νήμα κόβεται και η σφαίρα με την ταχύτητα που είχε, πραγματοποιεί οριζόντια βολή μέχρι να χτυπήσει στο οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα φτάνει στο δάπεδο μετά από χρόνο $0,3\text{ s}$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα. Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

4.1. Το μήκος l του νήματος.

Μονάδες 6

4.2. Την οριζόντια απόσταση από το σημείο Γ, του σημείου στο οποίο θα χτυπήσει η σφαίρα στο δάπεδο.

Μονάδες 6

4.3. Τη βαρυτική δυναμική ενέργεια της σφαίρας ως προς το οριζόντιο δάπεδο (δ) μετά από χρόνο $0,2\text{ s}$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Μονάδες 6

4.4. Το μέτρο της ταχύτητας καθώς και την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας με το οριζόντιο δάπεδο, ελάχιστα πριν η σφαίρα προσκρούσει στο δάπεδο.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1.

Αφού κοπεί το νήμα, η σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή.

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος h.

Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,3^2 \text{ m} = 5 \cdot 0,09 \text{ m} \Rightarrow h = 0,45 \text{ m}.$$

Το μήκος του νήματος είναι :

$$l = H - h = 1,25 \text{ m} - 0,45 \text{ m} \Rightarrow l = 0,8 \text{ m}.$$

4.2.

Μέχρι να κοπεί το νήμα η σφαίρα κινείται σε κύκλο ακτίνας l .

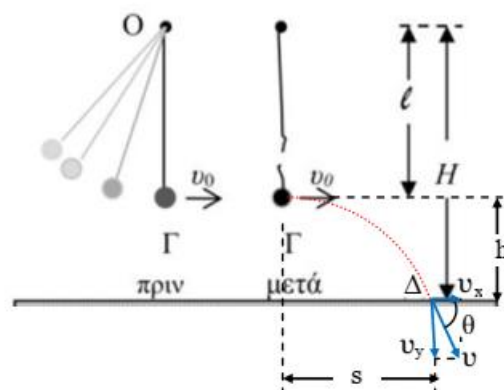
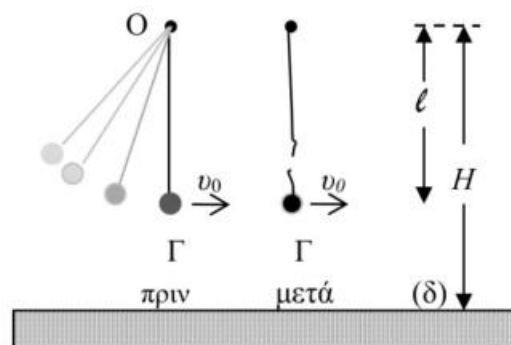
Στην κατώτερη θέση Γ ισχύει :

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v_o^2}{l} \Leftrightarrow v_o^2 = \alpha_{\kappa} \cdot l \Leftrightarrow v_o = \sqrt{\alpha_{\kappa} \cdot l} \Rightarrow v_o = \sqrt{20 \cdot 0,8} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{16} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_o = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αφού κοπεί το νήμα, η σφαίρα στον οριζόντιο άξονα x εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Η οριζόντια απόσταση που διανύει μέχρι να φτάσει το έδαφος είναι :

$$s = v_o t_{\text{ολ}} = 4 \cdot 0,3 \text{ m} \Rightarrow s = 1,2 \text{ m}.$$



4.3.

Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,2 \text{ s}$ η σφαίρα έχει κατέβει κατακόρυφα :

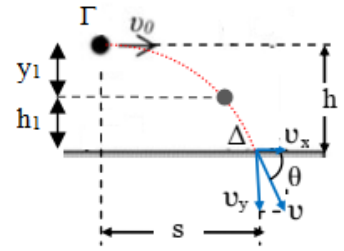
$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,2^2 \text{ m} = 5 \cdot 0,04 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 0,2 \text{ m}.$$

Η απόστασή της από το έδαφος εκείνη τη στιγμή είναι :

$$h_1 = h - y_1 = 0,45 \text{ m} - 0,2 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 0,25 \text{ m}.$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια της σφαίρας ως προς το δάπεδο τη χρονική στιγμή t_1 είναι :

$$U_1 = mgh_1 = 0,2 \text{ Kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,25 \text{ m} \Rightarrow U_1 = 0,5 \text{ J}.$$



4.4.

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας έχει σταθερό μέτρο : $v_x = v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_y = gt_{\text{ολ}} = 10 \cdot 0,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας στο έδαφος είναι :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

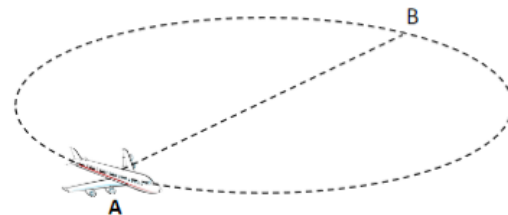
Τη στιγμή που φτάνει το έδαφος, η ταχύτητα $\vec{v}$ σχηματίζει με το δάπεδο γωνία θ .

Ισχύει :

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{3}{4}.$$

2. (16110)

Αεροπλάνο μάζας 20.000 kg πετάει σε οριζόντιο κύκλο περιμένοντας άδεια να προσγειωθεί. Το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό και ίσο με 100 m/s . Τα αεροπλάνα στρίβουν πάντα με κατάλληλο τρόπο ώστε να μειώσουν την αίσθηση της επιτάχυνσης στους επιβάτες, η οποία μπορεί να προκαλέσει δυσφορία στους τελευταίους.



4.1. Υπολογίστε την ακτίνα του κύκλου ώστε οι επιβάτες να μην αισθανθούν οριζόντια (κεντρομόλο) επιτάχυνση πάνω από $0,1g$.

Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε το μέτρο της μεταβολής της ταχύτητας του αεροπλάνου ανάμεσα στα σημεία A και B (όπου B το σημείο αντιδιαμετρικά του A).

Μονάδες 6

Ενώ το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος 1280 m και στο σημείο B του παραπάνω σχήματος, αφήνει ένα πακέτο μάζας 5 kg να πέσει προς το έδαφος, χωρίς αλεξίπτωτο. Οι διαστάσεις του πακέτου είναι πολύ μικρές, ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της αντίστασης του αέρα.

4.3. Υπολογίστε την οριζόντια απόσταση ανάμεσα στο σημείο B και στο σημείο όπου το πακέτο θα χτυπήσει στο έδαφος (βεληνεκές).

Μονάδες 6

4.4. Υπολογίστε την εφαπτομένη της γωνίας που θα σχηματίζει η ταχύτητα του πακέτου με το οριζόντιο επίπεδο όταν το πακέτο θα χτυπήσει στο έδαφος.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1.

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός επιβάτη υπολογίζεται από τη σχέση : $\alpha_k = \frac{v^2}{R}$. (1)

Ισχύει :

$$\alpha_k \leq 0,1g \xrightarrow{(1)} \frac{v^2}{R} \leq 0,1g \Leftrightarrow R \geq \frac{v^2}{0,1g} \Rightarrow R \geq \frac{100^2}{0,1 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow R \geq 10000 \text{ m}.$$

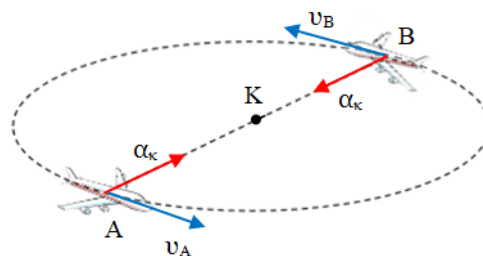
Επομένως, για να μην υπερβεί η επιτάχυνση την τιμή $0,1g$, πρέπει η ακτίνα του κύκλου να είναι τουλάχιστον 10 Km .

4.2.

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του αεροπλάνου παραμένει σταθερό, άρα : $v_A = v_B = v$.

Αφού τα σημεία A, B είναι αντιδιαμετρικά, οι ταχύτητες $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ είναι αντίρροπες. Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_B$ και υπολογίζουμε τη μεταβολή της ταχύτητας (αλγεβρικά) :

$$\Delta v = v_B - (-v_A) = v + v = 2v \Rightarrow \Delta v = 200 \text{ m/s}.$$



4.3.

Τη στιγμή που αφήνεται το δέμα έχει την οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}$ του αεροπλάνου, άρα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = v$.

Στον άξονα y το δέμα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1280}{10}} \text{ s} = \sqrt{256} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 16 \text{ s}.$$

Στον άξονα x το δέμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η οριζόντια απόσταση που θα διανύσει μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι :

$$s = v_o t_{\text{ολ}} = 100 \cdot 16 \text{ m} \Rightarrow s = 1600 \text{ m}.$$

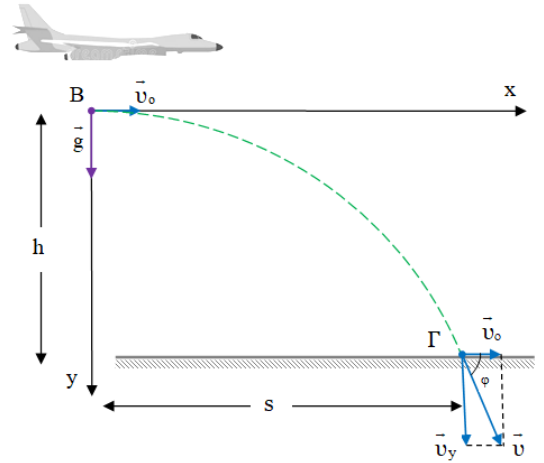
4.4.

Τη στιγμή που φτάνει το δέμα στο έδαφος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_y = g t_{\text{ολ}} = 10 \cdot 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 160 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για τη γωνία φ που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}$ με το έδαφος ισχύει :

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{160}{100} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = 1,6.$$

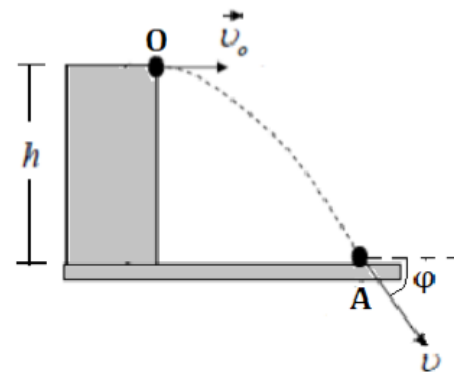


Σχόλιο : Το ερώτημα 4.1 δεν έχει διατυπωθεί με σαφήνεια.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Υπολογίστε την **ελάχιστη** ακτίνα του κύκλου ώστε οι επιβάτες να μην αισθανθούν οριζόντια επιτάχυνση μεγαλύτερη από $0,1g$ ».

3. (16136)

Σφαίρα μάζας $m = 0,1 \text{ Kg}$ βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20 \text{ m/s}$ από την ταράτσα ενός κτιρίου ύψους h από το έδαφος. Όταν πέφτει στο έδαφος η σφαίρα, η ταχύτητά της σχηματίζει με αυτό γωνία $\varphi = 45^\circ$ (όπως φαίνεται στο σχήμα).



4.1. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της σφαίρας όταν φτάνει στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.2. Να βρεθεί το ύψος h του κτιρίου.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$. Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρήσετε το έδαφος.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_2 , όπου η οριζόντια μετατόπιση της σφαίρας είναι οκταπλάσια της κατακόρυφης μετατόπισής της.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1.

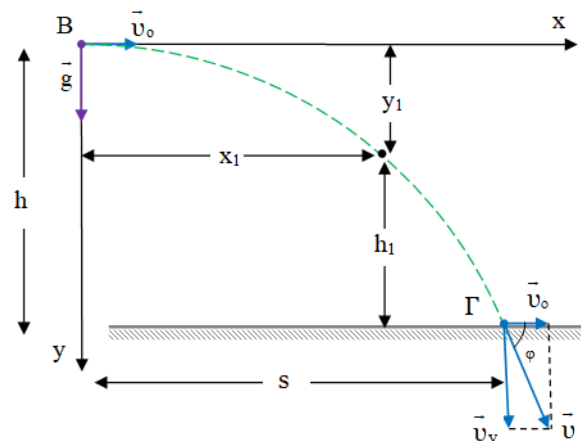
Στον άξονα x η ταχύτητα είναι σταθερή : $v_x = v_0$.

Τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος έχει ταχύτητα $\vec{v}$. Ισχύει :

$$\cos\varphi = \frac{v_0}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{\cos\varphi} \Rightarrow v = \frac{20}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 20\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (20\sqrt{2})^2 \text{ J} = 0,05 \cdot 400 \cdot 2 \text{ J} \Rightarrow K = 40 \text{ J}.$$



4.2.

Τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος ισχύει : $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_x} \Leftrightarrow v_y = v_x \cdot \varepsilon\varphi\varphi \xrightarrow{\varepsilon\varphi\varphi=1} v_y = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Στον άξονα y η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$v_y = gt_{\text{ολ}} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{v_y}{g} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{20}{10} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 2 \text{ s}.$$

Το ύψος h από το οποίο εκτοξεύτηκε η πέτρα είναι :

$$h = \frac{1}{2}gt_{\text{ολ}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \text{ m} = 5 \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow h = 20 \text{ m}.$$

4.3.

Τη χρονική στιγμή t_1 η πέτρα έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα :

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 5 \text{ m}.$$

Τη στιγμή αυτή βρίσκεται σε ύψος : $h_1 = h - y_1 = 20 \text{ m} - 5 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 15 \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια της σφαίρας στη θέση αυτή είναι :

$$U_1 = mgh_1 = 0,1 \cdot 10 \cdot 15 \text{ J} \Rightarrow U_1 = 15 \text{ J}.$$

4.4.

Η μετατόπιση στον άξονα x υπολογίζεται από τη σχέση : $x = v_o t$. (1)

Η μετατόπιση στον άξονα y υπολογίζεται από τη σχέση : $y = \frac{1}{2}gt^2$. (2)

Ισχύει :

$$x=8y \xrightarrow{(1),(2)} v_o t = 8 \cdot \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow v_o t - 4gt^2 = 0 \Leftrightarrow t(v_o - 4gt) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0, \text{ απορρίπτεται} \\ t = \frac{v_o}{4g} = 0,5 \text{ s} \end{cases}$$

Αρα : $t_2 = 0,5 \text{ s}$.

Τη στιγμή t_2 η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_{2y} = gt_2 = 10 \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{2y} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή t_2 είναι :

$$v_2 = \sqrt{v_o^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{20^2 + 5^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{425} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας τη στιγμή t_2 είναι :

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (\sqrt{425})^2 \text{ J} = 0,05 \cdot 425 \text{ J} \Rightarrow K_2 = 21,25 \text{ J}.$$

Σχόλια : Η εκφώνηση δεν αναφέρει

1) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 45° .

2) ότι η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

4. (16253)

Σημειακό αντικείμενο μάζας $m = 1 \text{ kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ολισθαίνοντας στην οριζόντια και λεία επιφάνεια τραπεζιού. Το σημειακό αντικείμενο συγκρατείται στην κυκλική του τροχιά, δεμένο στο ένα άκρο οριζώντιου, τεντωμένου, αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, μήκους $\ell = 0,5 \text{ m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Η συχνότητα της κυκλικής κίνησης του σημειακού αντικειμένου είναι $f = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$.

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.

Μονάδες 6

Κάποια χρονική στιγμή ($t_0 = 0$) το νήμα κόβεται και το σημειακό αντικείμενο εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική, οριζόντια ταχύτητα μέτρου v_0 , ίσου με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της ομαλής κυκλικής κίνησης του αντικειμένου. Η επιφάνεια του τραπεζιού απέχει ύψος $h = 0,8 \text{ m}$ από το οριζόντιο δάπεδο, στο οποίο στηρίζεται το τραπέζι.

4.2. Ποια χρονική στιγμή t_1 το σημειακό αντικείμενο προσκρούει στο δάπεδο που στηρίζεται το τραπέζι; Μονάδες 6

4.3. Σε πόση οριζόντια απόσταση από το σημείο που εγκατέλειψε την επιφάνεια του τραπεζιού το σημειακό αντικείμενο προσέκρουσε στο δάπεδο; Μονάδες 6

4.4. Προσδιορίστε την ταχύτητα $\vec{v}_1$ του σημειακού αντικειμένου τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία προσκρούει στο δάπεδο. Μονάδες 7

Να θεωρήσετε τη βαρυτική επιτάχυνση σταθερή, με μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$ και να αγνοήσετε τις δυνάμεις που ασκεί ο ατμοσφαιρικός αέρας στο αντικείμενο.

Απάντηση

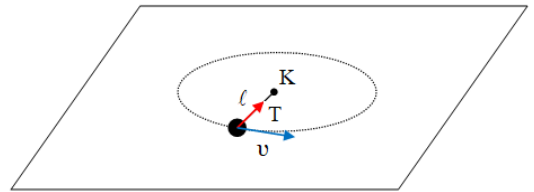
4.1.

Η γραμμική ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο :

$$v = 2\pi\ell f = 2\pi \cdot 0,5 \cdot \frac{10 \text{ m}}{\pi \text{ s}} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η τάση του νήματος είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα :

$$T = F_{\kappa} = m \frac{v^2}{\ell} = 1 \cdot \frac{10^2}{0,5} \text{ N} \Rightarrow T = 200 \text{ N}.$$



4.2.

Αφού κοπεί το νήμα, το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h με αρχική ταχύτητα $v_0 = v$.

Στον άξονα y το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Για τη στιγμή t_1 που φτάνει στο έδαφος ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} \text{ s} = \sqrt{0,16} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 0,4 \text{ s}.$$

4.3.

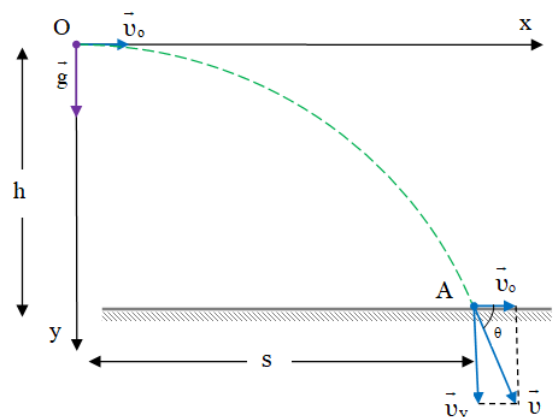
Στον άξονα x το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

$$s = v_0 t_1 = 10 \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow s = 4 \text{ m}.$$

4.4.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :



$$v_y = gt_1 = 10 \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή t_1 είναι :

$$v = \sqrt{v_o^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{116} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 2\sqrt{29} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ταχύτητα σχηματίζει με την οριζόντια γωνία θ για την οποία ισχύει :

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_o} = \frac{4}{10} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 0,4.$$

5. (16365)

Σώμα βρίσκεται στην οριζόντια ταράτσα ουρανοξύστη και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $r = \frac{5}{\pi} \text{ m}$ με περίοδο $T = \frac{1}{2} \text{ s}$. Το επίπεδο της κυκλικής τροχιάς είναι οριζόντιο. Να βρείτε:

4.1. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.

Μονάδες 6

Κάποια χρονική στιγμή το σχοινί, το οποίο συγκρατεί το σώμα στην κυκλική τροχιά, κόβεται με αποτέλεσμα το σώμα να διαφύγει από την ταράτσα εκτελώντας οριζόντια βολή. Να βρείτε:

4.2. Την ταχύτητα του σώματος κατά μέτρο και κατεύθυνση 2 s αφότου διέφυγε από την ταράτσα της πολυκατοικίας.

Μονάδες 6

4.3. Την απόσταση μεταξύ του σημείου από το οποίο διέφυγε από την ταράτσα και του σημείου στο οποίο βρίσκεται τη χρονική στιγμή που περιγράφεται στο ερώτημα (β).

Μονάδες 6

4.4. Γνωρίζουμε ότι όταν το σώμα φτάνει στο οριζόντιο έδαφος, η διεύθυνση της ταχύτητας σχηματίζει γωνία ω ως προς αυτό, όπου: $\varepsilon\varphi\omega = 2$. Να συγκρίνετε: i) την κατακόρυφη απόσταση του σημείου πτώσης του σώματος στο έδαφος από το σημείο βολής με ii) την οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) που διένυσε το σώμα κατά τη διάρκεια της βολής.

Μονάδες 7

Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στη επιφάνειας της γης $g = 10 \text{ m/s}^2$, και ότι κάθε είδους τριβή όπως και η αντίσταση από τον αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση

4.1.

Η γραμμική ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο :

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot \frac{5}{\pi} \text{ m}}{\frac{1}{2} \text{ s}} \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2.

Αφού εγκαταλείψει την ταράτσα, το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα $v_0 = v$.

Στον άξονα y το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Τη χρονική στιγμή t_1 η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_{1y} = gt_1 = 10 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{1y} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

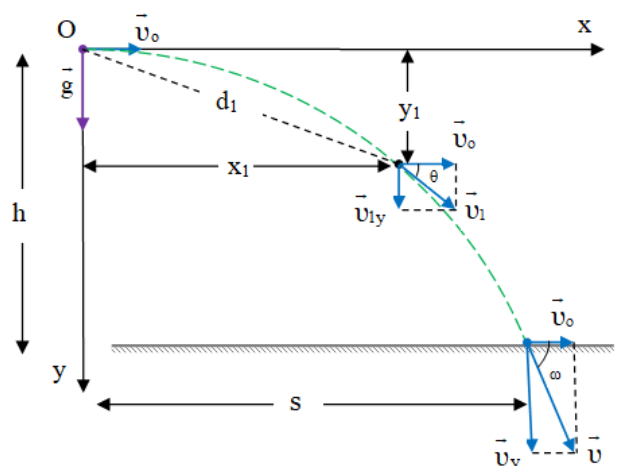
Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή t_1 είναι :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{2 \cdot 20^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$v_1 = 20\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη στιγμή t_1 η ταχύτητα σχηματίζει με την οριζόντια γωνία θ . Ισχύει :

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_{1y}}{v_0} = \frac{20}{20} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$



4.3.

Στον άξονα x το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μέχρι τη στιγμή t_1 έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

$$x_1 = v_0 t_1 = 20 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow x_1 = 40 \text{ m}.$$

Η κατακόρυφη απόσταση τη στιγμή t_1 είναι :

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 20 \text{ m}.$$

Η απόσταση της θέσης του από το σημείο που εγκατέλειψε την ταράτσα είναι :

$$d_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{40^2 + 20^2} \text{ m} = \sqrt{2^2 \cdot 20^2 + 20^2} \text{ m} = \sqrt{5 \cdot 20^2} \text{ m} \Rightarrow d_1 = 20\sqrt{5} \text{ m}.$$

4.4.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος ισχύει :

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{v_y}{v_0} \Leftrightarrow v_y = v_0 \varepsilon\varphi\omega \Rightarrow v_y = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \Rightarrow v_y = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας στον άξονα y υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$v_y = g t_{\text{ολ}} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{v_y}{g} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{40}{10} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 4 \text{ s}.$$

Το σώμα εκτοξεύτηκε από ύψος :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 \text{ m} = 5 \cdot 16 \text{ m} \Rightarrow h = 80 \text{ m}.$$

Το βεληνεκές της κίνησης είναι :

$$s = v_0 t_{\text{ολ}} = 20 \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow s = 80 \text{ m}.$$

Επομένως : $h = s$.

2ος τρόπος

$$\text{Τη στιγμή που φτάνει το σώμα στο έδαφος ισχύει : } \varepsilon\varphi\omega = \frac{v_y}{v_0}. \quad (1)$$

$$\text{Αφού } v_y = g t_{\text{ολ}} \xrightarrow{(1)} \varepsilon\varphi\omega = \frac{g t_{\text{ολ}}}{v_0} = \frac{g t_{\text{ολ}}^2}{v_0 t_{\text{ολ}}}. \quad (2)$$

$$\text{Για το ύψος από το οποίο εκτοξεύτηκε το σώμα, ισχύει : } h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow 2h = g t_{\text{ολ}}^2. \quad (3)$$

$$\text{Το βεληνεκές της κίνησης είναι : } s = v_0 t_{\text{ολ}}. \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε από τις σχέσεις (3), (4) στη σχέση (2) :

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{2h}{s} \Rightarrow 2 = \frac{2h}{s} \Rightarrow h = s.$$

6. (20108)

Ένα σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από ύψος $H = 125\text{m}$, σε σχέση με το έδαφος, με αρχική ταχύτητα v_0 . Αν γνωρίζετε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι ίση με $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, να προσδιορίσετε:

4.1. το χρόνο που χρειάστηκε για να φθάσει στο έδαφος.

Μονάδες 5

4.2. Αν η οριζόντια απόσταση, που διήνυσε μέχρι να φτάσει στο έδαφος, είναι $S = 50\text{m}$, να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας v_0 με την οποία εκτοξεύτηκε.

Μονάδες 5

4.3. Να προσδιορίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνει στο έδαφος.

Μονάδες 7

4.4. Ποια χρονική στιγμή t_1 το σώμα περνάει από ένα σημείο A που βρίσκεται σε ύψος $h_1 = 25\text{m}$ από το έδαφος;

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος του.

Απάντηση

4.1.

Στον άξονα y το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Για το χρόνο κίνησης $t_{ολ}$ ισχύει :

$$H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow$$

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 125}{10}} \text{ s} = \sqrt{25} \text{ s} \Rightarrow t_{ολ} = 5 \text{ s}.$$

4.2.

Στον άξονα x το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση : $s = v_0 t_{ολ}$.

$$\text{Επομένως : } v_0 = \frac{s}{t_{ολ}} = \frac{50 \text{ m}}{5 \text{ s}} \Rightarrow v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_y = g t_{ολ} = 10 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι :

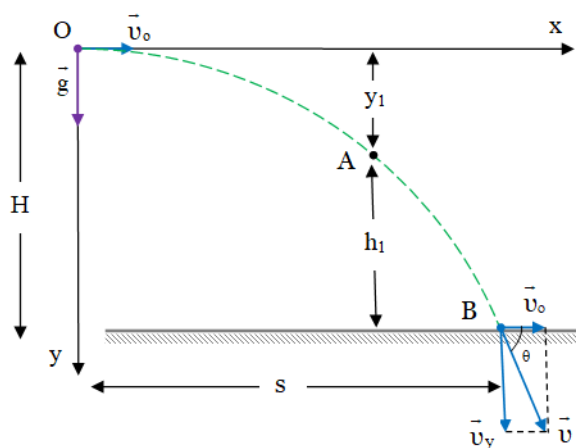
$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 50^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{10^2(1+5^2)} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 10\sqrt{26} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος από το σημείο βολής μέχρι να φτάσει στο έδαφος :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g H \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 + 2 g H \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 g H}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 125} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{100 + 2500} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{2600} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 10\sqrt{26} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.4.

Μέχρι τη στιγμή t_1 το σώμα έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση : $y_1 = H - h_1 = 125 \text{ m} - 25 \text{ m} = 100 \text{ m}$.

Ισχύει :

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2y_1}{g} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{g}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{10}} \text{ s} = \sqrt{20} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2\sqrt{5} \text{ s}.$$

7. (21421)

Σώμα βρίσκεται στην άκρη της οριζόντιας επιφάνειας ενός τραπεζιού σε ύψος h . Την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνουμε στο σώμα οριζόντια ταχύτητα u_0 και αυτό εκτελεί οριζόντια βολή. Το σώμα φτάνει στο έδαφος την χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$ έχοντας μετατοπιστεί οριζόντια κατά $s_{\max} = 4 \text{ m}$. Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και η αντίσταση από τον αέρα θεωρείται αμελητέα.

4.1. Να υπολογίσετε το ύψος h του τραπεζιού.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα u_0 με την οποία εκτοξεύτηκε το σώμα.

Μονάδες 6

4.3. Εξετάστε αν σε κάποιο σημείο της τροχιάς της κίνησης του σώματος, εκτός από το σημείο εκτόξευσης, η οριζόντια και η κατακόρυφη θέση του σώματος έχουν το ίδιο μέτρο.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σώμα, τη χρονική στιγμή που η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του έχει πενταπλάσιο μέτρο από την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος h . Τη στιγμή που φτάνει το σώμα στο έδαφος είναι $y = h$, άρα :

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,4^2 \text{ m} = 5 \cdot 0,16 \text{ m} \Rightarrow h = 0,8 \text{ m}.$$

4.2

Στον άξονα x το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση : $s_{\max} = v_0 t_{\text{ολ}}$.

$$\text{Επομένως : } v_0 = \frac{s_{\max}}{t_{\text{ολ}}} = \frac{4 \text{ m}}{0,4 \text{ s}} \Rightarrow v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

$$\text{Ισχύει : } x = y \Leftrightarrow v_0 t = \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Leftrightarrow t(v_0 - \frac{1}{2} g t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = \frac{2v_0}{g} = 2 \text{ s}. \end{cases}$$

Όμως, το σώμα φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,4 \text{ s}$, επομένως η λύση $t = 2 \text{ s}$ δεν είναι δεκτή. Άρα δεν υπάρχει άλλη χρονική στιγμή εκτός από τη στιγμή της εκτόξευσης, στην οποία να ισχύει : $x = y$.

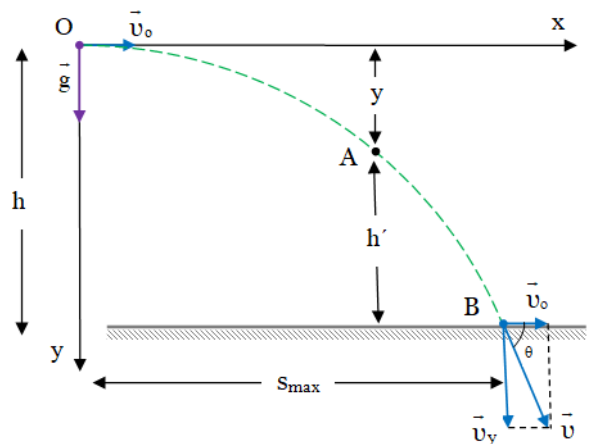
4.4

$$\text{Ισχύει : } v_x = 5v_y \Leftrightarrow v_0 = 5gt \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{5g} \Rightarrow t = \frac{10}{50} \text{ s} \Rightarrow t = 0,2 \text{ s}.$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,2^2 \text{ m} = 5 \cdot 0,04 \text{ m} \Rightarrow y = 0,2 \text{ m}.$$

$$\text{Τη στιγμή αυτή το σώμα βρίσκεται σε ύψος : } h' = h - y = 0,8 \text{ m} - 0,2 \text{ m} \Rightarrow h' = 0,6 \text{ m}.$$

Σχόλιο : Η μονάδα επιτάχυνσης είναι το 1 m/s^2 και όχι το $1 \text{ m}^2/\text{s}$.



8. (21699)

Η σφυροβολία είναι από τα παλαιότερα αθλήματα των σύγχρονων Ολυμπιακών Αγώνων. Η σφύρα αποτελείται από μία σφαίρα μάζας 4 kg η οποία είναι δεμένη σε σύρμα, το οποίο έχει πολύ μικρότερη (αμελητέα) μάζα σε σχέση με τη σφαίρα.

Αθλήτρια της σφυροβολίας, καθώς προπονείται, περιστρέφει τη σφύρα σε οριζόντιο επίπεδο ώστε η σφαίρα να κάνει κυκλική κίνηση ακτίνας $1,5\text{ m}$, με ταχύτητα σταθερού μέτρου 15 m/s .

4.1. Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται η σφαίρα για να εκτελέσει μία πλήρη περιστροφή καθώς και την γωνιακή της ταχύτητα.

Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε την κεντρομόλο επιτάχυνση της σφαίρας και την κεντρομόλο δύναμη η οποία την αναγκάζει να εκτελεί την περιστροφή και εξηγήστε ποια (ή ποιες) από τις δυνάμεις που ασκούνται στην σφύρα παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

Μονάδες 7

Κατά λάθος, η αθλήτρια αφήνει ελεύθερη τη σφύρα, ενώ αυτή περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, το οποίο βρίσκεται σε ύψος $1,8\text{ m}$ από το έδαφος. Μπορούμε να θεωρήσουμε πως η σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή, θεωρώντας αμελητέα την επίδραση του σύρματος στην κίνησή της και θεωρώντας επίσης αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

4.3. Υπολογίστε πόσο χρόνο θα χρειαστεί η σφαίρα για να φτάσει στο έδαφος, και ποια είναι η οριζόντια απόσταση από το σημείο που αφέθηκε ελεύθερη του σημείου που θα φτάσει.

Μονάδες 6

4.4 Υπολογίστε την εφαπτομένη της γωνίας που θα σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας της σφαίρας με το οριζόντιο επίπεδο όταν η σφαίρα θα φτάσει στο έδαφος.

Μονάδες 6

Υπενθυμίζεται η προσεγγιστική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1

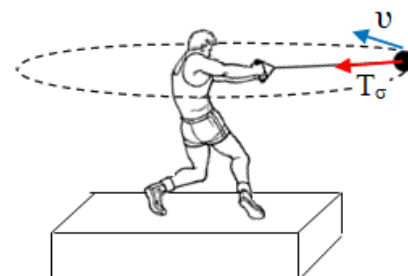
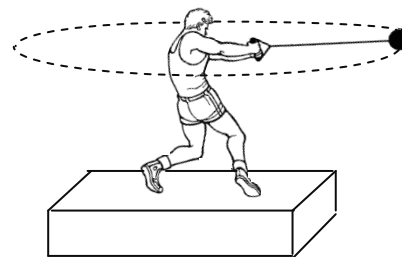
Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v και της περιόδου T συνδέονται με τη σχέση :

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi R}{v}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } T = \frac{2\pi \cdot 1,5}{15}\text{ s} \Rightarrow T = 0,2\pi\text{ s}.$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2\pi} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



4.2

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι : $\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{1,5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha_{\kappa} = 150 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής : $F_{\kappa} = m\alpha_{\kappa} = 4 \cdot 150 \text{ N} \Rightarrow F_{\kappa} = 600 \text{ N}$.

Θεωρώντας ασήμαντο το βάρος της σφαίρας και την αντίσταση του αέρα, μπορούμε να δεχθούμε ότι η κεντρομόλος δύναμη είναι η δύναμη που ασκεί το σύρμα στη σφαίρα (η τάση του σύρματος), δηλαδή : $T_{\sigma} = F_{\kappa} = 600 \text{ N}$.

4.3

Αφού την αφήσει ελεύθερη, η σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h με αρχική ταχύτητα $v_0 = v$. Στον άξονα y η σφαίρα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης y προκύπτει :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,8}{10}} \text{ s} = \sqrt{0,36} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 0,6 \text{ s}.$$

Στον άξονα x η σφαίρα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

$$s = v_0 t_{\text{ολ}} = 15 \cdot 0,6 \text{ m} \Rightarrow s = 9 \text{ m}.$$

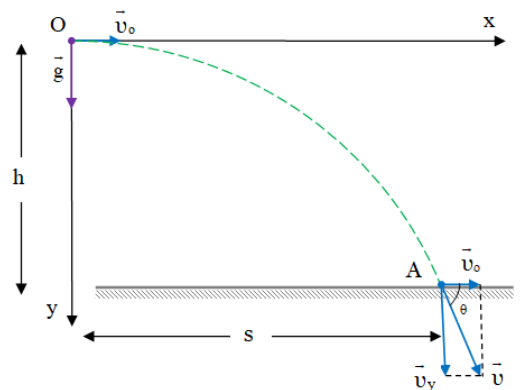
4.4

Τη στιγμή που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_y = g t_{\text{ολ}} = 10 \cdot 0,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ταχύτητα σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ , για την οποία ισχύει :

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{6}{15} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 0,4.$$



Κεφάλαιο 2

Θέμα 4

1. (16040)

Μπαλάκι του τένις, μάζας m , αφήνεται να πέσει από ύψος h_1 από την επιφάνεια του εδάφους. Αφού χτυπήσει στο έδαφος αναπηδά και φτάνει σε ύψος h_2 από την επιφάνεια του εδάφους.

Να υπολογίσετε :

4.1 το μέτρο της ταχύτητας που έχει το μπαλάκι ακριβώς πριν προσκρούσει στο έδαφος,

Μονάδες 5

4.2 τη μεταβολή της ορμής (μέτρο και κατεύθυνση) κατά τη διάρκεια της αναπήδησής του στο έδαφος.

Μονάδες 7

4.3 Αν η μέση συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο μπαλάκι κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης έχει μέτρο 6 N να υπολογιστεί η χρονική διάρκεια της πρόσκρουσης.

Μονάδες 6

Στη συνέχεια το μπαλάκι αναπηδά στο έδαφος για δεύτερη φορά.

4.4 Εάν γνωρίζετε ότι κατά τη διάρκεια της δεύτερης αυτής πρόσκρουσης **χάνεται** στο περιβάλλον **το 50% της ενέργειας** που είχε το μπαλάκι πριν την πρόσκρουση, να υπολογίσετε το νέο μέγιστο ύψος από το έδαφος, h_3 , στο οποίο θα ανέβει.

Μονάδες 7

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$, $m = 100 \text{ g}$, $h_1 = 80 \text{ cm}$, $h_2 = 20 \text{ cm}$. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Έστω ότι το μπαλάκι φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου v_1 και αναπηδά μετά την 1η κρούση με ταχύτητα μέτρου v_2 .

Το μπαλάκι κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Ορίζουμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο έδαφος και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για την αρχική θέση Α και τη θέση Γ ελάχιστα πριν χτυπήσει στο έδαφος :

$$K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_A + U_A \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 \Leftrightarrow v_1^2 = 2gh_1 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,8} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{16} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

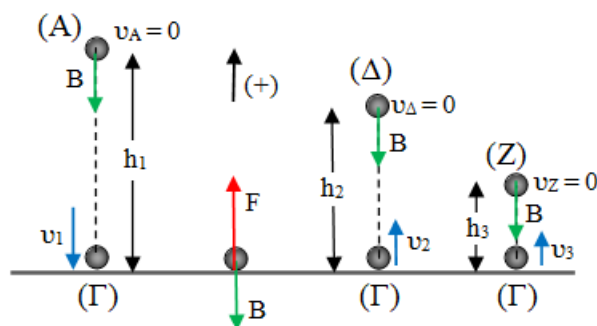
4.2

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη θέση Γ ελάχιστα μετά την 1η κρούση και τη θέση Δ στο μέγιστο ύψος h_2 :

$$K_{\Delta} + U_{\Delta} = K_{\Gamma'} + U_{\Gamma} \Leftrightarrow mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Leftrightarrow v_2^2 = 2gh_2 \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{2gh_2} \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω και υπολογίζουμε την αλγεβρική μεταβολή της ορμής :



$$\Delta p = p_{\text{μετά}} - p_{\text{πριν}} = mv_2 - (-mv_1) = m(v_2 + v_1) \Rightarrow \Delta p = 0,1 \cdot 6 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,6 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, η μεταβολή της ορμής $\Delta \vec{p}$ έχει μέτρο $|\Delta p| = 0,6 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και διεύθυνση κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.

4.3

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton (αλγεβρικά) για τη χρονική διάρκεια Δt της επαφής με το δάπεδο :

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{\Sigma F} \Rightarrow \Delta t = \frac{0,6}{6} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 0,1 \text{ s}.$$

4.4

Κατά τη διάρκεια της κίνησης πριν και μετά τη 2η πρόσκρουση, η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή, άρα ισχύουν οι σχέσεις :

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)'} = E_{\mu\eta\chi(\Delta)} = mgh_2. \quad (1)$$

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)''} = E_{\mu\eta\chi(Z)} = mgh_3. \quad (2)$$

Από την «απώλεια ενέργειας» κατά τη διάρκεια της 2ης πρόσκρουσης προκύπτει :

$$E_{\mu\eta\chi(\Gamma)''} = 0,5 E_{\mu\eta\chi(\Gamma)'} \xrightarrow{(1).(2)} mgh_3 = 0,5mgh_2 \Leftrightarrow h_3 = 0,5h_2 \Rightarrow h_3 = 0,1 \text{ m}.$$

Σχόλιο

Η διατύπωση « . . . χάνεται στο περιβάλλον το 50% της ενέργειας . . . » δεν είναι ακριβής.

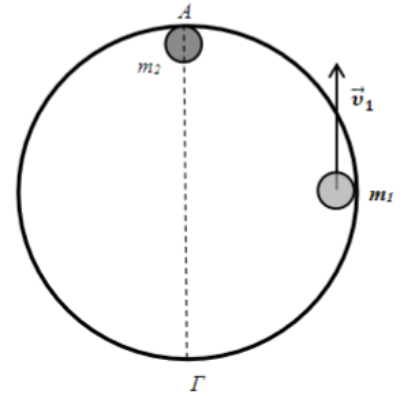
Η ενέργεια δεν χάνεται αλλά μεταφέρεται στο περιβάλλον και μετασχηματίζεται σε άλλες μορφές ενέργειας (π.χ. θερμική).

Επίσης, η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν πρόκειται για κινητική ή για μηχανική ενέργεια.

Στην περίπτωση που πρόκειται για μηχανική ενέργεια, έπρεπε να αναφέρει ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι το οριζόντιο έδαφος.

2. (16041)

Δύο σφαιρίδια Σ_1 και Σ_2 με λείες επιφάνειες και μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 6 \text{ kg}$ αντίστοιχα μπορούν να κινούνται στο εσωτερικό κυκλικού δακτυλίου ακτίνας $R = 2 \text{ m}$ που είναι ακλόνητα στερεωμένος σε λείο οριζόντιο τραπέζι (κάτοψη του οποίου εικονίζεται στο σχήμα). Οι τριβές μεταξύ των σφαιριδίων και του κυκλικού δακτυλίου θεωρούνται αμελητέες, όπως και οι διαστάσεις τους. Αρχικά το σφαιρίδιο Σ_2 είναι ακίνητο, ενώ το Σ_1 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού με ταχύτητα, μέτρου $v_1 = 5 \text{ m/s}$. Αν τα σφαιρίδια Σ_1 και Σ_2 συγκρουστούν πλαστικά, να υπολογίσετε :



4.1 Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση καθώς και την περίοδο της κίνησης του.

Μονάδες 6

4.2 Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου Σ_1 κατά την πλαστική κρούση.

Μονάδες 6

4.3 Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την πλαστική κρούση.

Μονάδες 6

4.4 Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του μεταξύ της θέσης κρούσης A και της αντιδιαμετρικής της Γ.

Μονάδες 7

Απάντηση

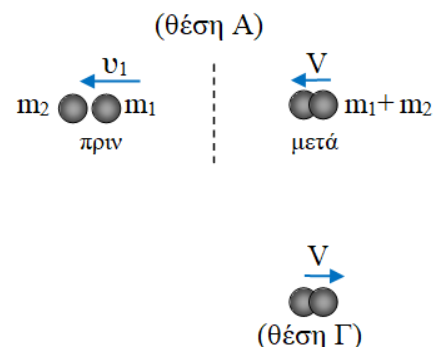
4.1

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = m_1 v_1 + 0 \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{4 \cdot 5 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Για την ομαλή κυκλική κίνηση του συσσωματώματος ισχύει :

$$V = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi R}{V} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 2}{2} \text{ s} \Rightarrow T = 2\pi \text{ s}.$$

4.2

Υπολογίζουμε τη μεταβολή της ορμής του Σ_1 (αλγεβρικά) κατά τη διάρκεια της κρούσης :

$$\Delta p_1 = m_1 V - m_1 v_1 = m_1 (V - v_1) \Rightarrow \Delta p_1 = 4 \cdot (2 - 5) \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -12 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του Σ_1 είναι : $|\Delta p_1| = 12 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

(Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το διάνυσμα $\vec{\Delta p}_1$ έχει φορά προς τα δεξιά).

4.3

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{πριν})} = 50 \text{ J},$$

$$\text{ενώ μετά την κρούση είναι : } K_{\sigma(\text{μετά})} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{μετά})} = 20 \text{ J}.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(\text{πριν})} - K_{\sigma(\text{μετά})} = 50 \text{ J} - 20 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = 30 \text{ J}.$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται (αφού τα σφαιρίδια κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο). Άρα, η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας είναι ίση με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος στη διάρκεια της κρούσης.

$$\text{Επομένως : } |\Delta E_{\sigma}| = 30 \text{ J}.$$

4.4

Στη θέση Γ η ταχύτητα του συσσωματώματος έχει αντίθετη φορά από αυτή που είχε στο Α.

Με θετική φορά προς τα αριστερά στο σχήμα, η μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος για τις θέσεις Α, Γ είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_{\sigma} = p_{\sigma(\Gamma)} - p_{\sigma(A)} = - (m_1 + m_2) V - (m_1 + m_2) V = - 2(m_1 + m_2) V \Rightarrow \Delta p_{\sigma} = - 40 \text{ Kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Άρα, το μέτρο της μεταβολής της ορμής είναι : } |\Delta p_{\sigma}| = 40 \text{ Kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

(Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το διάνυσμα $\vec{\Delta p}_{\sigma}$ έχει φορά προς τα δεξιά).

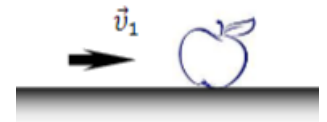
Σχόλια :

Το ερώτημα 4.4 αναφέρεται στο μέτρο της μεταβολής της ορμής του **συσσωματώματος**.

3. (16042)

Σε οριζόντιο επίπεδο βρίσκεται ακίνητο ένα μήλο μάζας $M = 200 \text{ g}$. Ένα μικρό βέλος μάζας $m = 50 \text{ g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10 \text{ m/s}$, χτυπά το μήλο με αποτέλεσμα να το διαπεράσει.

Αν γνωρίζετε ότι η χρονική διάρκεια της διάτρησης είναι $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ και ότι **το βέλος εξέρχεται από το μήλο με ταχύτητα, μέτρου $v_2 = 8 \text{ m/s}$** , να υπολογίσετε :



4.1 το μέτρο της ορμής του μήλου ακριβώς μετά την έξοδο του βέλους από αυτό,

Μονάδες 5

4.2 τη μεταβολή της ορμής του βέλους εξαιτίας της διάτρησης (μέτρο και κατεύθυνση),

Μονάδες 6

4.3 τη μέση δύναμη που ασκείται από το βέλος στο μήλο κατά τη χρονική διάρκεια της διάτρησης καθώς και τη μέση δύναμη που ασκείται από το μήλο στο βέλος στην ίδια χρονική διάρκεια,

Μονάδες 7

4.4 την απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος βέλους – μήλου κατά τη διάρκεια της διάτρησης.

Μονάδες 7

Για την επίλυση του προβλήματος θεωρήστε το βέλος αλλά και το μήλο ως υλικά σημεία.

Απάντηση

4.1

Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του βέλους μετά τη διάτρηση έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική.

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

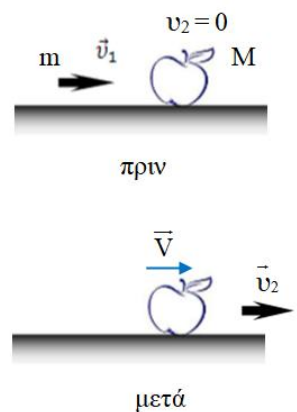
Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow p_{\mu}' + p_{\beta}' = p_{\beta} + 0 \Leftrightarrow MV = mv_1 - mv_2 \Rightarrow$$

$$V = \frac{m(v_1 - v_2)}{M} \Rightarrow V = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot (10 - 8)}{0,2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ορμή του μήλου αμέσως μετά τη διάτρηση έχει μέτρο :

$$p_{\mu}' = MV = (0,2 \text{ Kg}) \cdot \left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 0,1 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Υπολογίζουμε τη μεταβολή της ορμής του βέλους (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_{\beta} = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) \Rightarrow \Delta p_{\beta} = 5 \cdot 10^{-2} \cdot (8 - 10) \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_{\beta} = -0,1 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Επομένως, η μεταβολή της ορμής του βέλους έχει μέτρο $|\Delta p_{\beta}| = 0,1 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και φορά προς τα αριστερά.

4.3

Εφαρμόζουμε (αλγεβρικά) τον 2ο νόμο του Newton για το βέλος στην οριζόντια διεύθυνση και στη διάρκεια Δt της διάτρησης :

$$\bar{F}_{\beta} = \frac{\Delta p_{\beta}}{\Delta t} \Rightarrow \bar{F}_{\beta} = \frac{-0,1}{0,1} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_{\beta} = -1 \text{ N}.$$

Άρα, η μέση δύναμη που δέχθηκε το βέλος από το μήλο στη διάρκεια της διάτρησης έχει μέτρο $|\bar{F}_{\beta}| = 1 \text{ N}$ (και φορά προς τα αριστερά).

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton, η μέση δύναμη που ασκήθηκε από το βέλος στο μήλο έχει μέτρο :

$$|\vec{F}_\mu| = |\vec{F}_\beta| = 1\text{ N} \text{ (και φορά προς τα δεξιά).}$$

4.4

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{πριν})} = 2,5 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{μετά})} = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 8^2 \text{ J} + \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,5^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{μετά})} = 1,625 \text{ J}.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_\sigma| = K_{\sigma(\text{πριν})} - K_{\sigma(\text{μετά})} = 2,5 \text{ J} - 1,625 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_\sigma| = 0,875 \text{ J}.$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης. Άρα, η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας είναι ίση με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος στη διάρκεια της κρούσης.

Επομένως : $|\Delta E_\sigma| = 0,875 \text{ J}.$

Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η ταχύτητα του βέλους μετά τη διάτρηση έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική ταχύτητα.
- 2) Το ερώτημα 4.3 δεν διευκρινίζει αν ζητά το μέτρο ή την αλγεβρική τιμή της μέσης δύναμης.

4. (16043)

Ο καθηγητής Φυσικής σε μία σχολή αξιωματικών του στρατού θέτει ένα πρόβλημα σχετικά με το πώς οι φοιτητές,

αξιοποιώντας τις γνώσεις τους από το μάθημα, θα μπορούσαν να υπολογίσουν την ταχύτητα v του βλήματος ενός πιστολιού.

Ο καθηγητής υποδεικνύει στους φοιτητές την παρακάτω διαδικασία: Το βλήμα μάζας m εκτοξεύεται οριζόντια και σφηνώνεται σε ένα κομμάτι ξύλου, μάζας M , που ισορροπεί ελεύθερο στην κορυφή ενός στύλου ύψους h . Οι μάζες m και M μετρώνται με ζύγιση και το ύψος h μετράται με μετροταινία.

Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση εκτελεί οριζόντια βολή και χτυπάει στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση x από τη βάση του στύλου, αφήνοντας ένα σημάδι στο χώμα ώστε να είναι δυνατή η μέτρηση αυτής της απόστασης x . Οι φοιτητές ακολούθησαν τη διαδικασία και έλαβαν μετρήσεις ακολουθώντας τη διαδικασία που τους υπέδειξε ο καθηγητής τους και κατέγραψαν τις τιμές: $m = 0,1 \text{ kg}$, $M = 1,9 \text{ kg}$, $h = 5 \text{ m}$ και $x = 10 \text{ m}$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις προηγούμενες τιμές των μεγεθών που μετρήθηκαν από τους φοιτητές, και θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα, να υπολογίσετε:

4.1 Το χρονικό διάστημα που πέρασε από την στιγμή της κρούσης μέχρι το συσσωμάτωμα να αγγίξει το έδαφος.

Μονάδες 6

4.2 Το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας V την οποία απέκτησε το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.3 Το μέτρο της ταχύτητας v του βλήματος πριν σφηνωθεί στο ξύλο.

Μονάδες 6

4.4 Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος βλήμα-ξύλο κατά την κρούση.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = V$.

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$$

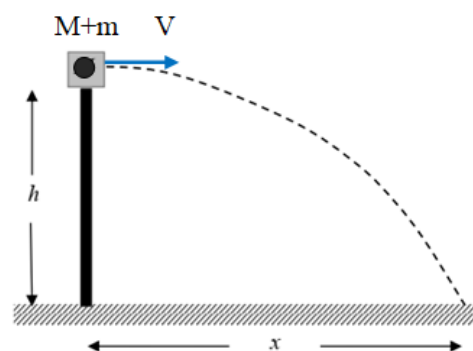
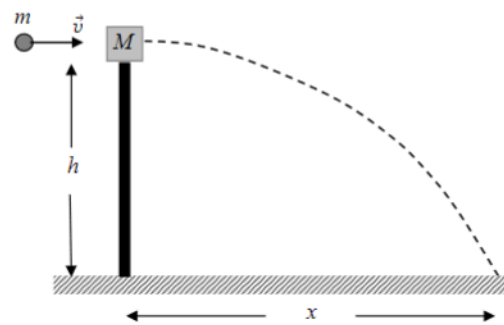
$$t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 1 \text{ s}.$$

4.2

Στον άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση : $x = V t_{\text{ολ}}$.

$$\text{Επομένως : } V = \frac{x}{t_{\text{ολ}}} = \frac{10 \text{ m}}{1 \text{ s}} \Rightarrow V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv = (m+M)V \Leftrightarrow v = \frac{(m+M)V}{m} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot 10}{0,1} \frac{m}{s} \Rightarrow v = 200 \frac{m}{s}.$$

4.4

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(πριν)} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 200^2 J \Rightarrow K_{\sigma(πριν)} = 2000 J.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(μετά)} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 J \Rightarrow K_{\sigma(μετά)} = 100 J.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

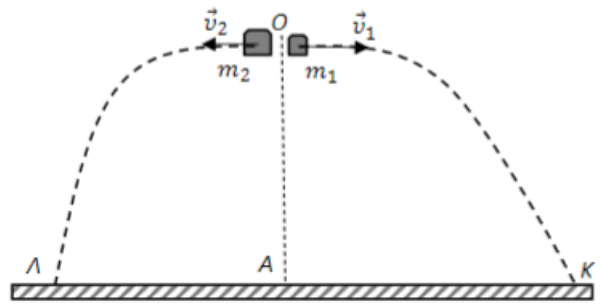
$$|\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(πριν)} - K_{\sigma(μετά)} = 2000 J - 100 J \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = 1900 J.$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης, αφού οι θέσεις των σωμάτων ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Άρα, η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας είναι ίση με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος στη διάρκεια της κρούσης.

Επομένως : $|\Delta E_{\sigma}| = 1900 J.$

5. (16044)

Μία οβίδα μάζας 3 kg εκτοξεύεται από το σημείο Α του οριζόντιου εδάφους κατακόρυφα προς τα πάνω. Όταν φθάνει στο ανώτερο σημείο Ο της τροχιάς της, διασπάται ακαριαία, λόγω εσωτερικής έκρηξης, σε δύο κομμάτια με μάζες $m_1 = 1\text{ kg}$ και $m_2 = 2\text{ kg}$. Το σημείο Ο βρίσκεται σε ύψος 20 m από το έδαφος. Το κομμάτι μάζας m_1 αποκτά αμέσως μετά την έκρηξη οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_1 = 10\text{ m/s}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα κομμάτια m_1 και m_2 κινούνται και πέφτουν στο έδαφος σε σημεία Κ και Λ αντιστοίχως.



Να υπολογίσετε:

4.1 Το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας που αποκτά το κομμάτι μάζας m_2 αμέσως μετά την έκρηξη.

Μονάδες 7

4.2 Το χρονικό διάστημα που κινείται κάθε κομμάτι από τη στιγμή της έκρηξης μέχρι να αγγίξει το έδαφος.

Μονάδες 6

4.3 Την απόσταση ΚΛ.

Μονάδες 7

4.4 Την ταχύτητα (μέτρο και κατεύθυνση) του κομματιού μάζας m_1 ακριβώς πριν ακουμπήσει στο σημείο Κ του εδάφους.

Μονάδες 5

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10\text{ m/s}^2$, και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Στο ανώτερο σημείο Ο της τροχιάς, η ταχύτητα της οβίδας είναι μηδενική.

Αφού η διάρκεια της έκρηξης είναι αμελητέα, μπορούμε να δεχτούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. για τη διάσπαση :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1.$$

Επομένως, αμέσως μετά τη διάσπαση η ορμή του 2ου κομματιού έχει αντίθετη κατεύθυνση από του 1ου.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_2 = p_1 \Leftrightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \Rightarrow v_2 = \frac{1 \cdot 10\text{ m}}{2\text{ s}} \Rightarrow v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

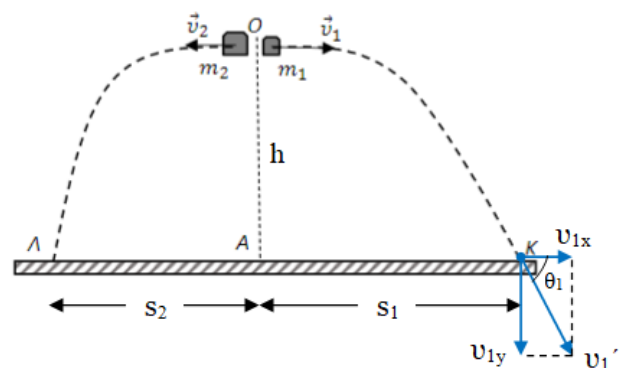
4.2

Μετά τη διάσπαση κάθε κομμάτι εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h .

Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης στον άξονα y υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια $t_{ολ}$ της κίνησης.

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{y=h, t=t_{ολ}} h = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \text{ s} = \sqrt{4} \text{ s} \Rightarrow t_{ολ} = 2 \text{ s}.$$



4.3

Στον οριζόντιο άξονα x τα δύο κομμάτια εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Όταν φτάσουν στο έδαφος θα έχουν διανύσει αποστάσεις s_1, s_2 αντίστοιχα.

1ο κομμάτι

$$x_1 = v_1 t \xrightarrow{t=t_{ολ}, x_1=s_1} s_1 = v_1 t_{ολ} = 10 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 20 \text{ m}.$$

2ο κομμάτι

$$x_2 = v_2 t \xrightarrow{t=t_{ολ}, x_2=s_2} s_2 = v_2 t_{ολ} = 5 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow s_2 = 10 \text{ m}.$$

Για την απόσταση ΚΛ ισχύει : $(ΚΛ) = s_1 + s_2 = 20 \text{ m} + 10 \text{ m} \Rightarrow (ΚΛ) = 30 \text{ m}.$

4.4

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του 1ου κομματιού έχει σταθερό μέτρο : $v_{1x} = v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος το 1ο κομμάτι, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_{1y} = g t_{ολ} = 10 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{1y} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του 1ου κομματιού τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι :

$$v_1' = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{500} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = 10\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα σχηματίζει με την οριζόντια γωνία θ_1 , για την οποία ισχύει :

$$\varepsilon\phi\theta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{20}{10} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta_1 = 2.$$

6. (16050) Δύο σώματα με την ίδια μάζα $m = 0,2 \text{ kg}$, κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά σε λείο οριζόντιο επίπεδο σε αντίθετες κατευθύνσεις (το ένα κινείται με κατεύθυνση προς το άλλο). Το μέτρο της ταχύτητας του πρώτου σώματος είναι $v_1 = 6 \text{ m/s}$ και του δεύτερου $v_2 = 2 \text{ m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ απέχουν μεταξύ τους 4 m .

4.1 Υπολογίστε και σχεδιάστε τις ορμές των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 Ποια χρονική στιγμή θα συγκρουστούν τα δύο σώματα μεταξύ τους;

Μονάδες 6

4.3 Αν η κρούση τους είναι πλαστική και η χρονική της διάρκεια είναι αμελητέα, ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

Μονάδες 6

4.4 Σχεδιάστε (σε κοινό διάγραμμα) τις γραφικές παραστάσεις για τις τιμές των ταχυτήτων των δύο σωμάτων και του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, για το χρονικό διάστημα από 0 μέχρι 1 s . Να θεωρήσετε ως θετική την αρχική φορά κίνησης του σώματος με ταχύτητα v_1 .

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Η ορμή του 1ου σώματος έχει μέτρο $p_1 = mv_1 = 0,2 \text{ Kg} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,2 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

και φορά με την ταχύτητα $\vec{v}_1$ (προς το 2ο σώμα).

Η ορμή του 2ου σώματος έχει μέτρο $p_2 = mv_2 = 0,2 \text{ Kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,4 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

και την ίδια φορά με την ταχύτητα $\vec{v}_2$ (προς το 1ο σώμα).

4.2

Αφού το οριζόντιο δάπεδο είναι λείο, δεν ασκούνται δυνάμεις στα σώματα στη διεύθυνση κίνησης, άρα εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Έστω ότι θα συναντηθούν μετά από χρόνο t , αφού διανύσουν διαστήματα s_1 , s_2 αντίστοιχα. Ισχύουν οι σχέσεις :

$$s_1 = v_1 t \quad (1)$$

$$s_2 = v_2 t \quad (2)$$

Τη στιγμή που συναντώνται ισχύει :

$$s_1 + s_2 = d \xrightarrow{(1),(2)} v_1 t + v_2 t = d \Leftrightarrow t(v_1 + v_2) = d \Leftrightarrow t = \frac{d}{v_1 + v_2} \Rightarrow t = \frac{4}{8} \text{ s} \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}.$$

4.3

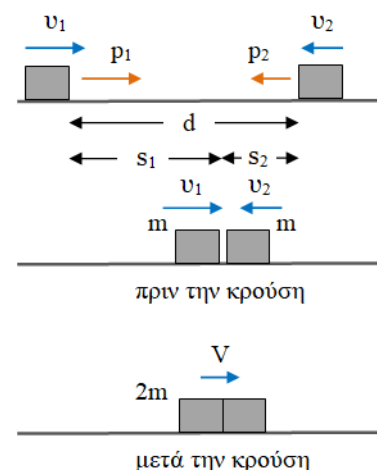
Το σύστημα είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow (m + m)V = mv_1 - mv_2 \Leftrightarrow 2mV = m(v_1 - v_2) \Leftrightarrow V = \frac{v_1 - v_2}{2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{6 - 2}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα το συσσωμάτωμα κινείται προς την ίδια φορά με το 1ο σώμα.



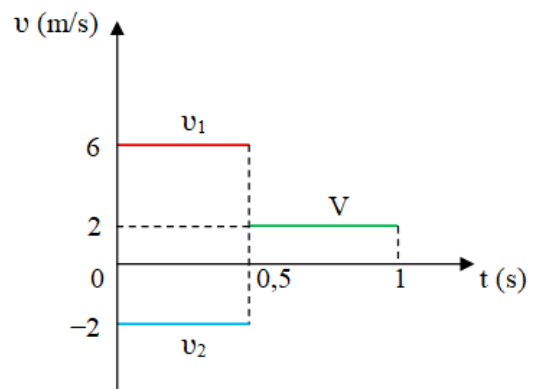
4.4

Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5 \text{ s}$ που συγκρούονται, τα σώματα έχουν σταθερές ταχύτητες με αλγεβρικές τιμές :

$$v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Θεωρώντας ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα ($\Delta t \cong 0$), από τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5 \text{ s}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2 = 1 \text{ s}$ τα σώματα κινούνται με κοινή

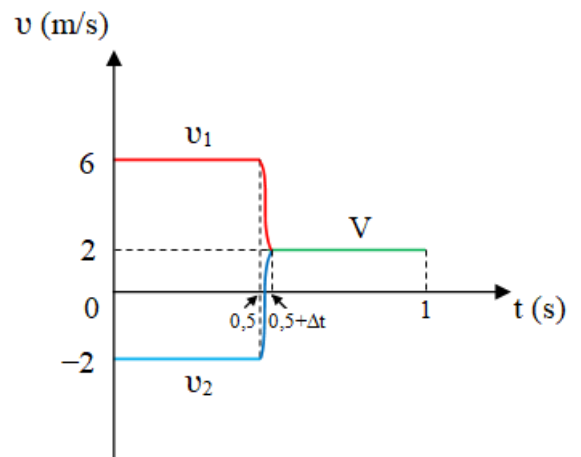
ταχύτητα που έχει αλγεβρική τιμή $V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



Παρατήρηση

Το παραπάνω διάγραμμα είναι «εξιδανικευμένο», αφού δεν είναι δυνατόν η χρονική διάρκεια της κρούσης να είναι μηδενική ($\Delta t \neq 0$).

Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ένα πιο «ρεαλιστικό» διάγραμμα για τις ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση.



7. (16051)

Δύο σημειακά σώματα με μάζες $m_1 = 0,4 \text{ kg}$ και $m_2 = 0,6 \text{ kg}$ κινούνται ευθύγραμμα (και σε αντίθετες κατευθύνσεις) πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζουν συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Κάποια στιγμή τα σώματα συγκρούονται πλαστικά μεταξύ τους. Ακριβώς πριν τη στιγμή της σύγκρουσης τα δύο σώματα είχαν ταχύτητες μέτρων $v_1 = 20 \text{ m/s}$ και $v_2 = 5 \text{ m/s}$ αντίστοιχα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Υπολογίστε τα μέτρα και σχεδιάστε (ποιοτικά) τις ορμές των δύο σωμάτων ακριβώς πριν την κρούση.

Μονάδες 6

4.2 Αν η κρούση τους είναι πλαστική και η χρονική της διάρκεια είναι αμελητέα, ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

Μονάδες 6

4.3 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα για το οποίο θα κινηθεί μετά την κρούση το συσσωμάτωμα.

Μονάδες 7

4.4 Να υπολογίσετε την απώλεια ενέργειας του συσσωματώματος λόγω της τριβής ολίσθησης στο τραχύ δάπεδο.

Μονάδες 6

Απάντηση

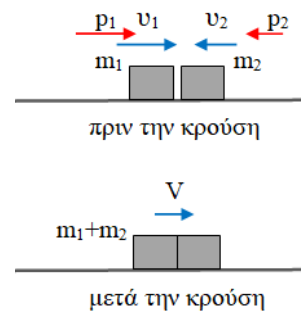
4.1.

Η ορμή του Σ_1 έχει τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$ (προς τα δεξιά) και μέτρο :

$$p_1 = m_1 v_1 = 0,4 \cdot 20 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow p_1 = 8 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ορμή του Σ_2 έχει τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_2$ (προς τα αριστερά) και μέτρο :

$$p_2 = m_2 v_2 = 0,6 \cdot 5 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow p_2 = 3 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = p_1 - p_2 \Leftrightarrow V = \frac{p_1 - p_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow V = \frac{8 - 3}{0,4 + 0,6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα το συσσωμάτωμα κινείται προς την ίδια φορά με το 1ο σώμα.

4.3

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται στο τραχύ δάπεδο μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής.

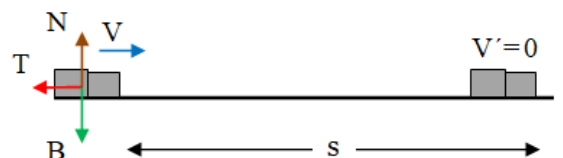
Στον κατακόρυφο άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B = 0 \Leftrightarrow N = (m_1 + m_2)g \Rightarrow N = 10 \text{ N}.$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N = 0,2 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T = 2 \text{ N}.$

Στον οριζόντιο άξονα x εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton αλγεβρικά :

$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow -T = \frac{0 - (m_1 + m_2)V}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{(m_1 + m_2)V}{T} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{2} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 2,5 \text{ s}.$$



4.4

Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ, το έργο της τριβής είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος, κατά τη διάρκεια της ολίσθησης στο οριζόντιο επίπεδο :

$$W_T = \Delta K = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5^2 \text{ J} \Rightarrow W_T = -12,5 \text{ J}.$$

Η «απώλεια» ενέργειας λόγω της τριβής ολίσθησης είναι ίση με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής, άρα : $|\Delta E| = |W_T| = 12,5 \text{ J}$.

8. (16052)

Μικρή σφαίρα μάζας $m = 300 \text{ g}$ είναι τοποθετημένη πάνω σε κατακόρυφο στύλο μεγάλου ύψους H . Ξαφνικά μια έκρηξη διασπά τη σφαίρα σε δύο κομμάτια που αμέσως μετά την έκρηξη κινούνται σε οριζόντια διεύθυνση. Οι μάζες των δύο κομματιών είναι m_1 και m_2 , για τις οποίες ισχύει:

$$m_2 = 2m_1.$$

Τα δύο κομμάτια m_1 , m_2 , εκτελούν οριζόντιες βολές και πέφτουν στο οριζόντιο δάπεδο που βρίσκεται στη βάση του στύλου, μετά από χρόνο 3 s από τη στιγμή της έκρηξης, στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, που απέχουν μεταξύ τους $D = 180 \text{ m}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Να υπολογίσετε:

4.1 Το ύψος του στύλου.

Μονάδες 6

4.2 Τα μέτρα των ταχυτήτων που έχουν τα δύο κομμάτια, αμέσως μετά την έκρηξη.

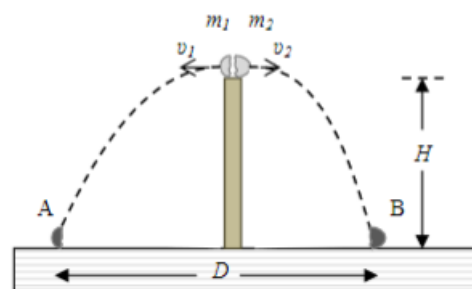
Μονάδες 6

4.3 Ποια η ταχύτητα (μέτρο, κατεύθυνση) με την οποία φτάνει η μάζα m_1 στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.4 Την απόσταση μεταξύ των δύο κομματιών 2 s μετά από τη στιγμή της έκρηξης.

Μονάδες 7



Απάντηση

4/1.

Μετά τη διάσπαση κάθε κομμάτι εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος H .

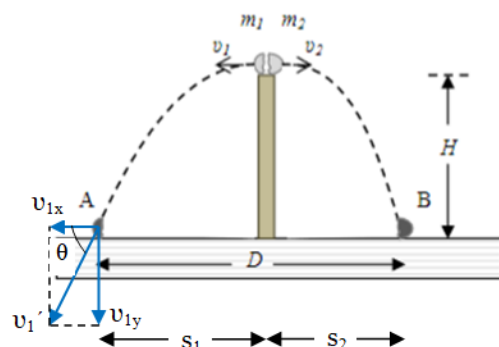
Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης στον άξονα y

υπολογίζουμε το ύψος του στύλου :

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{y=H, t=t_{ολ}} H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 \text{ m} \Rightarrow$$

$$H = 45 \text{ m}.$$



4.2

Αφού η διάρκεια της έκρηξης είναι αμελητέα, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. :

$$\vec{p}_{ολ(μετά)} = \vec{p}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1.$$

Επομένως, αμέσως μετά τη διάσπαση η ορμή του 2ου κομματιού έχει αντίθετη κατεύθυνση από του 1ου.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

$$p_2 = p_1 \Leftrightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1 \xrightarrow{m_2 = 2m_1} v_1 = 2v_2. \quad (1)$$

Στον άξονα x τα δύο κομμάτια εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και όταν φτάσουν στο έδαφος θα έχουν διανύσει οριζόντιες αποστάσεις s_1 , s_2 αντίστοιχα.

1ο κομμάτι

$$x_1 = v_1 t \xrightarrow{t=t_{ολ}, x_1=s_1} s_1 = v_1 t_{ολ}. \quad (2)$$

2ο κομμάτι

$$x_2 = v_2 t \xrightarrow{t=t_{ολ}, x_2=s_2} s_2 = v_2 t_{ολ}. \quad (3)$$

$$\text{Ισχύει: } D = s_1 + s_2 \xrightarrow{(2),(3)} v_1 t_{ολ} + v_2 t_{ολ} = D \xrightarrow{(1)} 3v_2 t_{ολ} = D \Rightarrow v_2 = \frac{D}{3t_{ολ}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } v_2 = \frac{180\text{m}}{9\text{s}} \Rightarrow v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Άρα: } v_1 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας του 1ου κομματιού είναι σταθερό: $v_{1x} = v_1 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος το 1ο κομμάτι, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο:

$$v_{1y} = g t_{ολ} = 10 \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{1y} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του 1ου κομματιού τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος είναι:

$$v_1' = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{2500} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα σχηματίζει με τον άξονα x γωνία θ , για την οποία ισχύει:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{30}{40} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = 0,75.$$

4.4

Αφού τα δύο κομμάτια αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα, στον ίδιο χρόνο t θα έχουν διανύσει την ίδια κατακόρυφη απόσταση y , άρα θα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Στον άξονα x τα δύο κομμάτια σε χρόνο t θα έχουν διανύσει οριζόντιες αποστάσεις s_1' , s_2' αντίστοιχα.

1ο κομμάτι

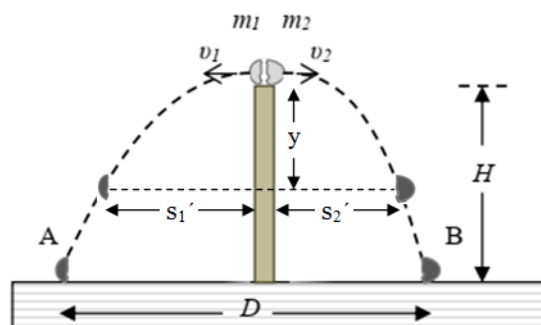
$$s_1' = v_1 t \Rightarrow s_1' = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{s} \Rightarrow s_1' = 80\text{m}.$$

2ο κομμάτι

$$s_2' = v_2 t \Rightarrow s_2' = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{s} \Rightarrow s_2' = 40\text{m}.$$

Η (οριζόντια) απόσταση των δύο κομματιών τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ είναι:

$$d = s_1' + s_2' = 80\text{m} + 40\text{m} \Rightarrow d = 120\text{m}.$$



9. (16054)

Δύο αυτοκινητάκια από παιδικό παιχνίδι, με μάζες $m_1 = 250 \text{ g}$ και $m_2 = 300 \text{ g}$ αντίστοιχα, κινούνται σε κυκλική πίστα ακτίνας $R = \frac{200}{\pi} \text{ cm}$ και πραγματοποιούν ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητες μέτρου $v_1 = 40 \text{ cm/s}$ και $v_2 = 50 \text{ cm/s}$ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

4.1 Τις περιόδους περιστροφής των δύο αυτοκινήτων T_1 και T_2 .

Μονάδες 6

4.2 Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων των αυτοκινήτων, δεδομένου ότι κινούνται κατά την ίδια φορά.

Μονάδες 6

Ξαφνικά, το δεύτερο αυτοκινητάκι ξεφεύγει από την πορεία του. Κινούμενο ευθύγραμμα προσκρούει κάθετα στον προστατευτικό ελαστικό τοίχο της πίστας και γυρίζει προς τα πίσω με ταχύτητα μέτρου $v_3 = 20 \text{ cm/s}$. Αν η πρόσκρουση διαρκεί $\Delta t = 0,07 \text{ s}$ να υπολογιστούν:

4.3 Η μέση δύναμη κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά που δέχθηκε το αυτοκινητάκι από τον προστατευτικό τοίχο της πίστας κατά την πρόσκρουση.

Μονάδες 6

4.4 Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά την πρόσκρουση.

Μονάδες 7

Απάντηση**4.1**

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της ταχύτητας v και η περίοδος T συνδέονται με τη σχέση :

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Εφαρμόζουμε τη σχέση για κάθε αυτοκινητάκι.

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v_1} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{\pi} \text{ m}}{0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow T_1 = 10 \text{ s}.$$

$$T_2 = \frac{2\pi R}{v_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{\pi} \text{ m}}{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow T_2 = 8 \text{ s}.$$

4.2

Έστω ότι τα αυτοκινητάκια θα συναντηθούν μετά από χρόνο t .

1ο

Σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα $s_1 = v_1 t$. (1)

2ο

Σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα : $s_2 = v_2 t$. (2)

Αφού κινούνται κατά την ίδια φορά, τη στιγμή που συναντώνται το 2ο θα έχει κάνει μία περιστροφή επιπλέον από το 1ο, άρα ισχύει :

$$s_2 - s_1 = 2\pi R \xrightarrow{(1),(2)} v_2 t - v_1 t = 2\pi R \Leftrightarrow t(v_2 - v_1) = 2\pi R \Leftrightarrow t = \frac{2\pi R}{v_2 - v_1}.$$

Με αντικατάσταση : $t = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{\pi}}{0,5-0,4} \text{ s} \Rightarrow t=40\text{s}.$

4.3

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_2$ και υπολογίζουμε την αλγεβρική μεταβολή της ορμής του 2ου κατά τη διάρκεια της κρούσης με τον τοίχο :

$$\Delta p_2 = -m_2 v_3 - m_2 v_2 = -m_2 (v_3 + v_2) = -0,3\text{Kg} \cdot (0,2 + 0,5) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Delta p_2 = -0,21\text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δεχόμαστε ότι η μοναδική οριζόντια δύναμη που ασκείται στο αυτοκινητάκι κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης, είναι η δύναμη $\vec{F}_2$ από τον τοίχο.

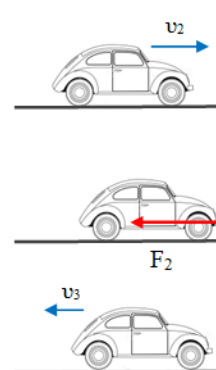
Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton $\vec{F}_2 = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$, η $\vec{F}_2$ θα έχει την ίδια διεύθυνση

με τη μεταβολή της ορμής $\Delta \vec{p}_2$, άρα θα είναι κάθετη στον τοίχο.

Η μέση δύναμη που ασκήθηκε από τον τοίχο στο αυτοκινητάκι είναι (αλγεβρικά) :

$$\bar{F}_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{-0,21\text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,07\text{s}} \Rightarrow \bar{F}_2 = -3\text{N}.$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει αντίθετη φορά από την αρχική ταχύτητα $\vec{v}_2$.



4.4

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του 2ου αυτοκινήτου λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_2| = K_{2(\text{πριν})} - K_{2(\text{μετά})} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_2 v_3^2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_3^2).$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του 2ου αυτοκινήτου που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια λόγω της κρούσης είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{|\Delta K_2|}{K_{2(\text{πριν})}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_3^2)}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} \cdot 100\% = \frac{v_2^2 - v_3^2}{v_2^2} \cdot 100\% = \left[1 - \left(\frac{v_3}{v_2} \right)^2 \right] \cdot 100\%.$$

Με αντικατάσταση : $\Pi(\%) = (1 - 0,16) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 84\%.$

10. (16072) Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 0,6 \text{ Kg}$ και $m_2 = 0,4 \text{ Kg}$ **κινούνται πάνω σε λείο**. Τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και συγκρούονται πλαστικά, έχοντας ακριβώς πριν τη στιγμή της σύγκρουσης ταχύτητες μέτρων $v_1 = 20 \text{ m/s}$ και $v_2 = 5 \text{ m/s}$ αντίστοιχα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

Μονάδες 6

Το συσσωμάτωμα αφού διανύσει μικρή απόσταση στο λείο οριζόντιο επίπεδο εισέρχεται σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$.

4.3 Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος κατά την κίνησή του στο τραχύ οριζόντιο επίπεδο.

Μονάδες 7

4.4 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα της κίνησης του συσσωματώματος στο τραχύ οριζόντιο επίπεδο και την απόσταση που διανύει σε αυτό μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 6

Απάντηση

4.1

Δεχόμαστε ότι τα σώματα κινούνται σε **λείο οριζόντιο επίπεδο**.

Αφού το επίπεδο είναι λείο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{0,6 \cdot 20 - 0,4 \cdot 5}{0,6 + 0,4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα το συσσωμάτωμα κινείται προς την ίδια φορά με το 1ο σώμα με ταχύτητα μέτρου $V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.2

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(πριν)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 5^2 \right) \text{J} \Rightarrow K_{\sigma(πριν)} = 125 \text{J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

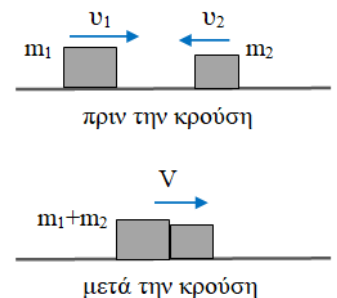
$$K_{\sigma(μετά)} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 \text{J} \Rightarrow K_{\sigma(μετά)} = 50 \text{J}.$$

Υπολογίζουμε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης :

$$\Delta K_{\sigma} = K_{\sigma(μετά)} - K_{\sigma(πριν)} = 50 \text{J} - 125 \text{J} \Rightarrow \Delta K_{\sigma} = -75 \text{J}.$$

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{\Delta K_{\sigma}}{K_{\sigma(πριν)}} \cdot 100\% = \frac{-75}{125} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = -60\%.$$



4.3

Τη στιγμή που εισέρχεται το συσσωμάτωμα στο τραχύ

δάπεδο έχει ταχύτητα μέτρου $V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Στον κατακόρυφο άξονα y ισχύει :

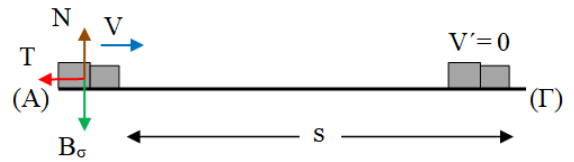
$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - B_\sigma = 0 \Leftrightarrow N = (m_1 + m_2)g \Rightarrow N = 10 \text{ N.}$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης : $T = \mu N = 0,2 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T = 2 \text{ N.}$

Στον οριζόντιο άξονα x εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton (αλγεβρικά) :

$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p_\sigma}{\Delta t} \Rightarrow -T = \frac{\Delta p_\sigma}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta p_\sigma}{\Delta t} = -2 \text{ N.}$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος έχει μέτρο $\left| \frac{\Delta p_\sigma}{\Delta t} \right| = 2 \text{ N}$ και φορά προς τα αριστερά.



4.4

Κατά τη χρονική διάρκεια Δt της κίνησης του συσσωματώματος στο τραχύ δάπεδο, στον άξονα x ισχύει :

$$\frac{\Delta p_\sigma}{\Delta t} = -T \Leftrightarrow \frac{0 - p_\sigma}{\Delta t} = -T \Leftrightarrow \Delta t = \frac{p_\sigma}{T} = \frac{(m_1 + m_2)V}{T} \Rightarrow \Delta t = \frac{1 \cdot 10}{2} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ s.}$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του συσσωματώματος στο τραχύ δάπεδο μέχρι να σταματήσει :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -T \cdot s \Leftrightarrow s = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2T} \Rightarrow s = \frac{1 \cdot 100}{2 \cdot 2} \text{ m} \Rightarrow s = 25 \text{ m.}$$

Σχόλια :

1) Στην 1η πρόταση « . . . κινούνται πάνω σε λείο » λείπει η φράση « . . . οριζόντιο επίπεδο ».

2) Στο ερώτημα 4.3 η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητά την αλγεβρική τιμή ή το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής.

11. (16073)

Ένα κιβώτιο μάζας $M = 970 \text{ g}$ βρίσκεται ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Βλήμα μάζας $m = 30 \text{ g}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_\beta = 200 \text{ m/s}$, συγκρούεται με το ακίνητο κιβώτιο και σφηνώνεται σ' αυτό, οπότε δημιουργείται συσσωμάτωμα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκείται από το βλήμα στο κιβώτιο, αν το βλήμα ακινητοποιήθηκε μέσα στο κιβώτιο σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 0,01 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3 Να υπολογίσετε την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος κιβώτιο – βλήμα λόγω της κρούσης.

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 7

Απάντηση**4.1**

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_\beta$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ}(\text{πριν})} = p_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow m v_\beta = (m + M) V \Leftrightarrow V = \frac{m v_\beta}{m + M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \text{ m}}{1} \frac{1}{\text{s}} \Rightarrow V = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Η μεταβολή της ορμής του κιβωτίου στη διάρκεια της εισόδου του βλήματος είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_\kappa = p_{\kappa(\text{μετά})} - p_{\kappa(\text{πριν})} = M V - 0 = M V \Rightarrow \Delta p_\kappa = 0,97 \cdot 6 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,82 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση οριζόντια δύναμη που ασκήθηκε από το βλήμα στο κιβώτιο κατά τη διάρκεια της εισόδου, είναι :

$$\bar{F}_\kappa = \frac{\Delta p_\kappa}{\Delta t} = \frac{5,82}{10^{-2}} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_\kappa = 582 \text{ N}.$$

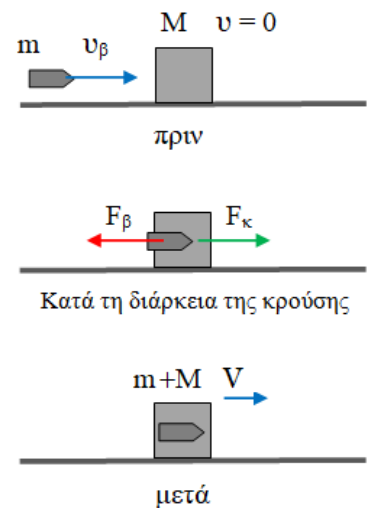
Άρα, η μέση δύναμη που ασκήθηκε από το βλήμα στο κιβώτιο έχει μέτρο $|\bar{F}_\kappa| = 582 \text{ N}$ και την ίδια φορά με την $\vec{v}_\beta$.

4.3

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m v_\beta^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 200^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{πριν})} = 600 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :



$$K_{\sigma(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = 18 \text{ J}.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(\pi\rho\iota\nu)} - K_{\sigma(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = 600 \text{ J} - 18 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = 582 \text{ J}.$$

4.4

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται στο τραχύ οριζόντιο δάπεδο και σταματά αφού διανύσει απόσταση s .

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = (m+M)g \Rightarrow N = 10 \text{ N}.$$

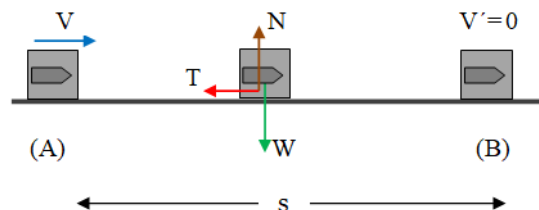
Από το νόμο της τριβής προκύπτει :

$$T = \mu N = 0,2 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T = 2 \text{ N}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση Α της κρούσης (ελάχιστα μετά τη κρούση) μέχρι τη θέση Β που μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος :

$$K_B - K_A = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = -T \cdot s \Leftrightarrow s = \frac{(m+M)V^2}{2T}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } s = \frac{1 \cdot 6^2}{2 \cdot 2} \text{ m} \Rightarrow s = 9 \text{ m}.$$



12. (16093)

Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ προς τα πάνω από εξώστη ύψους $H = 25 \text{ m}$. Η αλγεβρική τιμή της ορμής του σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $p = 30 - 15t \text{ (SI)}$. Η βαρυτική επιτάχυνση έχει μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής και τη μάζα του σώματος. Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε τη χρονική άφιξη του σώματος στο μέγιστο ύψος. Μονάδες 6

4.3 Να βρείτε το μέγιστο ύψος, μετρημένο από το έδαφος, που φθάνει το σώμα. Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε τη συνολική μεταβολή της ορμής του σώματος από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι τη στιγμή της προσεδάφισής του.

Αντιστάσεις από τον αέρα παραλείπονται.

Μονάδες 7

Απάντηση**4.1**1ος τρόπος

Σε δύο χρονικές στιγμές t_1, t_2 η ορμή του σώματος έχει αλγεβρική τιμή :

$$p_1 = 30 - 15t_1 \quad (1)$$

$$p_2 = 30 - 15t_2 \quad (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τη σχέση (1) από τη σχέση (2) :

$$p_2 - p_1 = 30 - 15t_2 - 30 + 15t_1 \Leftrightarrow p_2 - p_1 = -15(t_2 - t_1) \Leftrightarrow$$

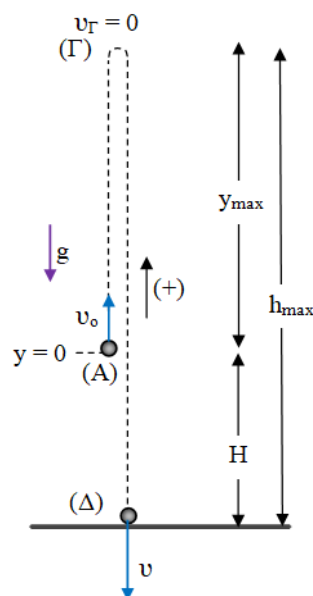
$$\Delta p = -15(\Delta t) \Leftrightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = -15 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος.

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, το μέτρο του βάρους είναι :

$$B = |\Sigma F| = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = 15 \text{ N}.$$

$$\text{Ισχύει : } B = mg \Leftrightarrow m = \frac{B}{g} \Rightarrow m = \frac{15}{10} \text{ Kg} \Rightarrow m = 1,5 \text{ Kg}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton αλγεβρικά για τη χρονική διάρκεια $\Delta t = t - t_0 = t$, όπου t μία τυχαία χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της ανόδου :

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow \Sigma F = \frac{p - p_0}{t} \Leftrightarrow p = p_0 + (\Sigma F)t. \quad (3)$$

Από τη σύγκριση της σχέσης (3) με την εξίσωση $p = 30 - 15t$, προκύπτει : $\Sigma F = -15 \text{ N}$.

$$\text{Επομένως : } \frac{\Delta p}{\Delta t} = -15 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος, που έχει μέτρο : $B = |\Sigma F| = 15 \text{ N}$.

$$\text{Ισχύει : } B = mg \Leftrightarrow m = \frac{B}{g} \Rightarrow m = \frac{15}{10} \text{ Kg} \Rightarrow m = 1,5 \text{ Kg}.$$

4.2

Τη στιγμή που φθάνει το σώμα στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητα και η ορμή μηδενίζονται, άρα :

$$p = 30 - 15t \xrightarrow{t=t_\alpha, p=0} 0 = 30 - 15t_\alpha \Leftrightarrow 15t_\alpha = 30 \Leftrightarrow t_\alpha = 2 \text{ s}.$$

4.3

Τη χρονική στιγμή της εκτόξευσης το σώμα έχει αρχική ορμή $p_o = 30 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και αρχική ταχύτητα :

$$v_o = \frac{p_o}{m} = \frac{30 \text{ m}}{1,5 \text{ s}} \Rightarrow v_o = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

1ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση Α της εκτόξευσης μέχρι τη θέση Γ στο μέγιστο ύψος :

$$K_{\Gamma} - K_A = W_B^{A \rightarrow \Gamma} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_o^2 = - m g y_{\max} \Leftrightarrow y_{\max} = \frac{v_o^2}{2g} \Rightarrow y_{\max} = \frac{20^2}{2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow y_{\max} = 20 \text{ m}.$$

2ος τρόπος

Στη διάρκεια της ανόδου το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου $\alpha = g$. Το μέγιστο ύψος από το σημείο εκτόξευσης είναι :

$$y_{\max} = v_o t_{\alpha} - \frac{1}{2} g t_{\alpha}^2 = \left(20 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 \right) \text{ m} = (40 - 20) \text{ m} \Rightarrow y_{\max} = 20 \text{ m}.$$

➤ Το μέγιστο ύψος από το έδαφος είναι : $h_{\max} = H + y_{\max} = 25 \text{ m} + 20 \text{ m} \Rightarrow h_{\max} = 45 \text{ m}.$

4.4

1ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κάθοδο από τη θέση Γ μέχρι τη θέση Δ στο έδαφος :

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_B^{\Gamma \rightarrow \Delta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - 0 = m g h_{\max} \Leftrightarrow v^2 = 2 g h_{\max} \Leftrightarrow v = \sqrt{2 g h_{\max}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{900} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η αλγεβρική μεταβολή της ορμής, από τη στιγμή της εκτόξευσης μέχρι να φτάσει στο έδαφος, είναι :

$$\Delta p_{o\lambda} = p - p_o = -m v - p_o \Rightarrow \Delta p_{o\lambda} = (-1,5 \cdot 30 - 30) \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_{o\lambda} = -75 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ος τρόπος

Κατά τη διάρκεια της καθόδου το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος $h_{\max}$. Αν Δt_{κ} η χρονική διάρκεια της καθόδου, ισχύει :

$$h_{\max} = \frac{1}{2} g (\Delta t_{\kappa})^2 \Leftrightarrow (\Delta t_{\kappa})^2 = \frac{2 h_{\max}}{g} \Leftrightarrow \Delta t_{\kappa} = \sqrt{\frac{2 h_{\max}}{g}} \Rightarrow \Delta t_{\kappa} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} \text{ s} = \sqrt{9} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_{\kappa} = 3 \text{ s}.$$

Η συνολική διάρκεια της κίνησης είναι : $\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_{\alpha} + \Delta t_{\kappa} = 5 \text{ s}.$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton αλγεβρικά για τη συνολική χρονική διάρκεια $\Delta t_{o\lambda}$:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p_{o\lambda}}{\Delta t_{o\lambda}} \Leftrightarrow \Delta p_{o\lambda} = (\Sigma F)(\Delta t_{o\lambda}) \Rightarrow \Delta p_{o\lambda} = (-15 \text{ N}) \cdot (5 \text{ s}) \Rightarrow \Delta p_{o\lambda} = -75 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

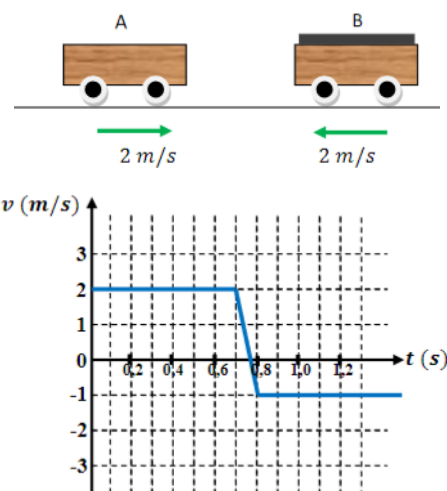
➤ Άρα, η μεταβολή της ορμής έχει μέτρο $|\Delta p_{o\lambda}| = 75 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω.

Σχόλια :

- 1) Η διατύπωση στο ερώτημα 4.2 «να υπολογίσετε τη χρονική άφιξη του σώματος στο μέγιστο ύψος» δεν είναι ακριβής. Προφανώς, εννοεί να υπολογιστεί **η χρονική στιγμή της άφιξης** στο μέγιστο ύψος.
- 2) Στο ερώτημα 4.4 δεν διευκρινίζει η εκφώνηση αν ζητά την αλγεβρική τιμή ή το μέτρο της μεταβολής της ορμής.

13. (16111)

Στο παρακάτω σχήμα, το εργαστηριακό αμαξίδιο A, μάζας 1 kg , κινείται οριζόντια με αρχική ταχύτητα 2 m/s . Συγκρούεται με το εργαστηριακό αμαξίδιο B μάζας 2 kg το οποίο κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου 2 m/s . Η γραφική παράσταση που ακολουθεί, μας δείχνει την μεταβολή της ταχύτητας του αμαξιδίου A (πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την κρούση).



4.1 Υπολογίστε τη μεταβολή της ορμής του αμαξιδίου A κατά την κρούση.

Μονάδες 6

4.2 Υπολογίστε την ταχύτητα του αμαξιδίου B μετά την κρούση.

Μονάδες 7

4.3 Υπολογίστε τη δύναμη που ασκήθηκε στο αμαξίδιο B κατά την κρούση.

Μονάδες 6

4.4 Υπολογίστε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο αμαξιδίων κατά την κρούση.

Μονάδες 6

Απάντηση

4.1

Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα $\vec{v}_A'$ του A μετά την κρούση έχει την ίδια διεύθυνση με τη $\vec{v}_A$.

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η ταχύτητα του A μετά την κρούση έχει αλγεβρική τιμή $v_A' = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Η μεταβολή της ορμής του αμαξιδίου A είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_A = p_A' - p_A = m_A (v_A' - v_A) = 1 \cdot (-1 - 2) \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_A = -3 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το διάνυσμα $\Delta \vec{p}_A$ έχει αντίθετη φορά από την $\vec{v}_A$.

4.2

Η ταχύτητα του A πριν την κρούση είναι σταθερή, άρα δεν υπάρχει τριβή ολίσθησης.

Επομένως το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης.

Αφού οι ορμές $\vec{p}_A$, $\vec{p}_B$, $\vec{p}_A'$ έχουν την ίδια διεύθυνση, άρα και η ορμή $\vec{p}_B'$ έχει την ίδια διεύθυνση.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow m_A v_A' + m_B v_B' = m_A v_A + m_B v_B \Leftrightarrow v_B' = \frac{m_A (v_A - v_A') + m_B v_B}{m_B} \Rightarrow$$

$$v_2' = \frac{1 \cdot [2 - (-1)] + 2 \cdot (-2)}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2' = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα το αμαξίδιο B μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $|v_2'| = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.3

Η μεταβολή της ορμής του αμαξιδίου B κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_B = p_B' - p_B = m_B (v_B' - v_B) = 2 \cdot [-0,5 - (-2)] \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_B = 3 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Από το διάγραμμα βρίσκουμε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι : $\Delta t = 0,8 \text{ s} - 0,7 \text{ s} = 0,1 \text{ s}$.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στον άξονα x (αλγεβρικά) :

$$\Sigma F_B = \frac{\Delta p_B}{\Delta t} \Rightarrow F_B = \frac{3}{0,1} \text{ N} \Rightarrow F_B = 30 \text{ N}.$$

Άρα, η δύναμη που ασκήθηκε από το Α στο Β στη διάρκεια της κρούσης έχει φορά προς τα δεξιά και μέτρο 30 N.

4.4

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 \right) \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{πριν})} = 6 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{μετά})} = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 \right) \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{μετά})} = 0,75 \text{ J}.$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος στη διάρκεια της κρούσης είναι :

$$\Delta K_{\sigma} = K_{\sigma(\text{μετά})} - K_{\sigma(\text{πριν})} = 0,75 \text{ J} - 6 \text{ J} \Rightarrow \Delta K_{\sigma} = -5,25 \text{ J}.$$

Δηλαδή, η κινητική ενέργεια του συστήματος ελαττώθηκε κατά 5,25 J.

Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η ταχύτητα $\vec{v}_A'$ έχει την ίδια διεύθυνση με τις αρχικές ταχύτητες των αμαξιδίων.
- 2) Στα ερωτήματα 4.1, 4.2, 4.3 δεν διευκρινίζει αν ζητά την αλγεβρική τιμή ή το μέτρο του μεγέθους.

14. (16123)

Σώμα B, μάζας $M = 0,9 \text{ Kg}$ βρίσκεται ακίνητο στην άκρη ενός τραπεζιού ύψους $h = 0,45 \text{ m}$ από το έδαφος.

Βλήμα A, μάζας $m = 0,1 \text{ Kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v = 100 \text{ m/s}$ (όπως φαίνεται στο σχήμα) και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα B δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα.

4.1 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 5

4.2 Να υπολογίσετε την απώλεια στην κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων A και B λόγω της κρούσης.

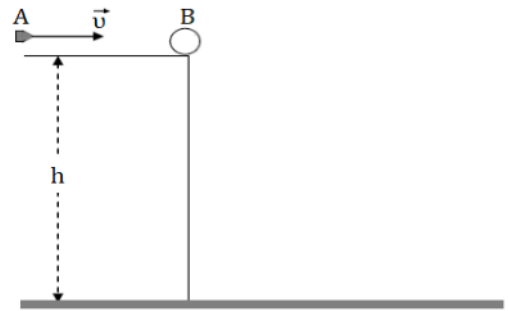
Μονάδες 5

4.3 Κάποια στιγμή το συσσωμάτωμα διανύοντας μια οριζόντια απόσταση s , φτάνει στο έδαφος. Να υπολογίσετε την απόσταση s .

Μονάδες 7

4.4 Μετά από χρόνο t_1 από τη στιγμή της κρούσης και πριν το συσσωμάτωμα να φτάσει στο έδαφος, η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι $K_1 = 50,5 \text{ J}$. Να βρείτε την απόσταση από το έδαφος του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή t_1 .

Μονάδες 8

**Απάντηση****4.1**

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ}(\text{πριν})} = p_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow mv = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{0,1 \cdot 100}{1} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 100^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{πριν})} = 500 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

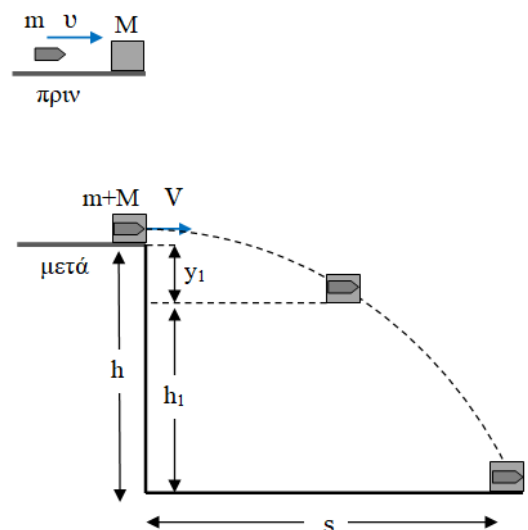
$$K_{\sigma(\text{μετά})} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{μετά})} = 50 \text{ J}.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(\text{πριν})} - K_{\sigma(\text{μετά})} = 500 \text{ J} - 50 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = 450 \text{ J}.$$

4.3

Από τη στιγμή που το συσσωμάτωμα εγκαταλείπει την επιφάνεια του τραπεζιού, εκτελεί οριζόντια βολή. Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος h .



Αντικαθιστούμε $y = h$ στην εξίσωση της μετατόπισης και υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης $t_{ολ}$:

$$h = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,45}{10}} s = \sqrt{0,09} s \Rightarrow t_{ολ} = 0,3 s.$$

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = V$.

Από τη στιγμή της κρούσης μέχρι να φτάσει στο έδαφος, διανύει οριζόντια απόσταση :

$$s = V t_{ολ} = 10 \cdot 0,3 \text{ m} \Rightarrow s = 3 \text{ m}.$$

4.4

Έστω ότι μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 το συσσωμάτωμα έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά y_1 .

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από σημείο εκτόξευσης μέχρι το σημείο που βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_1 :

$$K_1 - K_o = W_B \Leftrightarrow K_1 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gy_1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{K_1}{(m+M)g} - \frac{V^2}{2g} \Rightarrow$$

$$y_1 = \left(\frac{50,5}{10} - \frac{10^2}{20} \right) \text{ m} \Rightarrow y_1 = 0,05 \text{ m}.$$

Η απόσταση από το έδαφος είναι : $h_1 = h - y_1 = 0,45 \text{ m} - 0,05 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 0,4 \text{ m}.$

15. (16204)

Ένα μικρό κιβώτιο μάζας $M = 1800 \text{ g}$ είναι ακίνητο στην άκρη ενός πάγκου, του οποίου η επιφάνεια βρίσκεται σε ύψος h από οριζόντιο δάπεδο. Ένα βλήμα μάζας $m = 200 \text{ g}$ κινείται οριζόντια στο ύψος του κέντρου του κιβωτίου και συγκρούεται με αυτό. Τη στιγμή που συγκρούεται με το κιβώτιο, το βλήμα είχε ταχύτητα μέτρου $v_0 = 40 \text{ m/s}$ και η κρούση είναι πλαστική, ασήμαντης χρονικής διάρκειας.

Το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή και τη στιγμή που φτάνει στο οριζόντιο δάπεδο, η ταχύτητά του σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία $\varphi = 45^\circ$.

Να υπολογίσετε:

4.1 το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.2. το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος, που έγινε θερμική ενέργεια κατά την πλαστική κρούση.

Μονάδες 6

4.3 την οριζόντια απόσταση του σημείου στο οποίο το συσσωμάτωμα χτύπησε στο οριζόντιο δάπεδο, από τη βάση του πάγκου.

Μονάδες 7

4.4 το ύψος h του πάγκου.

Μονάδες 6

Το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας θεωρείται $g = 10 \text{ m/s}^2$, οι αντιστάσεις αέρα αμελητέες.

Δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί: $\eta\mu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Απάντηση

4.1

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_0$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv_0 = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv_0}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{0,2 \cdot 40 \text{ m}}{2} \frac{1}{s} \Rightarrow V = 4 \frac{\text{m}}{s}.$$

4.2

Ελάχιστα πριν την κρούση, το σύστημα έχει κινητική ενέργεια :

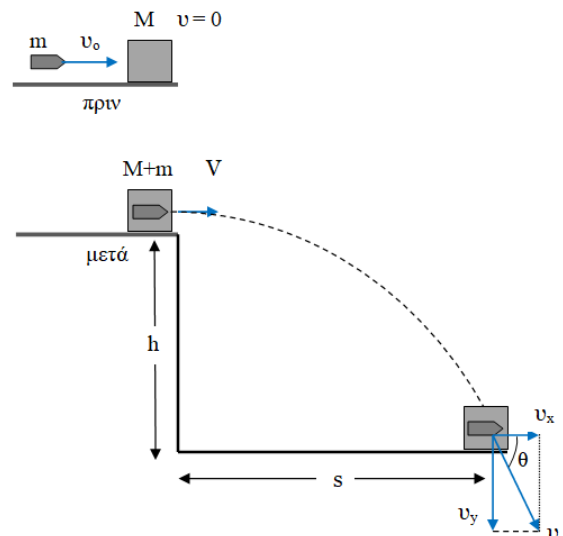
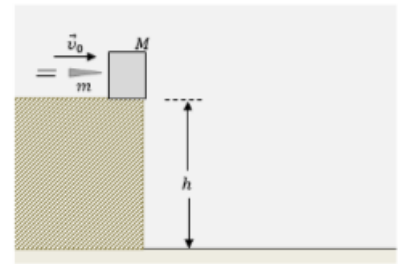
$$K_{\sigma(πριν)} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 40^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(πριν)} = 160 \text{ J}.$$

Αμέσως μετά την κρούση, το σύστημα έχει κινητική ενέργεια :

$$K_{\sigma(μετά)} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(μετά)} = 16 \text{ J}.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_\sigma| = K_{\sigma(πριν)} - K_{\sigma(μετά)} = 160 \text{ J} - 16 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_\sigma| = 144 \text{ J}.$$



Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά τη διάρκεια της κρούσης, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Pi(\%) = \frac{|\Delta K_{\sigma}|}{K_{\sigma(\piριν)}} \cdot 100\% = \frac{144}{160} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 90\%.$$

* Εναλλακτικός τρόπος

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{K_{\sigma(\piριν)} - K_{\sigma(\muετ\acute{\alpha})}}{K_{\sigma(\piριν)}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{K_{\sigma(\muετ\acute{\alpha})}}{K_{\sigma(\piριν)}}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(m+M)V^2}{\frac{1}{2}mv_0^2}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{(m+M)V^2}{mv_0^2}\right) \cdot 100\%.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \Pi(\%) = \left(1 - \frac{2 \cdot 4^2}{0,2 \cdot 40^2}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{32}{320}\right) \cdot 100\% = (1 - 0,1) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 90\%.$$

4.3

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα

$$\text{μέτρου } v_x = V = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για τη γωνία $\theta = 45^\circ$ που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}$ με τη $\vec{v}_x$ στο έδαφος, ισχύει : $\varepsilon\phi\theta = \frac{v_y}{v_x}$.

$$\text{Επομένως : } v_y = v_x \varepsilon\phi 45^\circ = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \Rightarrow v_y = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση. Ισχύει :

$$v_y = gt \Leftrightarrow t = \frac{v_y}{g} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{4}{10} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 0,4 \text{ s}.$$

Μέχρι τη στιγμή που φτάνει το συσσωμάτωμα στο έδαφος, έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

$$s = V t_{\text{ολ}} = 4 \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow s = 1,6 \text{ m}.$$

4.4

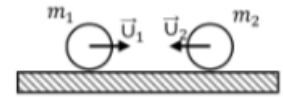
Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το ύψος h :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,4^2 \text{ m} \Rightarrow h = 0,8 \text{ m}.$$

16. (16270)

Δύο σφαίρες μαζών $m_1 = 3 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$ κινούνται πάνω σε λείο δάπεδο στην ίδια ευθεία με αντίθετη φορά και με ταχύτητες μέτρων $v_1 = 5 \text{ m/s}$ και $v_2 = 10 \text{ m/s}$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.



Οι σφαίρες συγκρούονται και αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1' = 7 \text{ m/s}$ και με φορά αντίθετη της $\vec{v}_1$. Η σύγκρουση διαρκεί $\Delta t = 0,01 \text{ s}$.

4.1 Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά τη σύγκρουση.

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε τη μέση δύναμη η οποία ασκήθηκε στη σφαίρα μάζας m_1 κατά τη σύγκρουση.

Μονάδες 6

4.3 Να ελέγξετε αν κατά τη κρούση έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας.

Μονάδες 6

4.4 Να βρείτε την απόσταση των σφαιρών m_1 και m_2 μετά από $2,01 \text{ s}$ από τη στιγμή που ήρθαν σε επαφή.

Μονάδες 7

Απάντηση**4.1**

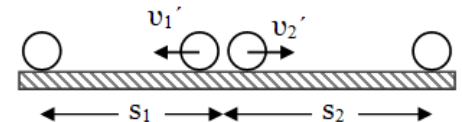
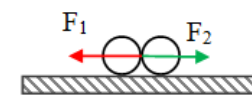
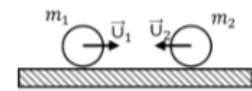
Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα των δύο σφαιρών είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow -m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow$$

$$v_2' = \frac{m_1(v_1 + v_1') - m_2 v_2}{m_2} \Rightarrow v_2' = \frac{3 \cdot 12 - 2 \cdot 10}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2' = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα η 2η σφαίρα μετά την κρούση κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $v_2' = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**4.2**

Η μεταβολή της ορμής της 1ης σφαίρας στη διάρκεια της κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = -m_1 v_1' - m_1 v_1 = -m_1(v_1' + v_1) \Rightarrow \Delta p_1 = -36 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton, ισχύει :

$$\Sigma F_{1,x} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} \Leftrightarrow \bar{F}_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} \Rightarrow \bar{F}_1 = \frac{-36}{10^{-2}} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_1 = -3600 \text{ N}.$$

Επομένως, η μέση δύναμη που ασκήθηκε από τη 2η στην 1η σφαίρα έχει μέτρο $|\bar{F}_1| = 3600 \text{ N}$ και φορά προς τα αριστερά.

4.3

Οι σφαίρες κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο, άρα η δυναμική ενέργεια πριν και μετά την κρούση είναι ίδια.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 \right) \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{πριν})} = 137,5 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 \right) \text{J} \Rightarrow K_{\sigma(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = 137,5 \text{J}.$$

Αφού η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβλήθηκαν κατά τη διάρκεια της κρούσης, άρα δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας .

4.4

Μετά την κρούση, οι σφαίρες κινούνται αντίρροπα πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερές ταχύτητες $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$.

Σε χρονική διάρκεια $\Delta t' = t_1 - \Delta t = 2,01 \text{ s} - 0,01 \text{ s} = 2 \text{ s}$ θα διανύσουν αποστάσεις :

$$s_1 = v_1'(\Delta t') = 7 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 14 \text{ m}.$$

$$s_2 = v_2'(\Delta t') = 8 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow s_2 = 16 \text{ m}.$$

Η απόσταση μεταξύ των σφαιρών εκείνη τη στιγμή είναι :

$$d = s_1 + s_2 = 14 \text{ m} + 16 \text{ m} \Rightarrow d = 30 \text{ m}.$$

Σχόλιο : Στο ερώτημα 4.2 δεν διευκρινίζει αν ζητά την αλγεβρική τιμή ή το μέτρο της δύναμης.

17. (16271)

Ένα βλήμα μάζας $m = 10 \text{ kg}$ εκτοξεύεται προς τα πάνω από το έδαφος κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 40 \text{ m/s}$. Κατά την άνοδό του και στη θέση $y = 60 \text{ m}$ διασπάται με έκρηξη σε δύο τμήματα Α και Β ίσων μαζών, από τα οποία το Α συνεχίζει προς τα πάνω και φθάνει σε ύψος $h = 180 \text{ m}$ από το σημείο της έκρηξης.

4.1. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του τμήματος Α αμέσως μετά την έκρηξη.

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Β αμέσως μετά την έκρηξη.

Μονάδες 6

4.3. Να βρείτε τη χρονική στιγμή άφιξης του τμήματος Α στο μέγιστο ύψος του.

Μονάδες 6

4.4 Να βρείτε συνολική μεταβολή της ορμής του τμήματος Β από τη στιγμή αμέσως μετά την έκρηξη μέχρι την προσεδάφισή του.

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Απάντηση**4.1**

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του 1ου κομματιού από το σημείο Γ της έκρηξης μέχρι το ανώτερο σημείο Δ :

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{W_1}^{\Gamma \rightarrow \Delta} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -m_1 g h \Leftrightarrow v_1^2 = 2gh \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2gh}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_1 = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 180} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του βλήματος από το σημείο Ο του εδάφους μέχρι το σημείο Γ της έκρηξης, ώστε να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος ελάχιστα πριν τη διάσπαση :

$$K_{\Gamma} - K_O = W_W^{O \rightarrow \Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -m g y \Leftrightarrow v^2 = v_0^2 - 2gy \Leftrightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \sqrt{40^2 - 2 \cdot 10 \cdot 60} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{400} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι πολύ μικρή, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

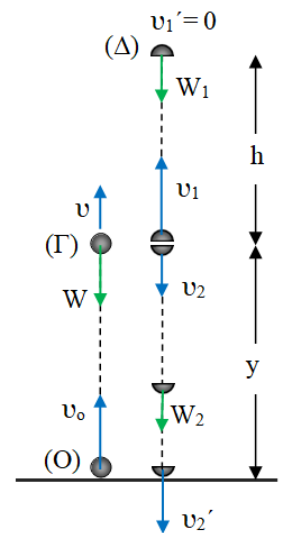
Αφού η ορμή του βλήματος και του 1ου κομματιού έχουν κατακόρυφη διεύθυνση, άρα και η ορμή του 2ου είναι κατακόρυφη.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow m v = \frac{m}{2} v_1 + \frac{m}{2} v_2 \Leftrightarrow 2v = v_1 + v_2 \Leftrightarrow v_2 = 2v - v_1 \Rightarrow$$

$$v_2 = (2 \cdot 20 - 60) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Επομένως, αμέσως μετά τη διάσπαση, το 2ο κομμάτι κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $|v_2| = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



4.3

Το βλήμα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου v .

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τη χρονική στιγμή της διάσπασης t_1 :

$$v = v_0 - gt_1 \Leftrightarrow gt_1 = v_0 - v \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0 - v}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{40 - 20}{10} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

Αμέσως μετά τη διάσπαση, το 1ο κομμάτι εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 .

Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της ανόδου Δt_2 :

$$v_1' = v_1 - g(\Delta t) \xrightarrow{v_1' = 0} 0 = v_1 - g(\Delta t_2) \Leftrightarrow g(\Delta t_2) = v_1 \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{v_1}{g} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{60}{10} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 6 \text{ s}.$$

Άρα, το 1ο κομμάτι φτάνει στο μέγιστο ύψος, τη χρονική στιγμή :

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 2 \text{ s} + 6 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 8 \text{ s}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για το 2ο κομμάτι από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Ο στο έδαφος :

$$K_O' - K_\Gamma' = W_{w_2}^{\Gamma \rightarrow O} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 gy \Leftrightarrow v_2'^2 = v_2^2 + 2gy \Rightarrow |v_2'| = \sqrt{v_2^2 + 2gy} \Rightarrow$$

$$|v_2'| = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 60} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v_2'| = \sqrt{1600} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow |v_2'| = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ταχύτητα $\vec{v}_2'$ με την οποία φτάνει στο έδαφος το 2ο κομμάτι έχει φορά προς τα κάτω, άρα έχει

$$\text{αλγεβρική τιμή } v_2' = -40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η μεταβολή της ορμής του 2ου κομματιού είναι (αλγεβρικά) :

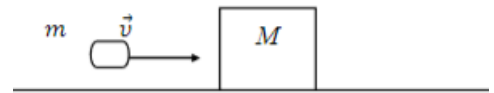
$$\Delta p_2 = p_2' - p_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2 = m_2 (v_2' - v_2) = 5 \cdot [-40 - (-20)] \text{ Kg } \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = -100 \text{ Kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η μεταβολή της ορμής $\vec{\Delta p}_2$ έχει φορά προς τα κάτω.

Σχόλιο : Στα ερωτήματα 4.1, 4.2, 4.4 δεν διευκρινίζει η εκφώνηση αν ζητά την αλγεβρική τιμή ή το μέτρο του μεγέθους.

18. (16366)

Ένα κιβώτιο μάζας $M = 970 \text{ g}$ βρίσκεται ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Βλήμα μάζας $m = 30 \text{ g}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v = 200 \text{ m/s}$, και συγκρούεται με το κιβώτιο και σφηνώνεται σ' αυτό, οπότε δημιουργείται συσσωμάτωμα.



4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία ξεκινά να κινείται το συσσωμάτωμα.

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος κιβώτιο-βλήμα λόγω της κρούσης.

Μονάδες 6

4.3 Να βρείτε το μέτρο της μέσης δύναμης $\bar{F}$ που άσκησε το βλήμα πάνω στο κιβώτιο, αν η κρούση διήρκεσε χρονικό διάστημα $\Delta t = 0,01 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.4 Να βρείτε το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο δάπεδο και το κιβώτιο $\mu = 0,2$. Θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Απάντηση**4.1**

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^2}{1} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(πριν)} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 200^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(πριν)} = 600 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(μετά)} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(μετά)} = 18 \text{ J}.$$

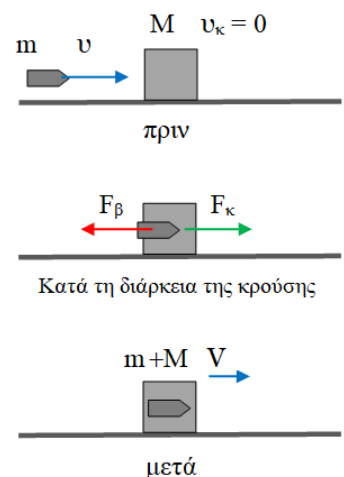
Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(πριν)} - K_{\sigma(μετά)} = 600 \text{ J} - 18 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = 582 \text{ J}.$$

4.3

Η μεταβολή της ορμής του κιβωτίου στη διάρκεια της εισόδου του βλήματος είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_K = p_{K(μετά)} - p_{K(πριν)} = MV - 0 = MV \Rightarrow \Delta p_K = 0,97 \cdot 6 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,82 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Δεχόμαστε ότι η τριβή ανάμεσα στο δάπεδο και το κιβώτιο είναι ασήμαντη συγκρινόμενη με τη δύναμη μεταξύ βλήματος – κιβωτίου.

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση οριζόντια δύναμη που ασκήθηκε από το βλήμα στο κιβώτιο στη διάρκεια της εισόδου, είναι :

$$\bar{F}_κ = \frac{\Delta p_κ}{\Delta t} = \frac{5,82}{10^{-2}} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_κ = 582 \text{ N}.$$

Άρα, η μέση δύναμη έχει μέτρο $|\bar{F}_κ| = 582 \text{ N}$ και φορά προς τα δεξιά.

4.4

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει στο δάπεδο μέχρι να σταματήσει λόγω της τριβής ολίσθησης.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = (m + M)g \Rightarrow N = 10 \text{ N}.$$

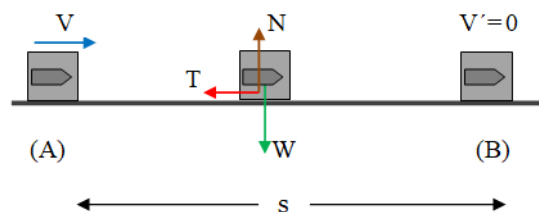
Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T = \mu N = 0,2 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow T = 2 \text{ N}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση A της κρούσης (ελάχιστα μετά τη κρούση) μέχρι τη θέση B που μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος :

$$K_B - K_A = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = -T \cdot s \Leftrightarrow s = \frac{(m+M)V^2}{2T}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } s = \frac{1 \cdot 6^2}{2 \cdot 2} \text{ m} \Rightarrow s = 9 \text{ m}.$$



19. (16368)

Μικρή σφαίρα μάζας $0,1 \text{ kg}$ αφήνεται από ύψος h να πέσει ελεύθερα πάνω σε οριζόντιο δάπεδο.

Η σφαίρα προσκρούει στο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 5 \text{ m/s}$ και αναπηδά κατακόρυφα.

Η ταχύτητα με την οποία ξεκινά την αναπήδηση από το δάπεδο έχει μέτρο $v_2 = 2 \text{ m/s}$.

Η χρονική διάρκεια της επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είναι $0,1 \text{ s}$. Να υπολογιστούν:

4.1 Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας (κατά μέτρο και κατεύθυνση) κατά την κρούση της με το δάπεδο.

Μονάδες 6

4.2 Η μέση τιμή της δύναμης που ασκήθηκε από το δάπεδο στη σφαίρα κατά την κρούση.

Μονάδες 6

4.3 Το ύψος h από το οποίο αφέθηκε η σφαίρα.

Μονάδες 6

4.4. Το επί τοις εκατό (%) ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας της σφαίρας που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον κατά την κρούση.

Μονάδες 7

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Θεωρήστε ως επίπεδο δυναμικής ενέργειας μηδέν, το επίπεδο του δαπέδου.

Να ορίσετε θετική φορά προς τα πάνω.

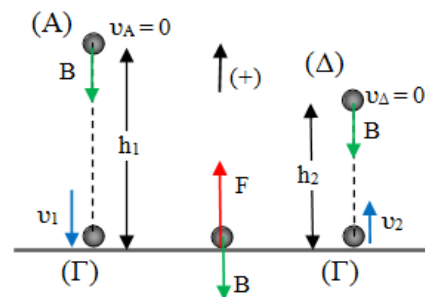
Απάντηση**4.1**

Ορίζουμε θετική φορά προς τα πάνω και υπολογίζουμε την αλγεβρική μεταβολή της ορμής της σφαίρας λόγω της κρούσης :

$$\Delta p = p_{\text{μετά}} - p_{\text{πριν}} = mv_2 - (-mv_1) = m(v_2 + v_1) \Rightarrow$$

$$\Delta p = 0,1 \cdot 7 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,7 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το θετικό πρόσημο δείχνει ότι η μεταβολή της ορμής $\vec{\Delta p}$ έχει φορά προς τα πάνω.

**4.2**

Κατά τη διάρκεια της επαφής με το δάπεδο, στη σφαίρα ασκούνται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από το δάπεδο.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton (αλγεβρικά) για τη χρονική διάρκεια Δt της επαφής με το δάπεδο :

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{F} - B = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow \vec{F} = mg + \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F} = \left(0,1 \cdot 10 + \frac{0,7}{0,1} \right) \text{ N} \Rightarrow \vec{F} = 8 \text{ N}.$$

Άρα, η δύναμη $\vec{F}$ είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω.

4.3

Από τη στιγμή που αφέθηκε η σφαίρα μέχρι να χτυπήσει στο δάπεδο, κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για την αρχική θέση Α και τη θέση Γ ελάχιστα πριν χτυπήσει στο δάπεδο :

$$K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_A + U_A \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_1^2 = gh_1 \Leftrightarrow h_1 = \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow h_1 = \frac{5^2}{2 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow h_1 = 1,25 \text{ m}.$$

4.4

Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας πριν και μετά την κρούση είναι :

$$E_{\mu\chi(\pi\rho\nu)} = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = \frac{1}{2}mv_1^2 = 1,25\text{J}.$$

$$E_{\mu\chi(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = K_{\Gamma'} + U_{\Gamma'} = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0,2\text{J}.$$

Η ελάττωση της μηχανικής ενέργειας λόγω της κρούσης με το δάπεδο είναι :

$$|\Delta E_{\mu\chi}| = E_{\mu\chi(\pi\rho\nu)} - E_{\mu\chi(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = 1,25\text{J} - 0,2\text{J} \Rightarrow |\Delta E_{\mu\chi}| = 1,05\text{J}.$$

Το ποσοστό ελάττωσης της μηχανικής ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\Pi(\%) = \frac{|\Delta E_{\mu\chi}|}{E_{\mu\chi(\pi\rho\nu)}} \cdot 100\% = \frac{1,05\text{J}}{1,25\text{J}} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 84\%.$$

* Εναλλακτικός τρόπος

Κατά τη διάρκεια της κρούσης με το δάπεδο, η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική.

Το ποσοστό ελάττωσης της μηχανικής ενέργειας λόγω της κρούσης με το δάπεδο είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{E_{\mu(\pi\rho\nu)} - E_{\mu(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{E_{\mu(\pi\rho\nu)}} \cdot 100\% = \frac{K_{\pi\rho\nu} - K_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\nu}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{K_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_{\pi\rho\nu}}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}\right) \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Pi(\%) = \left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\right] \cdot 100\%.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \Pi(\%) = (1 - 0,4^2) \cdot 100\% = (1 - 0,16) \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 84\%.$$

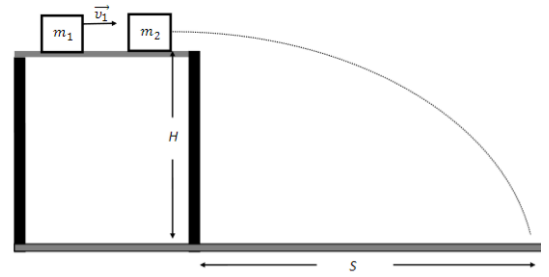
20. (16369)

Σώμα μάζας $m_1 = 4 \text{ kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου v_1 σε λείο οριζόντιο δάπεδο που βρίσκεται σε ύψος H πάνω από το έδαφος. Το σώμα συγκρούεται πλαστικά με ακίνητο σώμα που βρίσκεται στην ίδια ευθεία, μάζας $m_2 = 6 \text{ kg}$.

Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα εγκαταλείπει το οριζόντιο δάπεδο με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_\sigma = 1 \text{ m/s}$

και προσκρούει στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση $s = 0,4 \text{ m}$ από το σημείο που το εγκατέλειψε.



4.1 Ποιος είναι ο χρόνος t που χρειάζεται για να φθάσει στο έδαφος;

Μονάδες 6

4.2 Να βρεθεί το ύψος H .

Μονάδες 6

4.3 Να βρεθεί η ταχύτητα v_1 του σώματος m_1 πριν συγκρουστεί με το ακίνητο σώμα μάζας m_2 .

Μονάδες 5

4.4 Να βρεθεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος κατά τη διάρκεια της πτώσης του.

Μονάδες 8

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει τιμή $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Και τα δύο σώματα θεωρούνται μικρών διαστάσεων και σημειακά.

Απάντηση

4.1

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος H , με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_\sigma$.

Στον οριζόντιο άξονα x η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση : $s = v_\sigma t_{\text{ολ}}$.

$$\text{Επομένως : } t_{\text{ολ}} = \frac{s}{v_\sigma} = \frac{0,4}{1} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 0,4 \text{ s}.$$

4.2

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος H .

Ισχύει :

$$H = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,4^2 \text{ m} \Rightarrow H = 0,8 \text{ m}.$$

4.3

Αφού το δάπεδο είναι λείο, η συνισταμένη των εξωτερικών

δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι μηδενική άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_\sigma \Leftrightarrow v_1 = \frac{(m_1 + m_2) v_\sigma}{m_1} \Rightarrow v_1 = \frac{10 \cdot 1 \text{ m}}{4 \text{ s}} \Rightarrow v_1 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

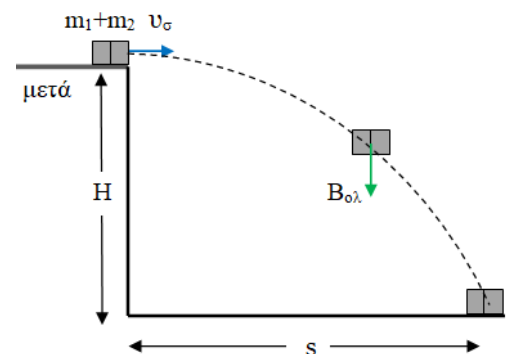
Κατά τη διάρκεια της πτώσης, η ορμή του συσσωματώματος μεταβάλλεται μόνο στον άξονα y .

Η μοναδική δύναμη που ασκείται στο συσσωμάτωμα είναι το βάρος του.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton αλγεβρικά (με θετική φορά προς τα κάτω) :

$$\Sigma F_y = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow (m_1 + m_2) g = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 100 \text{ N}.$$

Άρα, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής είναι : $\frac{|\Delta p|}{\Delta t} = 100 \text{ N}.$



21. (16463)

Ένα βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_1 = 100 \text{ m/s}$ και συναντά ένα ακίνητο κιβώτιο μάζας M , το οποίο βρίσκεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα διαπερνά το κιβώτιο και εξέρχεται από αυτό με οριζόντια ταχύτητα $u_2 = 20 \text{ m/s}$, ενώ το κιβώτιο αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα $V = 5 \text{ m/s}$.

4.1 Να υπολογίσετε την μάζα του κιβωτίου.

Μονάδες 6

4.2 Να βρείτε την μέση δύναμη που δέχτηκε το βλήμα από το κιβώτιο, αν το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε να περάσει μέσα από το κιβώτιο ήταν $\Delta t = 0,2 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3 Υπολογίστε το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταφέρθηκε στο κιβώτιο εξαιτίας της κρούσης.

Μονάδες 6

4.4 Το κιβώτιο διανύει απόσταση $s = 4 \text{ m}$ και σταματάει. Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ οριζόντιου επιπέδου και κιβωτίου. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 7

Απάντηση**4.1**

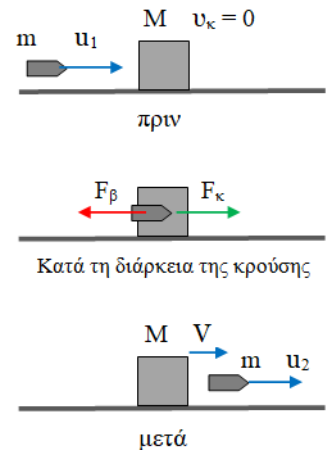
Δεχόμαστε ότι η ταχύτητα $\vec{u}_2$ έχει την ίδια διεύθυνση με τη $\vec{u}_1$.

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{u}_1$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ}(\text{πριν})} = p_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow mu_1 = mu_2 + MV \Leftrightarrow M = \frac{m(u_1 - u_2)}{V} \Rightarrow$$

$$M = \frac{0,1(100 - 20)}{5} \text{ Kg} \Rightarrow M = 1,6 \text{ Kg}.$$

**4.2**

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος στη διάρκεια της διέλευσης μέσα από το κιβώτιο είναι (αλγεβρικά):

$$\Delta p_\beta = p_{\beta(\text{μετά})} - p_{\beta(\text{πριν})} = mu_2 - mu_1 = m(u_2 - u_1) \Rightarrow \Delta p_\beta = 0,1 \cdot (-80) \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = -8 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση οριζόντια δύναμη που ασκήθηκε από το κιβώτιο στο βλήμα στη διάρκεια της εισόδου, είναι :

$$\bar{F}_\beta = \frac{\Delta p_\beta}{\Delta t} = \frac{-8}{0,2} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_\beta = -40 \text{ N}.$$

Άρα, η μέση δύναμη έχει μέτρο $|\bar{F}_\beta| = 80 \text{ N}$ και φορά αντίθετη από την αρχική ταχύτητα $\vec{u}_1$.

4.3

Η κινητική ενέργεια του βλήματος ελάχιστα πριν την κρούση είναι :

$$K_{\beta(\text{πριν})} = \frac{1}{2} mu_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 100^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\beta(\text{πριν})} = 500 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του κιβωτίου αμέσως μετά την κρούση είναι :

$$K_{\kappa(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 5^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\kappa(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})} = 20 \text{ J}.$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που μεταφέρθηκε στο κιβώτιο κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{K_{\kappa(\mu\epsilon\tau\acute{\alpha})}}{K_{\beta(\pi\rho\iota\nu)}} \cdot 100\% = \frac{20}{500} \cdot 100\% \Rightarrow \Pi(\%) = 4\%.$$

4.4

Μετά την κρούση το κιβώτιο κινείται στο οριζόντιο επίπεδο, μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής ολίσθησης.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = Mg. \quad (1)$$

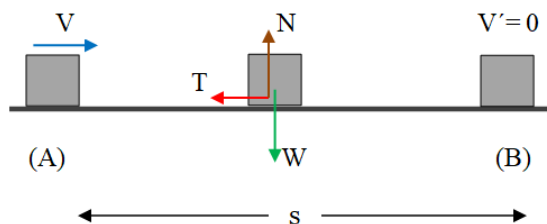
Από το νόμο της τριβής προκύπτει :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu Mg. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση Α της κρούσης (ελάχιστα μετά τη κρούση) μέχρι τη θέση Β που μηδενίζεται η ταχύτητα του κιβωτίου :

$$K_B - K_A = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}MV^2 = -T \cdot s \xrightarrow{(2)} \frac{1}{2}MV^2 = \mu Mg \cdot s \Leftrightarrow \mu = \frac{V^2}{2gs}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \mu = \frac{5^2}{2 \cdot 10 \cdot 4} \Rightarrow \mu = \frac{5}{16}.$$



Σχόλιο :

Η διατύπωση «Το βλήμα διαπερνά το κιβώτιο και εξέρχεται από αυτό με οριζόντια ταχύτητα u_2 » δεν διασφαλίζει ότι η $\vec{u}_2$ έχει την ίδια διεύθυνση με τη $\vec{u}_1$.

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι η ταχύτητα $\vec{u}_2$ έχει την ίδια διεύθυνση με τη $\vec{u}_1$.

22. (16494)

Ένα σώμα μάζας $m = 1,2 \text{ kg}$ κινείται πάνω σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$.

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα έχει μέτρο $\Sigma F = 600 \text{ N}$ και κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Να υπολογίσετε:

4.1 Την κεντρομόλο επιτάχυνση του σώματος.

Μονάδες 4

4.2 Την γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

Μονάδες 6

4.3 Το μήκος του τόξου που θα διαγράψει, σε χρόνο ίσο με το χρόνο κίνησης δεύτερου σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα και αποκτά ταχύτητα $u = 54 \text{ m/s}$ έχοντας επιτάχυνση $a = 12 \text{ m/s}^2$.

Μονάδες 7

4.4 Το δεύτερο σώμα μάζας $M = m/2$ συγκρούεται τελικά με το πρώτο σώμα σε κάποιο σημείο της κυκλικής τροχιάς του, έχοντας ταχύτητα V με κατεύθυνση αντίρροπη της γραμμικής ταχύτητας του πρώτου σώματος τη στιγμή της κρούσης.

Αν η κρούση είναι πλαστική, να υπολογίσετε την ταχύτητα V του σώματος μάζας M ώστε το συσσωμάτωμα να έχει μηδενική κινητική ενέργεια μετά την κρούση.

Μονάδες 8

Απάντηση

4.1

Αφού η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, άρα η κίνηση είναι ομαλή κυκλική.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, η συνισταμένη δύναμη είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα ισχύει :

$$\Sigma F = m\alpha_{\kappa} \Leftrightarrow \alpha_{\kappa} = \frac{\Sigma F}{m} \Rightarrow \alpha_{\kappa} = \frac{600 \text{ N}}{1,2 \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_{\kappa} = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2

Για το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_{\kappa}$ και της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}$ ισχύει :

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow v^2 = \alpha_{\kappa} \cdot R \Leftrightarrow v = \sqrt{\alpha_{\kappa} \cdot R} \Rightarrow v = \sqrt{500 \cdot 0,2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας $\vec{v}$ και της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ ισχύει :

$$v = \omega R \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega = \frac{10 \text{ rad}}{0,2 \text{ s}} \Rightarrow \omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

4.3

Από τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης του 2ου σώματος υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης :

$$\alpha = \frac{u - 0}{t} \Leftrightarrow t = \frac{u}{\alpha} \Rightarrow t = \frac{54}{12} \text{ s} \Rightarrow t = 4,5 \text{ s}.$$

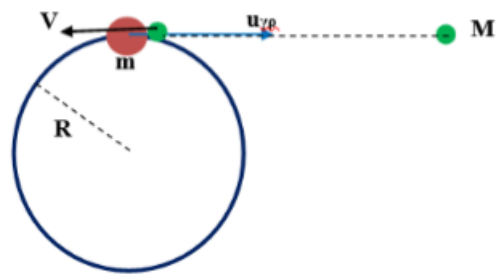
Στον ίδιο χρόνο t το 1ο σώμα διανύει τόξο μήκους : $s = vt = 10 \cdot 4,5 \text{ m} \Rightarrow s = 45 \text{ m}.$

4.4

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας του 1ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$P_{\text{ολ}(\text{πριν})} = P_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow mv - MV = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} V = mv \Leftrightarrow V = 2v \Rightarrow V = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



23. (16496)

Ένας πύραυλος μάζας $m = 1200 \text{ kg}$ εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα $u_0 = 100 \text{ m/s}$ κατακόρυφα προς τα πάνω. Κάποια στιγμή φθάνει στο ανώτερο σημείο στο οποίο σταματά στιγμιαία.

Εκείνη τη στιγμή εκρήγνυται σε 3 κομμάτια A, B και Γ. Το κομμάτι A μάζας $m_A = m/3$ αποκτά οριζόντια ταχύτητα $u_A = 30 \text{ m/s}$, ενώ το κομμάτι B, μάζας $m_B = 500 \text{ kg}$, εξακολουθεί να παραμένει ακίνητο και μετά την έκρηξη. Θεωρούμε ότι για όλες τις κινήσεις η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, παραμένει σταθερή και ότι δεν υπάρχει ατμόσφαιρα. Να υπολογίσετε:

4.1 Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φθάσει ο πύραυλος.

Μονάδες 5

4.2 Την ταχύτητα του κομματιού Γ, αμέσως μετά την έκρηξη.

Μονάδες 5

4.3 Σε ποια θέση θα προσγειωθεί το κομμάτι A ως προς το σημείο της έκρηξης.

Μονάδες 7

4.4 Πόσο απέχουν τα κομμάτια A και Γ την στιγμή $t = 3 \text{ s}$ μετά την έκρηξη.

Μονάδες 8

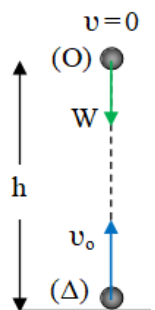
Απάντηση

4.1

Ο πύραυλος κινείται με την επίδραση μόνο της σταθερής βαρυτικής δύναμης.

Εφαρμόζω το ΘΜΚΕ για την κίνηση του πυραύλου από το σημείο Δ του εδάφους μέχρι το ανώτερο σημείο Ο της τροχιάς σε ύψος h :

$$K_O - K_\Delta = W_W \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Leftrightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{100^2}{20} \text{ m} \Rightarrow h = 500 \text{ m}.$$



4.2

Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα $\vec{v}_A$ έχει φορά προς τα δεξιά.

Η μάζα του κομματιού A είναι $m_A = \frac{m}{3} = 400 \text{ Kg}$, ενώ του κομματιού Γ είναι:

$$m_\Gamma = m - (m_A + m_B) = 1200 \text{ Kg} - 900 \text{ Kg} = 300 \text{ Kg}.$$

Αφού η χρονική διάρκεια της διάσπασης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της διάσπασης.

$$\text{Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ: } \vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} = \vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_\Gamma = 0 \xrightarrow{p_B=0} \vec{p}_\Gamma = -\vec{p}_A.$$

Άρα, η ταχύτητα του κομματιού Γ αμέσως μετά τη διάσπαση είναι οριζόντια με φορά αντίθετη της $\vec{v}_A$.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων των δύο κομματιών A, Γ ισχύει:

$$p_\Gamma = p_A \Leftrightarrow m_\Gamma v_\Gamma = m_A v_A \Leftrightarrow v_\Gamma = \frac{m_A v_A}{m_\Gamma} \Rightarrow$$

$$v_\Gamma = \frac{400 \cdot 30}{300} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\Gamma = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

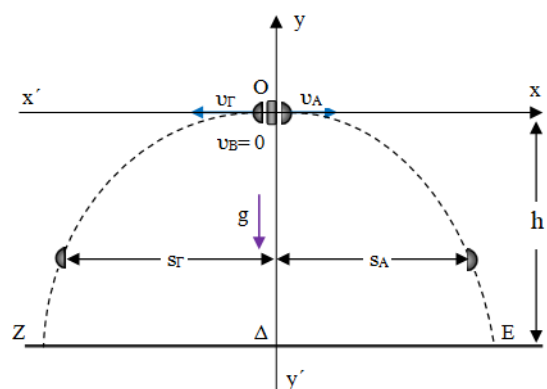
4.3

Τα δύο κομμάτια A, Γ εκτελούν οριζόντια βολή από το σημείο O σε ύψος h .

Με αρχή το σημείο O της διάσπασης σχεδιάζουμε

ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy, ώστε ο άξονας x να είναι

οριζόντιος με θετική φορά προς τα δεξιά και ο άξονας y κατακόρυφος με θετική φορά προς τα πάνω.



Στον άξονα y τα σώματα εκτελούν ελεύθερη πτώση από ύψος h.

$$\text{Ισχύει: } h = \frac{1}{2} g t_k^2 \Leftrightarrow t_k^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{10}} \text{ s} \Rightarrow t_k = 10 \text{ s}.$$

Στον άξονα x η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

Το κομμάτι Α θα πέσει στο σημείο Ε του εδάφους με συντεταγμένες :

$$x_E = v_A t_k = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} \Rightarrow x_E = 300 \text{ m}.$$

$$y_E = -h = -500 \text{ m}.$$

Άρα, το κομμάτι Α θα πέσει στο σημείο του εδάφους με συντεταγμένες (300 m, - 500 m).

4.4

Αφού τα κομμάτια Α, Γ αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα από σημείο Ο, στον ίδιο χρόνο t θα έχουν διανύσει την ίδια κατακόρυφη απόσταση y, άρα θα βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Στον άξονα x τα δύο κομμάτια εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και σε χρόνο t = 3 s θα έχουν διανύσει οριζόντιες αποστάσεις s_A, s_Γ αντίστοιχα, προς αντίθετες κατευθύνσεις.

κομμάτι Α

$$s_A = v_A t \Rightarrow s_A = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s} \Rightarrow s_A = 90 \text{ m}.$$

κομμάτι Γ

$$s_\Gamma = v_\Gamma t \Rightarrow s_\Gamma = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3 \text{ s} \Rightarrow s_\Gamma = 120 \text{ m}.$$

Η (οριζόντια) απόσταση των δύο κομματιών τη χρονική στιγμή t = 3 s είναι :

$$d = s_A + s_\Gamma = 90 \text{ m} + 120 \text{ m} \Rightarrow d = 210 \text{ m}.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν καθορίζει τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_A$ αμέσως μετά τη διάσπαση.

2) Η διατύπωση «το κομμάτι Β . . . εξακολουθεί να παραμένει ακίνητο και μετά την έκρηξη» δεν είναι σωστή.

Αμέσως μετά την έκρηξη η ταχύτητα του Β είναι μηδενική, αλλά στη συνέχεια εκτελεί ελεύθερη πτώση.

3) Το ερώτημα 4.3 είναι ασαφές.

Έπρεπε να ζητά τις συντεταγμένες του σημείου πτώσης του κομματιού Α στο έδαφος, ως προς το σημείο της έκρηξης.

24. (16738)

Μία μπάλα εκτοξεύεται από την ταράτσα ενός κτιρίου, η οποία βρίσκεται σε ύψος $h = 20 \text{ m}$ από το έδαφος, με οριζόντια ταχύτητα $u_0 = 20 \text{ m/s}$ και κατεύθυνση ένα γειτονικό κτήριο που απέχει $d = 30 \text{ m}$. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να υπολογίσετε:

4.1 πόσο χρόνο θα χρειαστεί η μπάλα να χτυπήσει το γειτονικό κτήριο.

Μονάδες 6

4.2 πόσο απέχει το σημείο που χτύπησε η μπάλα το απέναντι κτήριο από το έδαφος;

Μονάδες 6

4.3 ποιο είναι το μέτρο της ορμής της όταν συναντάει το απέναντι κτήριο, αν η μπάλα έχει μάζα $m = 0,5 \text{ Kg}$;

Μονάδες 7

4.4 ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα, με την οποία πρέπει να βληθεί η μπάλα για να χτυπήσει το κτήριο;

Μονάδες 6

Απάντηση

4.1

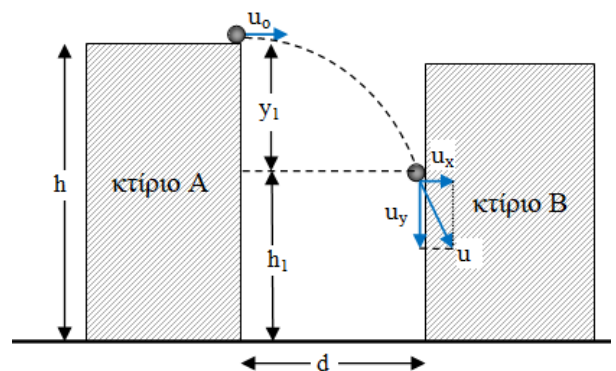
Υποθέτουμε ότι η αρχική ταχύτητα $\vec{u}_0$ έχει διεύθυνση κάθετη στην πρόσοψη του απέναντι κτιρίου.

Στον άξονα x η μπάλα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου u_0 . Ισχύει η σχέση: $x = u_0 t$.

Τη στιγμή που φτάνει στο απέναντι κτήριο έχει διανύσει οριζόντια απόσταση ίση με την απόσταση d των δύο κτιρίων.

Επομένως:

$$d = u_0 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{d}{u_0} \Rightarrow t_1 = \frac{30}{20} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 1,5 \text{ s}.$$



4.2

Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Υπολογίζουμε την κατακόρυφη μετατόπιση y_1 της μπάλας από το σημείο εκτόξευσης:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1,5^2 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 11,25 \text{ m}.$$

Η απόσταση του σημείου πρόσκρουσης στο κτήριο από το έδαφος είναι:

$$h_1 = h - y_1 = 20 \text{ m} - 11,25 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 8,75 \text{ m}.$$

4.3

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας είναι σταθερή: $u_x = u_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας έχει μέτρο:

$$u_y = g t_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,5 \text{ s} \Rightarrow u_y = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η συνισταμένη ταχύτητα $\vec{u}$ της μπάλας έχει μέτρο:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{625} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ορμής της μπάλας τη στιγμή της πρόσκρουσης στο απέναντι κτίριο είναι :

$$p=mu=0,5\text{Kg}\cdot 25\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow p=12,5\text{Kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Από την εξίσωση της μετατόπισης στον άξονα x , προκύπτει : $x=u_0 t \Leftrightarrow t=\frac{x}{u_0}$. (1)

Στον άξονα y ισχύει :

$$y=\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{(1)} y=\frac{1}{2}g\frac{x^2}{u_0^2} \Leftrightarrow y=\frac{g}{2u_0^2}\cdot x^2. \quad (2) \quad [\text{εξίσωση τροχιάς}]$$

Όταν χτυπήσει η μπάλα στο απέναντι κτίριο, θα έχει διανύσει οριζόντια απόσταση $x = d$.

$$\text{Για } x=d \xrightarrow{(2)} y=\frac{g}{2u_0^2}\cdot d^2. \quad (3)$$

Την ίδια στιγμή, η κατακόρυφη απόσταση από το σημείο εκτόξευσης πρέπει να είναι : $y \leq h$.

Επομένως :

$$y \leq h \xrightarrow{(3)} \frac{g}{2u_0^2}\cdot d^2 \leq h \Leftrightarrow u_0^2 \geq \frac{gd^2}{2h} \Leftrightarrow u_0 \geq \sqrt{\frac{gd^2}{2h}} \Leftrightarrow u_{0(\min)} = d\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } u_{0(\min)} = 30 \cdot \sqrt{\frac{10}{2 \cdot 20}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u_{0(\min)} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει ότι η $\vec{u}_0$ έχει διεύθυνση κάθετη στην πρόσοψη του απέναντι κτιρίου, ώστε τη στιγμή που φτάνει απέναντι η οριζόντια απόσταση x που διάνυσε να είναι ίση με την απόσταση d των κτιρίων.

25. (16741)

Σώμα μάζας $m_A = 5 \text{ kg}$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχει ταχύτητα $u_0 = 10 \text{ m/s}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = 0,2$. Δύο δευτερόλεπτα αργότερα συγκρούεται πλαστικά με σώμα B, μάζας $m_B = 2 \text{ kg}$, που κινείται αντίρροπα του A και έχει τη χρονική στιγμή που γίνεται η κρούση ταχύτητα $u_B = 1 \text{ m/s}$. Το συσσωμάτωμα Σ που προκύπτει, κινείται προς την φορά κίνησης που είχε το σώμα A, χωρίς τριβές μετά την κρούση. Κάποια στιγμή συναντά τεταρτοκύκλιο, ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Στο υψηλότερο σημείο Δ του τεταρτοκυκλίου έχει ταχύτητα

$V_{\text{τελ}} = \sqrt{2} \text{ m/s}$. Να υπολογίσετε:

4.1 Την ταχύτητα u_A με την οποία συγκρούεται το σώμα A με το B.

Μονάδες 5

4.2 Την ταχύτητα του συσσωματώματος Σ.

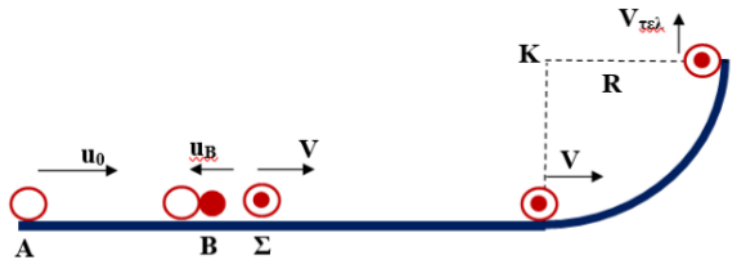
Μονάδες 6

4.3 Το έργο τριβής κατά την κίνηση του συσσωματώματος στο τεταρτοκύκλιο.

Μονάδες 7

4.4 Την συνολική θερμότητα που παράχθηκε.

Μονάδες 7



Απάντηση

4.1

Σώμα A

Μέχρι να συγκρουστεί με το B, το σώμα A εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Στον άξονα y ισχύει : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N_A = W_A = m_A g$. (1)

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης :

$$T_A = \mu N_A \xrightarrow{(1)} T_A = \mu m_A g. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = m_A \alpha \Leftrightarrow -T_A = m_A \alpha \xrightarrow{(2)} -\mu m_A g = m_A \alpha \Leftrightarrow \alpha = -\mu g \Rightarrow \alpha = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει :

$$u_A = u_0 + \alpha t_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} \Rightarrow u_A = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

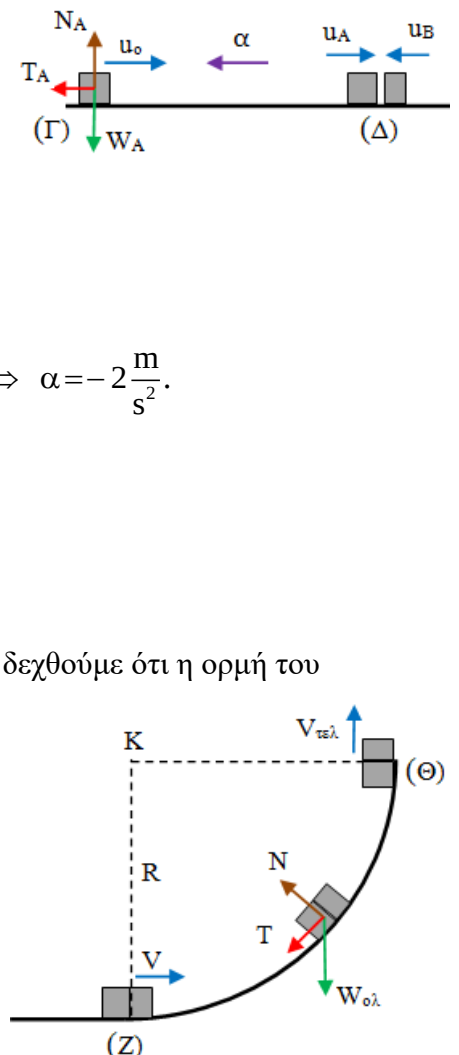
4.2

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{u}_A$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow (m_A + m_B)V = m_A u_A - m_B u_B \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{m_A u_A - m_B u_B}{m_A + m_B} \Rightarrow V = \frac{30 - 2}{5 + 2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Μέχρι να φτάσει το συσσωμάτωμα στη βάση του τεταρτοκυκλίου δεν υπάρχει τριβή, άρα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}$.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης στο τεταρτοκύκλιο, οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι το βάρος και η τριβή ολίσθησης.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη βάση Z μέχρι την κορυφή Θ :

$$K_{\Theta} - K_Z = W_W + W_T \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_A + m_B)V_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 = -(m_A + m_B)gR + W_T \Leftrightarrow$$
$$W_T = (m_A + m_B)\left(\frac{V_{\text{τελ}}^2 - V^2}{2} + gR\right) \Rightarrow W_T = 7 \cdot \left(\frac{2-16}{2} + 2\right)J \Rightarrow W_T = -35J.$$

4.4

Η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια σε τρία φαινόμενα.

i) Κατά τη διαδρομή του Σ_A από την αρχική θέση Γ μέχρι τη θέση της κρούσης Δ, η τριβή ολίσθησης παράγει έργο :

$$W_{T_A} = K_{\Delta} - K_{\Gamma} = \frac{1}{2}m_A(u_A^2 - u_0^2) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (36 - 100)J \Rightarrow W_{T_A} = -160J.$$

Το ποσό της θερμικής ενέργειας λόγω του έργου της τριβής ολίσθησης $\vec{T}_A$ είναι : $Q_1 = |W_{T_A}| = 160J$.

ii) Κατά τη διάρκεια της κρούσης, η κινητική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας στη διάρκεια της κρούσης είναι :

$$\Delta K_{\sigma} = \frac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 - \frac{1}{2}m_A u_A^2 - \frac{1}{2}m_B u_B^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 36 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1\right)J \Rightarrow \Delta K_{\sigma} = -35J.$$

Το ποσό της θερμικής ενέργειας λόγω της κρούσης είναι : $Q_2 = |\Delta K_{\sigma}| = 35J$.

iii) Το ποσό της θερμικής ενέργειας λόγω του έργου της τριβής ολίσθησης κατά την κίνηση του συσσωματώματος στο τεταρτοκύκλιο είναι : $Q_3 = |W_T| = 35J$.

Το συνολικό ποσό της θερμικής ενέργειας που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον είναι :

$$Q_{\text{ολ}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 160J + 35J + 35J \Rightarrow Q_{\text{ολ}} = 230J.$$

Σχόλια :

1) Στο σχήμα της άσκησης τα σώματα παριστάνονται σαν σφαίρες.

Όμως η σφαίρα σε μη λεία επιφάνεια, εκτός από τη μεταφορική κίνηση εκτελεί και στροφική κίνηση.

2) Στο ερώτημα 4.2 ζητείται η ταχύτητα του συσσωματώματος **αμέσως μετά την κρούση**.

3) Στο ερώτημα 4.4 η διατύπωση « . . . θερμότητα που παράχθηκε » δεν είναι ακριβής.

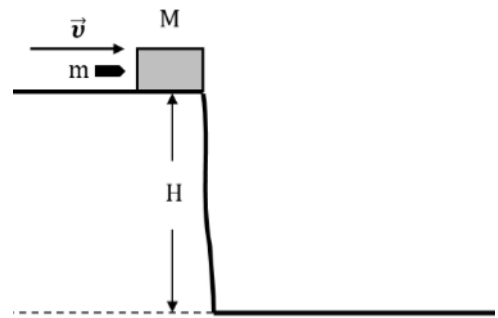
Μία καλύτερη διατύπωση είναι : « . . . κινητική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια ».

26. (16851)

Ένα ξύλινο κιβώτιο μάζας $M = 1,95 \text{ Kg}$ βρίσκεται ακίνητο στην άκρη κατακόρυφης χαράδρας, η οποία βρίσκεται σε ύψος $H = 45 \text{ m}$, πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βλήμα μάζας $m = 50 \text{ g}$, που κινείται με οριζόντια ταχύτητα $v = 100 \text{ m/s}$, συγκρούεται με το ακίνητο κιβώτιο και σφηνώνεται σ' αυτό.

Στη συνέχεια, το συσσωμάτωμα κιβώτιο-βλήμα που δημιουργείται, αμέσως μετά την κρούση εκτελεί οριζόντια βολή και καταλήγει στη θάλασσα.

Να υπολογίσετε:



4.1 Την ταχύτητα V_Σ του συσσωματώματος κιβώτιο-βλήμα αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.2 Την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος κιβώτιο-βλήμα λόγω της κρούσης.

Μονάδες 7

4.3 Τη χρονική διάρκεια της καθόδου του συσσωματώματος, μέχρις αυτό να φτάσει στην επιφάνεια της θάλασσας.

Μονάδες 6

4.4 Την οριζόντια απόσταση s , που θα διανύσει το συσσωμάτωμα (βεληνεκές), μέχρις ότου φτάσει στην επιφάνεια της θάλασσας.

Μονάδες 6

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ότι κατά την κίνηση του συσσωματώματος κιβώτιο-βλήμα θεωρούμε την αντίσταση από τον αέρα μηδενική.

Απάντηση

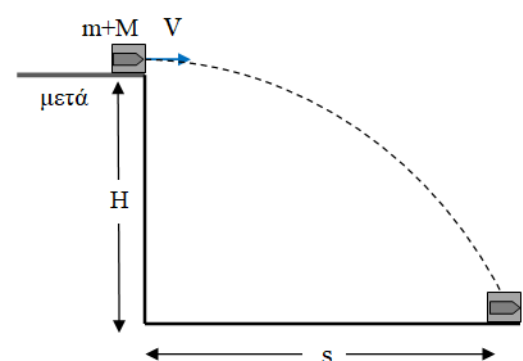
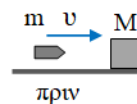
4.1

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ}(\text{πριν})} = p_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow mv = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 100 \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow V = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση

$$\text{είναι : } K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 100^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{πριν})} = 250 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(\text{μετά})} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(\text{μετά})} = 6,25 \text{ J}.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_\sigma| = K_{\sigma(\text{πριν})} - K_{\sigma(\text{μετά})} = 250 \text{ J} - 6,25 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_\sigma| = 243,75 \text{ J}.$$

4.3

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος H.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$H = \frac{1}{2}gt_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45}{10}} \text{ s} = \sqrt{9} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 3 \text{ s}.$$

4.4

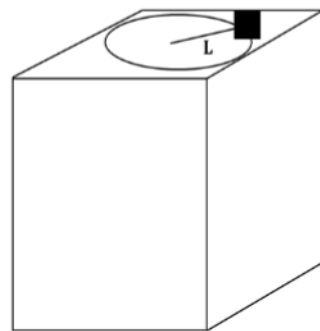
Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = V$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

$$s = V t_{\text{ολ}} = 2,5 \cdot 3 \text{ m} \Rightarrow s = 7,5 \text{ m}.$$

27. (16853)

Η ταράτσα ενός κτιρίου βρίσκεται σε ύψος $H = 20 \text{ m}$ από το έδαφος. Ένα κουτί μάζας $m_1 = 3 \text{ Kg}$ είναι δεμένο σε σχοινί μήκους L και κάνει ομαλή κυκλική κίνηση κινούμενο επάνω στην επιφάνεια της ταράτσας. Το κουτί κινείται με ταχύτητα $v = 20 \text{ m/s}$ και κάνει μία πλήρη περιστροφή σε χρονικό διάστημα $0,2\pi \text{ s}$. Στην κατάλληλη θέση το σχοινί κόβεται, ώστε το κουτί αφού ολισθήσει, να συγκρουστεί πλαστικά με ένα άλλο κουτί μάζας $m_2 = 1 \text{ Kg}$ που βρίσκεται στην άκρη της ταράτσας. Αμέσως μετά την σύγκρουση το συσσωμάτωμα εγκαταλείπει την ταράτσα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου v_0 .



4.1 Να υπολογίσετε το μήκος του σχοινιού με το οποίο είναι δεμένο το κουτί.

Μονάδες 4

4.2 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας v_0 , με την οποία το συσσωμάτωμα εγκαταλείπει την ταράτσα, καθώς και πόσο μακριά από την βάση του κτιρίου, το συσσωμάτωμα χτυπά στο έδαφος.

Μονάδες 8

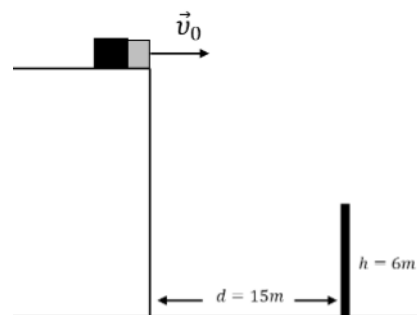
4.3 Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία το συσσωμάτωμα χτυπά στο έδαφος (μέτρο και κατεύθυνση).

Μονάδες 6

4.4 Έστω ότι σε απόσταση $d = 15 \text{ m}$ από τη βάση του κτιρίου βρίσκεται στύλος ύψους $h = 6 \text{ m}$. Ο στύλος βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με την τροχιά του συσσωματώματος. Να αιτιολογήσετε αν το συσσωμάτωμα θα χτυπήσει στο στύλο ή αν θα περάσει πάνω από αυτόν.

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε την αντίσταση του αέρα αμελητέα και να αγνοήσετε την τριβή για όλη την κίνηση του κουτιού επάνω στην ταράτσα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Απάντηση

4.1

Η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι $T = 0,2\pi \text{ s}$.

Το κουτί κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R = \ell$.

Ισχύει :

$$v = \frac{2\pi\ell}{T} \Leftrightarrow \ell = \frac{vT}{2\pi} \Rightarrow \ell = \frac{20 \cdot 0,2\pi}{2\pi} \text{ m} \Rightarrow \ell = 2 \text{ m}.$$

4.2

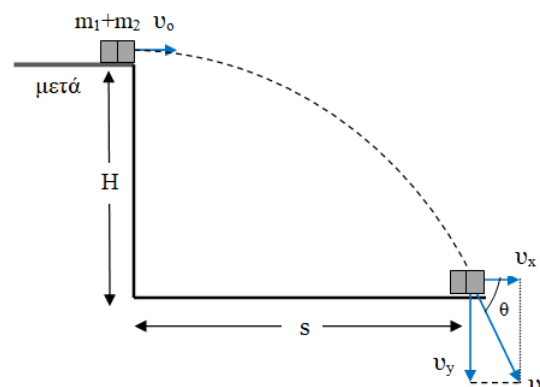
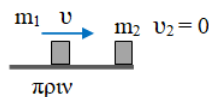
Όταν κοπεί το σχοινί, το κουτί κινείται με την ταχύτητα $\vec{v}$ και συγκρούεται πλαστικά με το 2ο ακίνητο κουτί.

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow m_1 v = (m_1 + m_2) v_0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$v_0 = \frac{3 \cdot 20}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Αφού εγκαταλείψει την ταράτσα, το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος H .

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης :

$$H = \frac{1}{2}gt_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \text{ s} = \sqrt{4} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 2 \text{ s}.$$

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v_x = v_0$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση (βεληνεκές)

$$s = v_0 t_{\text{ολ}} = 15 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow s = 30 \text{ m}.$$

Αν η ταχύτητα $\vec{v}_0$ είναι κάθετη στην πρόσοψη του κτιρίου, τότε η απόσταση d του σημείου πτώσης από τη βάση του κτιρίου είναι ίση με το βεληνεκές s : $d = s = 30 \text{ m}$.

4.3

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος το συσσωμάτωμα, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο:

$$v_y = gt_{\text{ολ}} = 10 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, είναι :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{625} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα σχηματίζει με την οριζόντια γωνία θ , για την οποία ισχύει :

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{20}{15} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{4}{3}.$$

4.4

Υπολογίζουμε τον χρόνο που χρειάζεται το συσσωμάτωμα για να διανύσει οριζόντια απόσταση $x = d$:

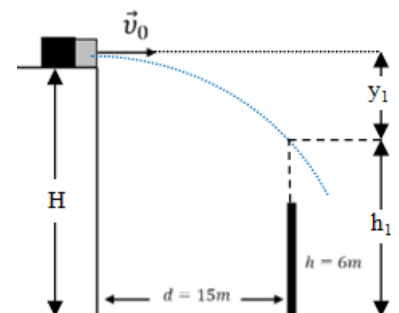
$$d = v_0 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{d}{v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{15}{15} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}.$$

Σε χρόνο t_1 το συσσωμάτωμα έχει κατέβει κατά

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 5 \text{ m}.$$

Τη στιγμή αυτή βρίσκεται σε ύψος $h_1 = H - y_1 = 20 \text{ m} - 5 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 15 \text{ m}$.

Αφού $h_1 > h$, το συσσωμάτωμα θα περάσει πάνω από τον στύλο.



28. (16856)

Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 6 \text{ Kg}$ και $m_2 = 4 \text{ kg}$ κινούνται σε οριζόντιο δάπεδο με αντίθετη φορά και συγκρούονται πλαστικά. Τη στιγμή της σύγκρουσης τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων ήταν $v_1 = 20 \text{ m/s}$ και $v_2 = 10 \text{ m/s}$.

4.1. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 5

4.2 Να βρεθεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων κατά την πλαστική κρούση.

Μονάδες 5

4.3 Αν η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι $\Delta t = 0,1 \text{ s}$, να βρεθεί το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκεί το ένα σώμα στο άλλο.

Μονάδες 7

4.4 Να βρεθεί σε πόση απόσταση από το σημείο της κρούσης, θα ακινητοποιηθεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ συσσωματώματος και δαπέδου είναι $\mu = 0,32$.

Να θεωρήσετε ότι κατά τη διάρκεια της κρούσης η μετατόπιση του συσσωματώματος είναι αμελητέα.

Μονάδες 8

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση**4.1**

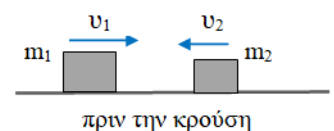
Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{6 \cdot 20 - 4 \cdot 10}{6 + 4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δηλαδή, αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται προς τα δεξιά.

**4.2**

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση είναι ίδια.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

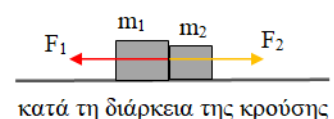
$$K_{\sigma(πριν)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 \right) \text{J} \Rightarrow K_{\sigma(πριν)} = 1400 \text{J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(μετά)} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8^2 \text{J} \Rightarrow K_{\sigma(μετά)} = 320 \text{J}.$$

Η ελάττωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta E_{μηχ}| = |\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(πριν)} - K_{\sigma(μετά)} = 1400 \text{J} - 320 \text{J} \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = 1080 \text{J}.$$

**4.3**

Η μεταβολή της ορμής του Σ_1 κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_1 = p_{1(μετά)} - p_{1(πριν)} = m_1 (V - v_1) \Rightarrow \Delta p_1 = 6 \cdot (8 - 20) \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -72 \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δεχόμαστε ότι η τριβή ανάμεσα στο δάπεδο και στο Σ_1 είναι ασήμαντη συγκρινόμενη με τη δύναμη που ασκεί το Σ_2 στο Σ_1 .

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση οριζόντια δύναμη που ασκήθηκε από το Σ_2 στο Σ_1 κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι :

$$\bar{F}_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{-72}{0,1} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_1 = -720 \text{ N}.$$

Άρα, η μέση δύναμη που ασκήθηκε από το Σ_2 στο Σ_1 έχει μέτρο $|\bar{F}_1| = 720 \text{ N}$ και φορά προς τα αριστερά.

Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton, η μέση δύναμη που ασκήθηκε από το Σ_1 στο Σ_2 κατά τη διάρκεια της κρούσης έχει μέτρο $|\bar{F}_2| = |\bar{F}_1| = 720 \text{ N}$ και φορά προς τα δεξιά.

4.4.

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται στο οριζόντιο δάπεδο, μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής ολίσθησης.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = (m_1 + m_2)g \Rightarrow N = 100 \text{ N}.$$

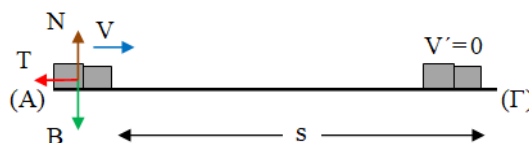
Από το νόμο της τριβής προκύπτει :

$$T = \mu N \Rightarrow T = 32 \text{ N}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση Α της κρούσης (ελάχιστα μετά τη κρούση) μέχρι τη θέση Γ που μηδενίζεται η ταχύτητα του συσσωματώματος :

$$K_\Gamma - K_A = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -T \cdot s \Leftrightarrow s = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2T}.$$

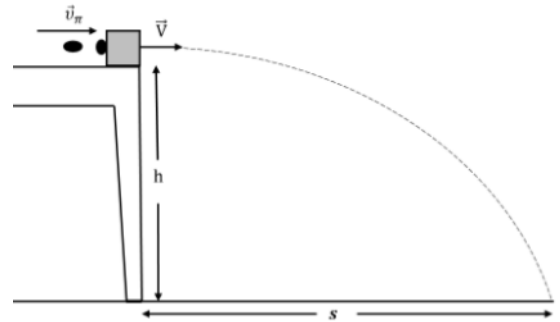
$$\text{Με αντικατάσταση : } s = \frac{10 \cdot 8^2}{2 \cdot 32} \text{ m} \Rightarrow s = 10 \text{ m}.$$



29. (16857)

Ένας μικρός ξύλινος κύβος μάζας $M = 30 \text{ g}$ ηρεμεί αρχικά στο άκρο του πάγκου του σχολικού εργαστηρίου, που έχει ύψος $h = 0,8 \text{ m}$ από το οριζόντιο δάπεδο. Εκτοξεύουμε ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας $m = 10 \text{ g}$ έτσι ώστε να συγκρουστεί με οριζόντια ταχύτητα με τον ξύλινο κύβο. Η κρούση είναι πλαστική και αμέσως μετά το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή. Το συσσωμάτωμα έπεσε στο πάτωμα σε οριζόντια απόσταση $s = 0,8 \text{ m}$ από το σημείο βολής.

4.1 Να υπολογίσετε την οριζόντια ταχύτητα V του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.



Μονάδες 6

4.4 Ποια η ταχύτητα v_π με την οποία συγκρούστηκε η πλαστελίνη με το ξύλινο σώμα;

Μονάδες 5

4.3 Να υπολογίσετε την απώλεια κινητικής ενέργειας για το σύστημα λόγω της κρούσης.

Μονάδες 6

4.4 Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται, πως «είδε» ότι το συσσωμάτωμα έπεσε υπό γωνία $\varphi = 45^\circ$ ως προς το πάτωμα. Όμως είναι πολύ δύσκολο να μετρηθεί η γωνία αυτή με απλή παρατήρηση, ώστε να ελεγχθεί ο ισχυρισμός του μαθητή. Με τα δεδομένα που έχετε και τα αποτελέσματα, που έχουν προκύψει από τα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τους σχετικούς υπολογισμούς για να ελέγξετε τον παραπάνω ισχυρισμό. Ποιό από τα επόμενα συμπεράσματα είναι αυτό, στο οποίο πρέπει να καταλήξετε; Θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

(α) $\varphi = 45^\circ$, (β) $\varphi > 45^\circ$, (γ) $\varphi < 45^\circ$.

Δίνεται: $\epsilon\varphi 45^\circ = 1$.

Μονάδες 8

Απάντηση

4.1

Αφού εγκαταλείψει την επιφάνεια, το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h .

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} \text{ s} \Rightarrow$$

$$t_{\text{ολ}} = 0,4 \text{ s}.$$

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = V$.

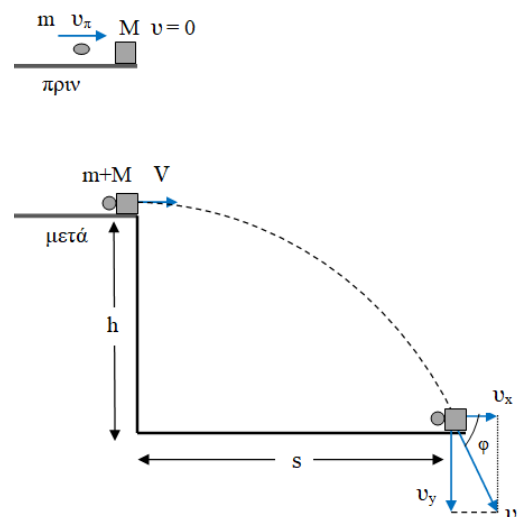
Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση s . Ισχύει :

$$s = V t_{\text{ολ}} \Leftrightarrow V = \frac{s}{t_{\text{ολ}}} \Rightarrow V = \frac{0,8 \text{ m}}{0,4 \text{ s}} \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_\pi$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :



$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv_{\pi} = (m+M)V \Leftrightarrow v_{\pi} = \frac{(m+M)V}{m} \Rightarrow v_{\pi} = \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \text{ m}}{10^{-2}} \Rightarrow v_{\pi} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(πριν)} = \frac{1}{2}mv_{\pi}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 8^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(πριν)} = 32 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

$$K_{\sigma(μετά)} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\sigma(μετά)} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_{\sigma}| = K_{\sigma(πριν)} - K_{\sigma(μετά)} = 32 \cdot 10^{-2} \text{ J} - 8 \cdot 10^{-2} \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_{\sigma}| = 24 \cdot 10^{-2} \text{ J} = 0,24 \text{ J}.$$

4.4

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος το συσσωμάτωμα, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο:

$$v_y = gt_{ολ} = 10 \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα σχηματίζει με την οριζόντια γωνία φ , για την οποία ισχύει :

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4}{2} \Rightarrow \epsilon\varphi\varphi = 2.$$

Παρατηρούμε ότι : $\epsilon\varphi\varphi > \epsilon\varphi 45^\circ$, άρα $\varphi > 45^\circ$.

30. (17062)

Δύο σφαίρες μάζας $m_1 = 6 \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \text{ kg}$, βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη και εκτελούν οριζόντια βολή από ύψος $H = 1,25 \text{ m}$ από το έδαφος. Οι σφαίρες εκτοξεύονται ταυτόχρονα με ταχύτητες μέτρου $u_1 = 2 \text{ m/s}$ και $u_2 = 10 \text{ m/s}$ και ίδιας φοράς αντίστοιχα. Να βρείτε:

4.1 Την απόσταση μεταξύ των σφαιρών όταν φτάσουν στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.2 Την χρονική στιγμή $t_1 = 0,2 \text{ s}$, σε ποιο ύψος από το έδαφος βρίσκεται η σφαίρα μάζας m_1 ;

Μονάδες 6

4.3 Ποια η ταχύτητα της σφαίρας m_1 την χρονική στιγμή t_1 ;

Μονάδες 6

4.4 Ποια η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας στη διάρκεια της οριζόντιας βολής;

Μονάδες 7

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

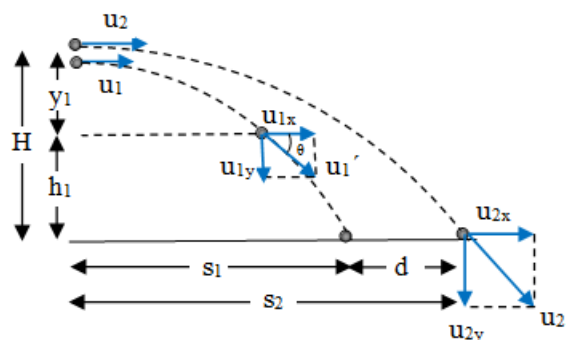
Απάντηση

4.1

Στον κατακόρυφο άξονα y οι σφαίρες εκτελούν ελεύθερη πτώση από ύψος H . Για το χρόνο κίνησης $t_{ολ}$ ισχύει :

$$H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow$$

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25}{10}} \text{ s} = \sqrt{0,25} \text{ s} \Rightarrow t_{ολ} = 0,5 \text{ s}.$$



Στον άξονα x οι σφαίρες εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Τη στιγμή που φτάνουν στο έδαφος οι σφαίρες έχουν διανύσει οριζόντια αποστάσεις s_1, s_2 . Ισχύουν :

$$s_1 = u_1 t_{ολ} = 2 \cdot 0,5 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 1 \text{ m}.$$

$$s_2 = u_2 t_{ολ} = 10 \cdot 0,5 \text{ m} \Rightarrow s_2 = 5 \text{ m}.$$

$$\text{Η απόσταση των σφαιρών στο έδαφος είναι : } d = s_2 - s_1 = 5 \text{ m} - 1 \text{ m} \Rightarrow d = 4 \text{ m}.$$

4.2

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 η 1η σφαίρα έχει κατέβει κατακόρυφα κατά

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,2^2 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 0,2 \text{ m}.$$

$$\text{Τη στιγμή αυτή βρίσκεται σε ύψος : } h_1 = H - y_1 = 1,25 \text{ m} - 0,2 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 1,05 \text{ m}.$$

4.3

Τη χρονική στιγμή t_1 η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της 1η σφαίρας έχει μέτρο :

$$u_{1y} = g t_1 = 10 \cdot 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u_{1y} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ταχύτητα της 1ης σφαίρας τη στιγμή t_1 έχει μέτρο

$$u_1' = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u_1' = 2\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Την ίδια στιγμή η ταχύτητα σχηματίζει με την οριζόντια γωνία θ για την οποία ισχύει :

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{2}{2} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

4.4

Τη στιγμή που φτάνουν οι σφαίρες στο έδαφος, οι κατακόρυφες συνιστώσες των ταχυτήτων έχουν μέτρα :

$$u_{1y} = u_{2y} = g t_{ολ} = 10 \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u_{1y} = u_{2y} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ορμή κάθε σφαίρας στον άξονα x είναι σταθερή, άρα : $\Delta \vec{p}_x = 0$.

Επομένως, για τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας ισχύει : $\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}_y = m \vec{u}_y$.

Δηλαδή, η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας έχει κατακόρυφη διεύθυνση, με φορά προς τα κάτω και μέτρο :

$$\Delta p_1 = \Delta p_{1y} = m_1 u_{1y} = 6 \cdot 5 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = 30 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_{2y} = m_2 u_{2y} = 2 \cdot 5 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 10 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλια

1) Η διατύπωση «Δύο σφαίρες βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη και εκτελούν οριζόντια βολή» δεν είναι σωστή.

Οι σφαίρες βρίσκονται αρχικά η μία δίπλα στην άλλη και εκτοξεύονται ταυτόχρονα με οριζόντιες ταχύτητες.

2) Τα ερωτήματα 4.3, 4.4 είναι ασαφή.

Στο ερώτημα 4.3 έπρεπε να ζητείται το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας της 1ης σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1 .

Στο ερώτημα 4.4 έπρεπε να ζητείται το μέτρο και η κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής κάθε σφαίρας, από τη στιγμή που εκτοξεύτηκε μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

31. (20110) Ακίνητο πυροβόλο, βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο, στην άκρη γκρεμού και σε ύψος H από οριζόντιο έδαφος. Από το πυροβόλο αυτό, του οποίου η μάζα είναι $M = 100\text{Kg}$, εκτοξεύεται βλήμα μάζας $m = 5\text{Kg}$ με οριζόντια ταχύτητα, μέτρου $v_o = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.1 Να προσδιορίσετε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το πυροβόλο μετά την εκτυρσοκρότηση, θεωρώντας ότι αυτή διαρκεί αμελητέο χρονικό διάστημα.

Μονάδες 6

4.2 Αν το πυροβόλο έχει με το δάπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$, να προσδιορίσετε τη μετατόπισή του μέχρι να σταματήσει.

Μονάδες 6

4.3 Το βλήμα που εκτοξεύτηκε, εκτελεί οριζόντια βολή και φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα μέτρου $v = 50\sqrt{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το βλήμα φτάνει στο έδαφος.

Μονάδες 7

4.4 Να προσδιορίσετε το ύψος H , από το οποίο εκτοξεύτηκε το βλήμα καθώς και τη μέγιστη οριζόντια απομάκρυνσή του (οριζόντιο βεληνεκές).

Μονάδες 6

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα αγνοούνται.

Απάντηση

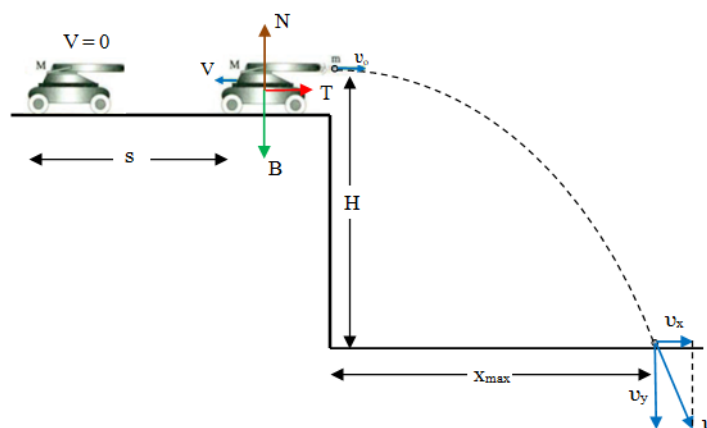
4.1

Αφού η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχτούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow 0 = mv - MV \Leftrightarrow V = \frac{mv}{M}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } V = \frac{5 \cdot 100 \text{ m}}{100 \text{ s}} \Rightarrow V = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Μετά την εκτυρσοκρότηση το πυροβόλο κινείται στο οριζόντιο δάπεδο, μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής ολίσθησης.

Στον κατακόρυφο άξονα y το πυροβόλο ισορροπεί, άρα : $\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = Mg.$ (1)

Από τον νόμο της τριβής προκύπτει : $T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu Mg.$ (2)

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση της έκρηξης (ελάχιστα μετά την έκρηξη) μέχρι τη θέση που μηδενίζεται η ταχύτητα του πυροβόλου :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}MV^2 = -T \cdot s \xrightarrow{(2)} \frac{1}{2}MV^2 = \mu Mg \cdot s \Leftrightarrow s = \frac{V^2}{2\mu g} \Rightarrow$$

$$s = \frac{5^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10} \text{ m} \Rightarrow s = 2,5 \text{ m}.$$

4.3

Στον οριζόντιο άξονα x το βλήμα κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = v_0$.

Στον κατακόρυφο άξονα y το βλήμα εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Τη στιγμή που φτάνει το βλήμα στο έδαφος, έχει ταχύτητα μέτρου v . Ισχύει :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v_y^2 = v^2 - v_x^2 \Leftrightarrow v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_y = \sqrt{(50\sqrt{5})^2 - 100^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = \sqrt{12500 - 10000} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{2500} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη στιγμή που φτάνει το βλήμα στο έδαφος, στον άξονα y ισχύει :

$$v_y = g t_{\text{ολ}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{v_y}{g} = \frac{50}{10} \text{s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 5 \text{s}.$$

4.4

Το ύψος από το οποίο εκτοξεύτηκε το βλήμα είναι :

$$H = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 \text{ m} \Rightarrow H = 125 \text{ m}.$$

Η μέγιστη οριζόντια απόσταση (βεληγεκές) x_{max} είναι :

$$x_{\text{max}} = v_0 t_{\text{ολ}} = 100 \cdot 5 \text{ m} \Rightarrow x_{\text{max}} = 500 \text{ m}.$$

32. (20112) Βλήμα μάζας $m = 0,02\text{Kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και σφηνώνεται σε ξύλινο στόχο μάζας $M = 0,98\text{Kg}$, που βρίσκεται ακίνητος πάνω σε λείο τραπέζι, σε ύψος $H = 1,25\text{m}$, από οριζόντιο δάπεδο. Να βρεθεί:

4.1 η ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως, μετά την κρούση,

Μονάδες 6

4.2 η μεταβολή της ορμής του βλήματος, κατά τη διάρκεια της ενσφήνωσης,

Μονάδες 6

4.3 το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο ξύλινος στόχος στο βλήμα, αν γνωρίζετε ότι η κρούση διαρκεί $0,01\text{s}$.

Μονάδες 7

4.4 Κάποια στιγμή το συσσωμάτωμα ξεπερνά την άκρη του τραπεζιού. Να προσδιορίσετε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το συσσωμάτωμα στο δάπεδο, καθώς και τη μέγιστη οριζόντια απομάκρυνσή του (οριζόντιο βεληνεκές).

Μονάδες 6

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα μπορούν να αγνοηθούν.

Απάντηση

4.1

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της κρούσης άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1} \Rightarrow V = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Η μεταβολή της ορμής του βλήματος στη διάρκεια της κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_\beta = p_{\beta(μετά)} - p_{\beta(πριν)} = m(V - v) \Rightarrow \Delta p_\beta = 2 \cdot 10^{-2} \cdot (4 - 200) \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_\beta = -3,92 \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

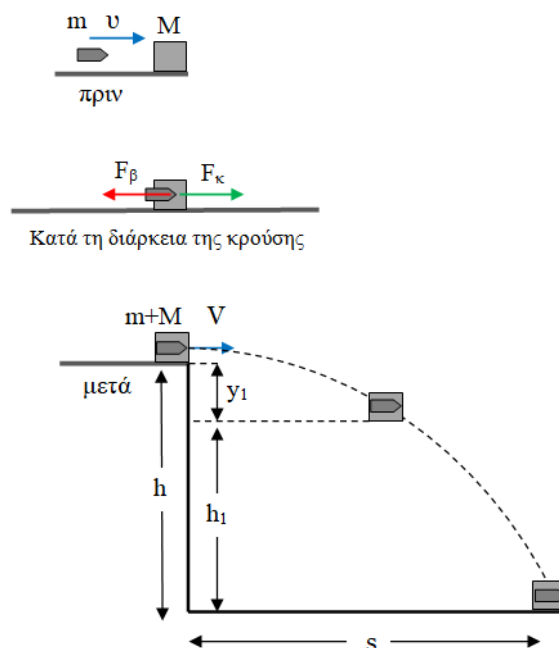
Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι το διάνυσμα $\vec{\Delta p}_\beta$ έχει φορά προς τα αριστερά.

4.3

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση οριζόντια δύναμη που ασκήθηκε από το σώμα στο βλήμα κατά τη διάρκεια της κρούσης, είναι :

$$\bar{F}_\beta = \frac{\Delta p_\beta}{\Delta t} = \frac{-3,92}{0,01} \text{N} \Rightarrow \bar{F}_\beta = -392 \text{N}.$$

Άρα, η δύναμη που ασκήθηκε από το σώμα στο βλήμα έχει μέση τιμή (μέτρο) $|\bar{F}_\beta| = 392 \text{N}$ (και φορά προς τα αριστερά).



4.4

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος H.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε το χρόνο κίνησης :

$$H = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25}{10}} \text{ s} = \sqrt{0,25} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 0,5 \text{ s}.$$

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = V$.

Μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

$$s = V t_{\text{ολ}} = 4 \cdot 0,5 \text{ m} \Rightarrow s = 2 \text{ m}.$$

Σχόλιο : Στο ερώτημα 4.2 δεν διευκρινίζεται αν ζητείται η αλγεβρική μεταβολή της ορμής ή το μέτρο μεταβολής της ορμής.

33. (20113) Ένα μικρό σώμα, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, πάνω σε ένα λείο τραπέζι, δεμένο στο άκρο νήματος, έχοντας γραμμική ταχύτητα μέτρου $v = 20 \frac{m}{s}$. Αν το σώμα έχει μάζα $m_1 = 0,1Kg$, και το μήκος του νήματος είναι ίσο με $\ell = \frac{1}{\pi} m$, να προσδιορίσετε:

4.1 την περίοδο, τη συχνότητα και τη γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς του σώματος,

Μονάδες 6

4.2 το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σώματος και της κεντρομόλου δύναμης που δέχεται.

Μονάδες 6

4.3 Όταν το σώμα εκτελεί μία πλήρη περιστροφή το νήμα κόβεται και αυτό κινείται ευθύγραμμα πάνω στο λείο τραπέζι. Στην πορεία του συναντά ένα δεύτερο, ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 0,9Kg$, με το οποίο συγκρούεται πλαστικά. Να προσδιορίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Μονάδες 6

4.4 Να προσδιορίσετε το μέτρο της μεταβολής της ορμής και τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του πρώτου σώματος, εξαιτίας της κρούσης του με το δεύτερο σώμα μάζας m_2 .

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Απάντηση

4.1

Το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R = \ell$.

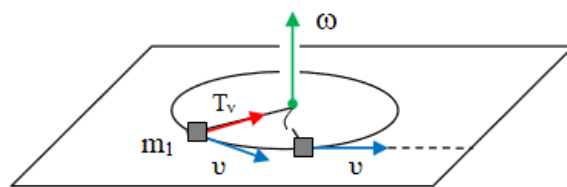
Ισχύει :

$$v = \frac{2\pi\ell}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi\ell}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi \frac{1}{\pi}}{20} s \Rightarrow T = 0,1s.$$

$$\text{Η τιμή της συχνότητας είναι : } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,1s} \Rightarrow f = 10Hz.$$

$$\text{Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι : } \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10 \frac{\text{rad}}{s} \Rightarrow \omega = 20\pi \frac{\text{rad}}{s}.$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο του κύκλου, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδό του και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



4.2

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\alpha_k = \frac{v^2}{\ell} = \frac{20^2}{\frac{1}{\pi}} \frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha_k = 400\pi \frac{m}{s^2}.$$

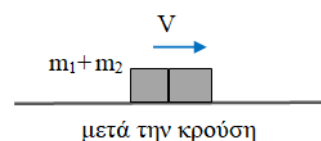
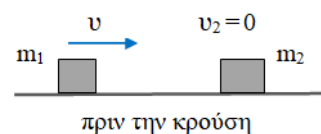
Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής προκύπτει το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης :

$$F_k = m_1 \alpha_k = 0,1 \cdot 400\pi \text{ N} \Rightarrow F_k = 40\pi \text{ N}.$$

4.3

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :



$$p_{ολ(μετά)} = p_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = m_1 v \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \Rightarrow V = \frac{0,1 \cdot 20 \text{ m}}{1} \frac{1}{s} \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{s}.$$

4.4

Η μεταβολή της ορμής του 1ου σώματος λόγω της κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_1 = m_1(V - v) = 0,1 \cdot (2 - 20) \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -1,8 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής είναι : $|\Delta p_1| = 1,8 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του 1ου σώματος εξαιτίας της κρούσης είναι :

$$\Delta K_1 = K_{1(μετά)} - K_{1(πριν)} = \frac{1}{2} m_1 (V^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (4 - 400) \text{ J} \Rightarrow \Delta K_1 = -19,8 \text{ J}.$$

Σχόλια :

- 1) Στο ερώτημα 4.1 δεν διευκρινίζεται αν ζητείται μόνο το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ή και η κατεύθυνσή της.
- 2) Η διατύπωση « . . . την περίοδο, τη συχνότητα και γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς του σώματος . . . » δεν είναι σωστή.
Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά την περίοδο, τη συχνότητα και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ομαλής κυκλικής κίνησης.

34. (20648)

Δύο σώματα μάζας $m_1 = 1\text{Kg}$ και $m_2 = 4\text{Kg}$ είναι τοποθετημένα και ακίνητα στις θέσεις Α και Γ αντίστοιχα, πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι ύψους $H = 0,8\text{m}$. Οι θέσεις Α και Γ απέχουν μεταξύ τους απόσταση $S = 1\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ εκτοξεύεται από την θέση Α, το σώμα μάζας m_1 με ταχύτητα $v_0 = 10\text{m/s}$, οπότε κάποια στιγμή t_1 , συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα μάζας m_2 .

Να υπολογίσετε:

4.1. την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 5

4.2. τη μέγιστη οριζόντια απόσταση που θα διανύσει το συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της οριζόντιας βολής, μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

Μονάδες 7

4.3. τη χρονική στιγμή t_2 , στην οποία θα φτάσει το συσσωμάτωμα στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.4. τη χρονική στιγμή t_3 , κατά τη διάρκεια της οριζόντιας βολής και πριν φτάσει το συσσωμάτωμα στο έδαφος, όπου η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι το 25% της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος όταν φτάσει στο έδαφος.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το Σ_1 κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_0$ μέχρι να συγκρουστεί με το Σ_2 .

Το σύστημα των δύο σωμάτων είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_0$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \Rightarrow v = \frac{1 \cdot 10\text{ m}}{5\text{ s}} \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Αφού εγκαταλείψει την ταρατσα, το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος H .

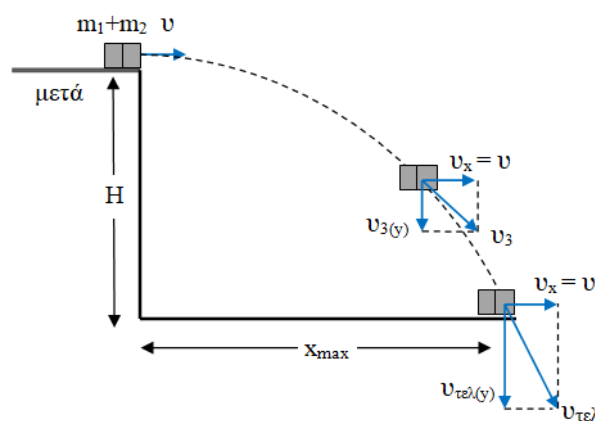
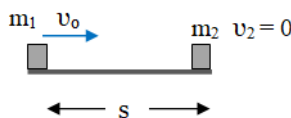
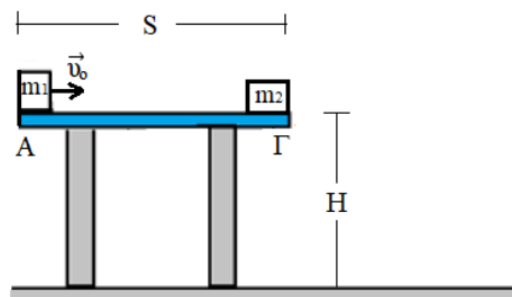
Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της πτώσης :

$$H = \frac{1}{2} g (\Delta t_2)^2 \Leftrightarrow (\Delta t_2)^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} \text{ s} = \sqrt{0,16} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 0,4 \text{ s}.$$

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = v$. Μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση

$$x_{\max} = v (\Delta t_2) = 2 \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow x_{\max} = 0,8 \text{ m}.$$



4.3

Στη χρονική διάρκεια $0 - t_1$ το Σ_1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}_0$. Ισχύει :

$$s = v_0 t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{s}{v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{10} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 0,1 \text{ s}.$$

Το συσσωμάτωμα φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή t_2 . Ισχύει :

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow t_2 = 0,1 \text{ s} + 0,4 \text{ s} \Rightarrow t_2 = 0,5 \text{ s}.$$

4.4

Τη στιγμή που φτάνει το συσσωμάτωμα στο έδαφος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο:

$$v_{\text{τελ}(y)} = g(\Delta t_2) = 10 \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\text{τελ}(y)} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_3 ισχύει :

$$K_3 = 25\% \cdot K_{\text{τελ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_3^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\text{τελ}}^2 \Leftrightarrow v_3^2 = \frac{1}{4}v_{\text{τελ}}^2 \Leftrightarrow v^2 + v_{3y}^2 = \frac{1}{4}(v^2 + v_{\text{τελ}(y)}^2) \Leftrightarrow$$
$$v_{3y}^2 = \frac{v_{\text{τελ}(y)}^2 - 3v^2}{4} \Rightarrow v_{3y} = \frac{\sqrt{v_{\text{τελ}(y)}^2 - 3v^2}}{2},$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_{3y} = \frac{\sqrt{4^2 - 3 \cdot 2^2}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{3y} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Ισχύει : } v_{3y} = g(\Delta t_3) \Leftrightarrow \Delta t_3 = \frac{v_{3y}}{g} \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{1}{10} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_3 = 0,1 \text{ s}.$$

$$\text{Επομένως : } t_3 = t_1 + \Delta t_3 = 0,1 \text{ s} + 0,1 \text{ s} \Rightarrow t_3 = 0,2 \text{ s}.$$

35. (20897) Σώμα μάζας $m = 4\text{kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε κατακόρυφο στύλο ύψους h . Με τη βοήθεια ενός εκρηκτικού μηχανισμού το σώμα μάζας m διασπάται σε δύο νέα σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα και με σχέση μαζών $m_2 = 3m_1$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο νέων σωμάτων ακριβώς μετά τη διάσπαση είναι 384 J .

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10\text{ m/s}^2$.

4.1 Να βρείτε τις ταχύτητες των σωμάτων ακριβώς μετά την διάσπασή τους.

Μονάδες 6

Εάν η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων είναι $d_{\max} = 160\text{m}$, να βρείτε:

4.2 Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη χρονική στιγμή της διάσπασης μέχρι τη χρονική στιγμή που φτάνουν τα δύο σώματα στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.3 Το ύψος h από το οποίο εκτοξεύτηκαν τα δύο σώματα.

Μονάδες 6

4.4 Το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 τη στιγμή κατά την οποία φτάνει στο έδαφος.

Δίνεται: $\sqrt{3076} = 55,46$.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1.

Για τις μάζες των σωμάτων ισχύει :

$$m_1 + m_2 = m \xrightarrow{m_2 = 3m_1} m_1 + 3m_1 = m \Leftrightarrow 4m_1 = m \Leftrightarrow$$

$$m_1 = \frac{m}{4} \Rightarrow m_1 = 1\text{Kg}.$$

$$\text{Άρα : } m_2 = 3\text{ Kg}.$$

Αφού η διάρκεια της έκρηξης είναι αμελητέα, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκειά της.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. :

$$\vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} = \vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_2 = -\vec{p}_1.$$

Επομένως, αμέσως μετά τη διάσπαση η ορμή του 2ου κομματιού έχει αντίθετη κατεύθυνση από του 1ου.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων ισχύει :

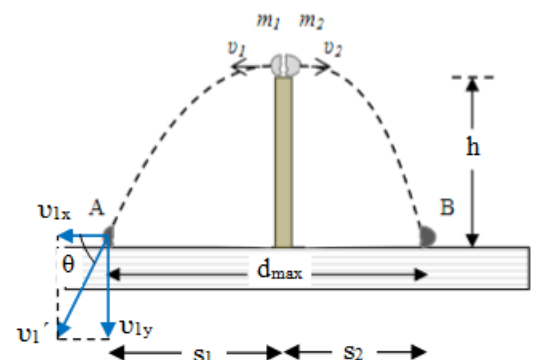
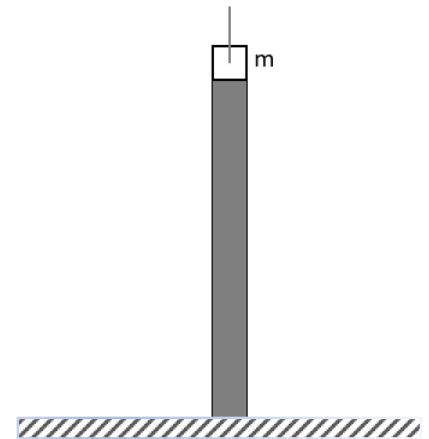
$$p_2 = p_1 \Leftrightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1 \xrightarrow{m_2 = 3m_1} v_1 = 3v_2. \quad (1)$$

Από την κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά τη διάσπαση, προκύπτει :

$$K_{\sigma} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \xrightarrow{(1)} K_{\sigma} = \frac{1}{2} m_1 (3v_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot 9v_2^2 + \frac{3}{2} m_1 v_2^2 \Leftrightarrow$$

$$K_{\sigma} = 6m_1 v_2^2 \Leftrightarrow v_2^2 = \frac{K_{\sigma}}{6m_1} \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{K_{\sigma}}{6m_1}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{384}{6 \cdot 1}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{64} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$(1) \Rightarrow v_1 = 24 \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά τη διάσπαση είναι οριζόντιες.

Μετά τη διάσπαση τα δύο κομμάτια εκτελούν οριζόντια βολή από ύψος h .

Στον άξονα x τα δύο κομμάτια εκτελούν ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μέχρι να φτάσουν στο έδαφος θα έχουν διανύσει αποστάσεις s_1, s_2 αντίστοιχα.

1ο κομμάτι

$$x_1 = v_1 t \xrightarrow{t=t_{ολ}, x_1=s_1} s_1 = v_1 t_{ολ}. \quad (2)$$

2ο κομμάτι

$$x_2 = v_2 t \xrightarrow{t=t_{ολ}, x_2=s_2} s_2 = v_2 t_{ολ}. \quad (3)$$

Η απόσταση μεταξύ των σωμάτων είναι μέγιστη, τη στιγμή που φτάνουν στο έδαφος.

$$\text{Ισχύει: } d_{\max} = s_1 + s_2 \xrightarrow{(2),(3)} v_1 t_{ολ} + v_2 t_{ολ} = d_{\max} \Leftrightarrow t_{ολ} = \frac{d_{\max}}{v_1 + v_2} \Rightarrow t_{ολ} = \frac{160}{32} \text{ s} \Rightarrow t_{ολ} = 5 \text{ s}.$$

4.3

Στον κατακόρυφο άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση.

Από την εξίσωση της μετατόπισης στον άξονα y υπολογίζουμε το ύψος h του στύλου :

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{y=h, t=t_{ολ}} h = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 \text{ m} \Rightarrow h = 125 \text{ m}.$$

4.4

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος το 1ο κομμάτι, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_{1y} = g t_{ολ} = 10 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{1y} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του 1ου κομματιού τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος, υπολογίζεται με το Πυθαγόρειο θεώρημα :

$$v_1' = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{24^2 + 50^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{3076} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = 55,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Εναλλακτική λύση

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το σημείο της διάσπασης (αμέσως μετά τη διάσπαση) μέχρι το σημείο του εδάφους που πέφτει το Σ_1 και υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας v_1' τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος :

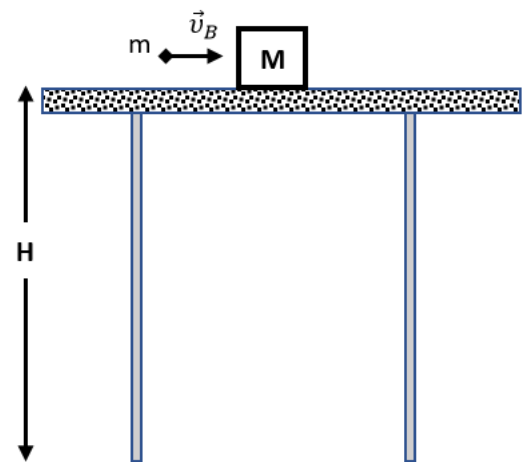
$$K_1' - K_1 = W_{B_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h \Leftrightarrow v_1'^2 = v_1^2 + 2gh \Leftrightarrow v_1' = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \Rightarrow$$

$$v_1' = \sqrt{24^2 + 2 \cdot 10 \cdot 125} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{3076} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = 55,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι **οι ταχύτητες των δύο κομματιών αμέσως μετά τη διάσπαση έχουν οριζόντια διεύθυνση.**

36. (20899) Βλήμα μάζας $m = 0,2\text{kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_B = 100\text{ m/s}$ σφηνώνεται στο κέντρο μάζας ξύλινου σώματος μάζας $M = 1,8\text{kg}$ που είναι τοποθετημένο στη μη λεία οριζόντια επιφάνεια ενός τραπεζιού που έχει ύψος $H = 0,8\text{m}$ από το έδαφος. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται κατά μήκος του τραπεζιού, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβή ολίσθησης $\mu = 0,2$. Η κίνηση του συσσωματώματος μέχρι την άκρη του τραπεζιού διαρκεί χρονικό διάστημα $\Delta t_1 = 2\text{s}$ και το συσσωμάτωμα συνεχίζει την κίνησή του μέχρι την προσεδάφιση.



4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.2. Να βρείτε το μέτρο v_0 της ταχύτητας του συσσωματώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει το τραπέζι.

Μονάδες 7

4.3. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα Δt_2 της οριζόντιας βολής.

Μονάδες 6

4.4. Να βρείτε τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του σώματος κατά το χρονικό διάστημα Δt_2 της οριζόντιας βολής.

Μονάδες 6

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10\text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_B$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow mv_B = (m+M)v_0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{mv_B}{m+M} \Rightarrow v_0 = \frac{0,2 \cdot 100}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει στην οριζόντια επιφάνεια του τραπεζιού.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = (m+M)g. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής ολίσθησης προκύπτει :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu(m+M)g. \quad (2)$$

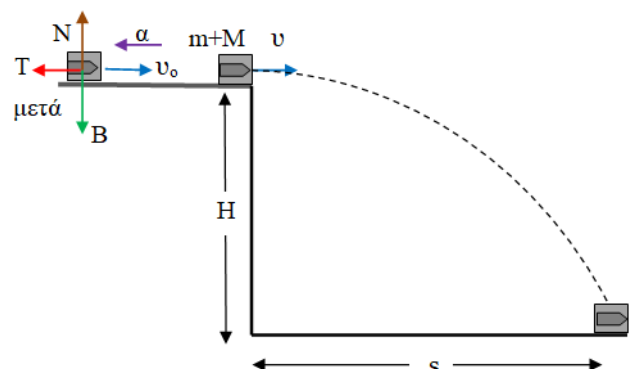
Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = (m+M)\alpha \Leftrightarrow -T = (m+M)\alpha \xrightarrow{(2)}$$

$$-\mu(m+M)g = (m+M)\alpha \Leftrightarrow \alpha = -\mu g \Rightarrow \alpha = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η ταχύτητά του μετά από χρόνο Δt_1 είναι : $v = v_0 + \alpha(\Delta t_1) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + (-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (2\text{s}) \Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$



4.3

Αφού εγκαταλείψει το τραπέζι, το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή.

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος H.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τη χρονική διάρκεια της κίνησης :

$$H = \frac{1}{2} g (\Delta t_2)^2 \Leftrightarrow (\Delta t_2)^2 = \frac{2H}{g} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} \text{ s} = \sqrt{0,16} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 0,4 \text{ s}.$$

4.4

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = v$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

$$s = v (\Delta t_2) = 6 \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow s = 2,4 \text{ m}.$$

Σχόλιο : Η έννοια του κέντρου μάζας διδάσκεται στη Γ' Λυκείου.

37. (21182) Ένα βλήμα μάζας $m_1 = 0,2\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_1 = 300\text{m/s}$ και διαπερνά ένα ακίνητο ξύλινο σώμα μάζας $m_2 = 4\text{kg}$, το οποίο βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα βγαίνει από το ξύλινο σώμα με ταχύτητα $u_2 = 100\text{m/s}$ σε χρόνο $\Delta t = 2\text{ s}$. Να βρείτε:

4.1. Την ταχύτητα που θα αποκτήσει το ξύλινο σώμα.

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο της μέσης οριζόντιας δύναμης που ασκεί το ξύλινο σώμα στο βλήμα.

Μονάδες 6

4.3. Πόση κινητική ενέργεια του συστήματος χάθηκε λόγω της κρούσης.

Μονάδες 6

4.4. Το διάστημα που θα διανύσει το ξύλινο σώμα στο οριζόντιο επίπεδο μετά την κρούση, αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του οριζοντίου επιπέδου είναι $\mu = 0,2$.

Μονάδες 7

Δίνεται: $g = 10\text{m/s}^2$.

Σχόλιο :

Τα δεδομένα της άσκησης δεν είναι ρεαλιστικά.

Η χρονική διάρκεια της κρούσης $\Delta t = 2\text{ s}$ είναι πολύ μεγάλη και το σύστημα δεν μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, αφού υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις (βάρος, τριβή).

Η μέση ταχύτητα του βλήματος κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι (περίπου) $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Στη χρονική διάρκεια της κρούσης $\Delta t = 2\text{ s}$ το βλήμα θα μετακινηθεί (περίπου) : $\Delta x = \bar{v}(\Delta t) = 400\text{ m}$, άρα το ξύλινο σώμα θα έπρεπε να έχει μήκος τουλάχιστον 400 m !

Η εκφώνηση έπρεπε να δίνει πολύ μικρότερη χρονική διάρκεια κρούσης, π.χ. $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}\text{ s}$.

38. (21184) Μια σφαίρα μάζας $M = 1,95 \text{ kg}$ ηρεμεί στην άκρη οριζόντιου επιπέδου, το οποίο βρίσκεται σε ύψος $h = 80 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Βλήμα μάζας $m = 50 \text{ g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_0 = 200 \text{ m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με την σφαίρα. Αν αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα βλήμα - σφαίρα εκτελεί οριζόντια βολή, να βρείτε:

4.1. Την ταχύτητα που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα μετά την πλαστική κρούση.

Μονάδες 6

4.2. Τον χρόνο καθόδου του συσσωματώματος και την οριζόντια απόσταση που θα διανύσει το συσσωμάτωμα στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.3. Την εξίσωση τροχιάς του συσσωματώματος.

Μονάδες 6

4.4. Το ποσοστό % απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος βλήματος – σφαίρας, λόγω της πλαστικής κρούσης.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και θεωρήστε την αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{u}_0$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m u_0 = (m + M) V \Leftrightarrow V = \frac{m u_0}{m + M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 200 \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow V = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος h .

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$h = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Leftrightarrow t_{ολ}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{ολ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{10}} \text{ s} = \sqrt{16} \text{ s} \Rightarrow t_{ολ} = 4 \text{ s}.$$

Στον οριζόντιο άξονα x το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρον $u_x = V$.

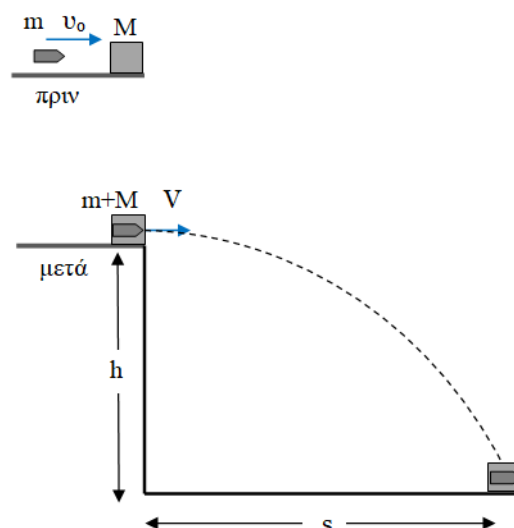
Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση : $s = V t_{ολ} = 5 \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow s = 20 \text{ m}.$

4.3

Γράφουμε την εξίσωση της μετατόπισης στον άξονα x και την επιλύουμε ως προς t :

$$x = Vt \Leftrightarrow t = \frac{x}{V}. \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε τον χρόνο t από τη σχέση (1) στην εξίσωση της μετατόπισης y , οπότε προκύπτει η εξίσωση της τροχιάς :



$$y = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{(1)} y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V^2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{x^2}{5^2} \Rightarrow y = 0,2x^2.$$

4.4

Πριν την κρούση το σύστημα έχει κινητική ενέργεια : $K_{\sigma(\piριν)} = \frac{1}{2}mv_0^2$. (2)

Αμέσως μετά την κρούση το σύστημα έχει κινητική ενέργεια : $K_{\sigma(\μετά)} = \frac{1}{2}(m+M)V^2$. (3)

Το ποσοστό ελάττωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{K_{\sigma(\piριν)} - K_{\sigma(\μετά)}}{K_{\sigma(\piριν)}} \cdot 100(\%) = \left(1 - \frac{K_{\sigma(\μετά)}}{K_{\sigma(\piριν)}}\right) \cdot 100(\%) \xrightarrow{(2),(3)} \Pi(\%) = \left(1 - \frac{(m+M)V^2}{mv_0^2}\right) \cdot 100(\%).$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \Pi(\%) = \left(1 - \frac{2 \cdot 5^2}{5 \cdot 10^{-2} \cdot (2 \cdot 10^2)^2}\right) \cdot 100(\%) \Rightarrow \Pi(\%) = 97,5\%.$$

Σχόλιο : Στο ερώτημα 4.2 έπρεπε να ζητείται η οριζόντια απόσταση που θα διανύσει το συσσωμάτωμα **μέχρι να φτάσει στο έδαφος.**

39. (21396) Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 ίσου όγκου με μάζες $M = 6\text{ kg}$ και $m = 2\text{ kg}$ αντίστοιχα, ηρεμούν σε μικρή απόσταση μεταξύ τους πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μία τρίτη σφαίρα Σ_3 , ίσου όγκου με τις προηγούμενες και μάζας m , κινείται κατά μήκος της ευθείας που περνάει από τα κέντρα των άλλων δύο σφαιρών, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, με ταχύτητα $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Αρχικά η σφαίρα Σ_3 συγκρούεται με την Σ_2 και στην συνέχεια οι δύο μαζί συγκρούονται με την Σ_1 . Όλες οι κρούσεις μεταξύ των σφαιρών είναι πλαστικές.

4.1. Να βρείτε την ταχύτητα v που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα των σφαιρών Σ_3 και Σ_2 .

Μονάδες 6

4.2. Να βρείτε την ταχύτητα V που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα των σφαιρών Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 .

Μονάδες 6

4.3. Αν η διάρκεια της δεύτερης κρούσης είναι $\Delta t = 0,1\text{ s}$ να υπολογιστεί η μέση δύναμη που δέχτηκε η σφαίρα Σ_1 κατά την κρούση.

Μονάδες 6

4.4. Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Σ_3 , το οποίο μετατράπηκε σε θερμότητα εξαιτίας των δύο κρούσεων.

Μονάδες 7

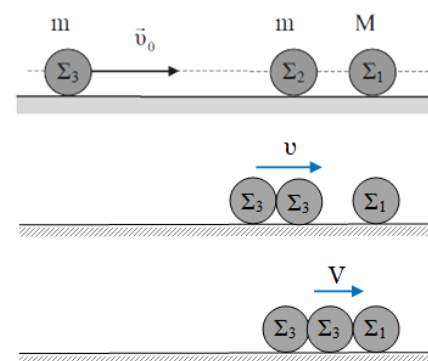
Απάντηση

4.1

Το σύστημα των σφαιρών είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια κάθε κρούσης.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_0$ της Σ_1 και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) για την 1η κρούση :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow mv_0 = 2mv \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{2} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) για την 2η κρούση :

$$p_{\text{ολ(πριν)}}' = p_{\text{ολ(μετά)}}' \Leftrightarrow 2mv = (2m + M)V \Leftrightarrow V = \frac{2mv}{2m + M} \Rightarrow V = \frac{4 \cdot 10 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow V = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Η μεταβολή της ορμής της Σ_1 κατά τη διάρκεια της 2ης κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_1 = p_{1(\text{μετά})} - p_{1(\text{πριν})} = MV \Rightarrow \Delta p_1 = (6\text{ Kg}) \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \Rightarrow \Delta p_1 = 24 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση δύναμη που δέχθηκε η Σ_1 κατά τη διάρκεια της κρούσης

$$\text{είναι (αλγεβρικά) : } \bar{F}_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{24 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1\text{ s}} \Rightarrow \bar{F}_1 = 240 \text{ N}.$$

Άρα, η δύναμη έχει μέτρο (μέση τιμή) $|\bar{F}_1| = 240 \text{ N}$ και φορά προς τα δεξιά.

4.4

Η αρχική κινητική ενέργεια της Σ_3 είναι : $K_3 = \frac{1}{2} m v_3^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2 \text{ J} \Rightarrow K_3 = 400 \text{ J}.$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά τη 2η κρούση είναι :

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} (2m + M) V^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4^2 \text{ J} \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 80 \text{ J}.$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της Σ_3 που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά τη διάρκεια των δύο κρούσεων είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{K_3 - K_{\text{τελ}}}{K_3} \cdot 100(\%) = \frac{400 - 80}{400} \cdot 100(\%) \Rightarrow \Pi(\%) = 80\%.$$

Σχόλιο : Η διατύπωση «το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Σ_3 , το οποίο μετατράπηκε σε θερμότητα» δεν είναι ακριβής.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της Σ_3 που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια».

40. (21603) Ένα τρενάκι αποτελείται από δύο μικρά βαγόνια και μπορεί να κινείται σε κυκλικές ράγες ακτίνας $r = \frac{2}{\pi} \text{ m}$ εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο περιστροφής $T = 2 \text{ sec}$.

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας περιστροφής του τρένου.

Μονάδες 6

Κάποια χρονική στιγμή το τρένο υφίσταται μια μικρή έκρηξη και τα δύο βαγόνια αποχωρίζονται μεταξύ τους, ενώ συνεχίζουν να κινούνται στις κυκλικές ράγες. Η μάζα και των δύο μαζί είναι $m = 3 \text{ kg}$ ενώ η μάζα του μπροστινού βαγονιού είναι $m_1 = 1 \text{ kg}$. Το μπροστινό βαγόνι μετά την έκρηξη κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ στην ίδια κατεύθυνση με την αρχική κατεύθυνση κίνησης του τρένου.

4.2. Να υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας v_2 του άλλου βαγονιού.

Μονάδες 6

4.3. Να βρείτε το ποσό της ενέργειας Q που ελευθερώνεται κατά την έκρηξη.

Μονάδες 6

4.4. Πόση γωνία θα έχει διαγράψει το κάθε βαγόνι μέχρι να συναντηθούν για πρώτη φορά, μετά την έκρηξη; Οι ταχύτητες μετά την έκρηξη έως και την πρώτη συνάντηση έχουν σταθερό μέτρο.

Μονάδες 7

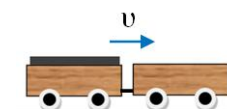
Στην επίλυση του προβλήματος θεωρούμε τα βαγόνια ως υλικά σημεία.

Απάντηση

4.1

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{\pi} \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



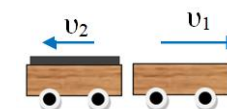
4.2

Αφού η χρονική διάρκεια της έκρηξης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχτούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ(μετά)}} = p_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = mv \Leftrightarrow m_2 v_2 = mv - m_1 v_1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{mv - m_1 v_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 12 \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow v_2 = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Επομένως, το 2ο βαγόνι αμέσως μετά τη διάσπαση κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση (στιγμιαία) με ταχύτητα μέτρου $|v_2| = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.3

Πριν τη διάσπαση το σύστημα έχει κινητική ενέργεια : $K_{\sigma(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 3 \cdot 2^2 \text{ J} = 6 \text{ J}.$

Αμέσως μετά τη διάσπαση το σύστημα έχει κινητική ενέργεια :

$$K_{\sigma(\text{μετά})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 \right) \text{ J} = 81 \text{ J}.$$

Η αύξηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της διάσπασης είναι :

$$\Delta K_{\sigma} = K_{\sigma(\text{μετά})} - K_{\sigma(\text{πριν})} = 81 \text{ J} - 6 \text{ J} \Rightarrow \Delta K_{\sigma} = 75 \text{ J}.$$

4.4

Μετά τη διάσπαση τα δύο βαγόνια εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση προς αντίθετες φορές, μέχρι να συναντηθούν μετά από χρόνο t .

1ο βαγόνι

Σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα $s_1 = v_1 t$. (1)

2ο βαγόνι

Σε χρόνο t θα διανύσει διάστημα : $s_2 = |v_2|t$. (2)

Τη στιγμή που συναντώνται έχουν καλύψει και τα δύο μαζί ένα πλήρη κύκλο, άρα ισχύει :

$$s_1 + s_2 = 2\pi r \xrightarrow{(1),(2)} v_1 t + |v_2|t = 2\pi r \Leftrightarrow t(v_1 + |v_2|) = 2\pi r \Leftrightarrow t = \frac{2\pi r}{v_1 + |v_2|} \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{12+3}}{\pi} s \Rightarrow t = \frac{4}{15} s.$$

$$(1) \Rightarrow s_1 = 12 \cdot \frac{4}{15} m = 3,2 m.$$

$$(2) \Rightarrow s_2 = 3 \cdot \frac{4}{15} m = 0,8 m.$$

Στον ίδιο χρόνο οι επιβατικές ακτίνες έχουν διαγράψει γωνίες :

$$\theta_1 = \frac{s_1}{r} = \frac{3,2}{\frac{2}{\pi}} \text{ rad} \Rightarrow \theta_1 = 1,6\pi \text{ rad}.$$

$$\theta_2 = \frac{s_2}{r} = \frac{0,8}{\frac{2}{\pi}} \text{ rad} \Rightarrow \theta_2 = 0,4\pi \text{ rad}.$$

Εναλλακτική λύση

Οι γωνιακές ταχύτητες των βαγονιών έχουν μέτρα :

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{12}{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{rad}}{s} \Rightarrow \omega_1 = 6\pi \frac{\text{rad}}{s},$$

$$\omega_2 = \frac{|v_2|}{r} = \frac{3}{\frac{2}{\pi}} \frac{\text{rad}}{s} \Rightarrow \omega_2 = 1,5\pi \frac{\text{rad}}{s}.$$

Για τις επίκεντρες γωνίες που διαγράφουν οι επιβατικές ακτίνες σε χρόνο t ισχύουν οι σχέσεις :

$$\theta_1 = \omega_1 t \quad (3)$$

$$\theta_2 = \omega_2 t \quad (4)$$

Τη στιγμή που συναντώνται ισχύει :

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\pi \xrightarrow{(3),(4)} \omega_1 t + \omega_2 t = 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{6\pi + 1,5\pi} s \Rightarrow t = \frac{4}{15} s.$$

$$(3) \Rightarrow \theta_1 = 6\pi \cdot \frac{4}{15} \text{rad} \Rightarrow \theta_1 = 1,6\pi \text{rad},$$

$$(4) \Rightarrow \theta_2 = 1,5\pi \cdot \frac{4}{15} \text{rad} \Rightarrow \theta_2 = 0,4\pi \text{rad}.$$

Σχόλια :

1) Η διατύπωση του ερωτήματος 4.3 είναι λανθασμένη.

Η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη διάρκεια της έκρηξης δεν μπορεί να υπολογιστεί.

Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά **την αύξηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της έκρηξης.**

Η ζητούμενη ενέργεια είναι κινητική ενέργεια και δεν συμβολίζεται με Q.

2) Η διατύπωση του ερωτήματος 4.4 «πόση γωνία θα έχει διαγράψει το κάθε βαγόνι» είναι λανθασμένη.

Η σωστή διατύπωση είναι : «πόση γωνία θα έχει διαγράψει **η επιβατική ακτίνα** κάθε βαγονιού».

41. (21695) Ένα μεγάλο ψάρι μάζας 8 kg κινείται με ταχύτητα $0,6\text{ m/s}$ και καταδιώκει μικρό ψάρι μάζας 2 kg το οποίο κινείται με ταχύτητα $0,1\text{ m/s}$ στην ίδια ευθεία με το μεγάλο ψάρι. Κάποια στιγμή, το μεγάλο ψάρι φτάνει το μικρό ψάρι και το καταπίνει, χωρίς να αλλάξει κατεύθυνση κίνησης.

Η διαδικασία της κατάποσης διήρκεσε 2 s .

4.1. Υπολογίστε την ταχύτητα του μεγάλου ψαριού αμέσως αφού καταπίνει το μικρό ψάρι. Να αναφέρετε όποια υπόθεση κάνατε για να φτάσετε στη λύση.

Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε την απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο ψαριών εξαιτίας της κατάποσης του μικρού ψαριού από το μεγάλο ψάρι.

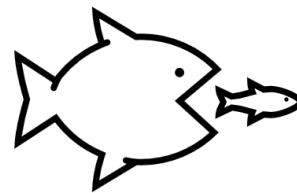
Μονάδες 7

4.3. Υπολογίστε, σε μέτρο και κατεύθυνση, τη μεταβολή της ορμής του μικρού ψαριού ως αποτέλεσμα της κατάποσης.

Μονάδες 6

4.4. Υπολογίστε τη **συνισταμένη** δύναμη που ασκήθηκε στο μεγάλο ψάρι στη διάρκεια της κατάποσης του μικρού ψαριού.

Μονάδες 6



Σχόλια :

1) Στα δύο ψάρια ασκείται (στη διεύθυνση κίνησης) η αντίσταση $\vec{F}_a$ από το νερό.

Για να θεωρηθεί μονωμένο το σύστημα πρέπει η χρονική διάρκεια του φαινομένου να είναι πολύ μικρή και οι εσωτερικές δυνάμεις να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις εξωτερικές.

Όμως η χρονική διάρκεια του φαινομένου είναι σημαντική ($\Delta t = 2\text{ s}$) και οι εσωτερικές δυνάμεις έχουν μικρή τιμή ($\vec{F}_{21} = 0,4\text{ N}$), άρα **το σύστημα δεν μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο με αποτέλεσμα να μην ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.**

2) Στο ερώτημα 4.4 ζητείται η συνισταμένη δύναμη που ασκήθηκε στο μεγάλο ψάρι από το μικρό, ενώ έπρεπε να ζητηθεί **η μέση δύναμη που ασκήθηκε στο μεγάλο ψάρι από το μικρό στη διεύθυνση της κίνησης.**

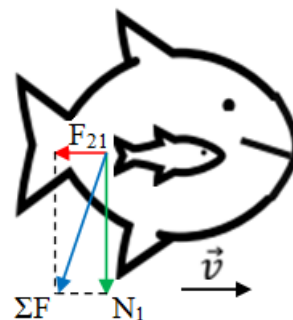
Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}_{2,1} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}$, το μεγάλο ψάρι δέχεται από το μικρό

μία κατακόρυφη δύναμη $\vec{N}_1$ (ίση με το βάρος του μικρού ψαριού).

Η συνισταμένη δύναμη είναι : $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{2,1} + \vec{N}_1$.

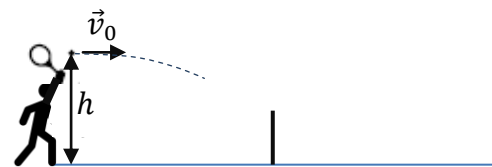
Τη δύναμη $\vec{N}_1$ δεν την λαμβάνει υπ' όψη ο συγγραφέας στην απάντησή του.

Συμπέρασμα : **Η άσκηση είναι ακατάλληλη για θέμα εξετάσεων.**



42. (21698) Τενίστας χτυπάει με τη ρακέτα του μπαλάκι, δίνοντάς του οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20 \text{ m/s}$, ενώ αυτό βρίσκεται σε ύψος $h = 2,45 \text{ m}$.

4.1. Υπολογίστε τον χρόνο που θα χρειαστεί το μπαλάκι για να φτάσει στο έδαφος (υποθέτοντας πως δεν θα συναντήσει κανένα εμπόδιο κατά την κίνησή του).



Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε το βεληνεκές και το μέτρο της ταχύτητας με την οποία θα φτάσει το μπαλάκι στο έδαφος (υποθέτοντας πάλι πως δεν θα συναντήσει κανένα εμπόδιο κατά την κίνησή του).

Μονάδες 7

4.3. Το μπαλάκι έχει μάζα 60 g . Η ρακέτα ασκεί οριζόντια δύναμη 240 N στο μπαλάκι ώστε αυτό να ξεκινήσει να κινείται με την οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Υποθέτοντας πως τη στιγμή που η ρακέτα χτυπάει το μπαλάκι αυτό είναι ακίνητο, υπολογίστε τη διάρκεια της επαφής μεταξύ αυτού και της ρακέτας.

Μονάδες 6

4.4. Το φιλέ βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση 12 m από το σημείο στο οποίο η ρακέτα χτύπησε το μπαλάκι. Το φιλέ έχει ύψος $0,912 \text{ m}$. Βρείτε αν το μπαλάκι θα περάσει πάνω από το φιλέ ή θα χτυπήσει σε αυτό.

Μονάδες 6



Υπενθυμίζεται η προσεγγιστική τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, ενώ $\sqrt{449} \cong 21$.

Απάντηση

4.1

Μετά την επαφή με τη ρακέτα, το μπαλάκι εκτελεί οριζόντια βολή.

Στον άξονα y η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος h .

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$$

$$t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,45}{10}} \text{ s} = \sqrt{0,49} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 0,7 \text{ s}.$$

4.2

Στον οριζόντιο άξονα x το μπαλάκι εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα μέτρου $v_x = v_0$.

Μέχρι τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχει διανύσει οριζόντια απόσταση :

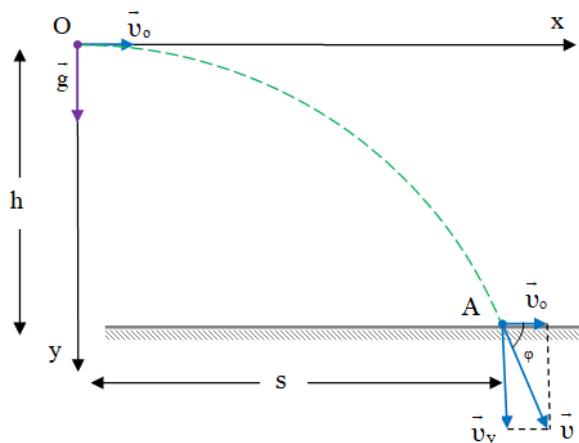
$$s = v_0 t_{\text{ολ}} = 20 \cdot 0,7 \text{ m} \Rightarrow s = 14 \text{ m}.$$

Τη στιγμή που φτάνει το μπαλάκι στο έδαφος, η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο :

$$v_y = g t_{\text{ολ}} = 10 \cdot 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_y = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνει στο έδαφος είναι :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{20^2 + 7^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{449} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v \cong 21 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

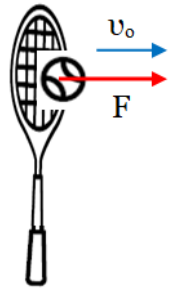


4.3

Κατά τη διάρκεια της επαφής με τη ρακέτα, το μπαλάκι δέχεται στην οριζόντια διεύθυνση μόνο τη δύναμη $\vec{F}$ από τη ρακέτα.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για το μπαλάκι (αλγεβρικά) :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow F = \frac{mv_o}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{mv_o}{F} \Rightarrow \Delta t = \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{240} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$



4.4

Μέχρι να φτάσει στο φιλέ, το μπαλάκι θα διανύσει οριζόντια απόσταση $d = 12 \text{ m}$, άρα χρειάζεται χρόνο

$$t_1 = \frac{d}{v_o} = \frac{12}{20} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 0,6 \text{ s}.$$

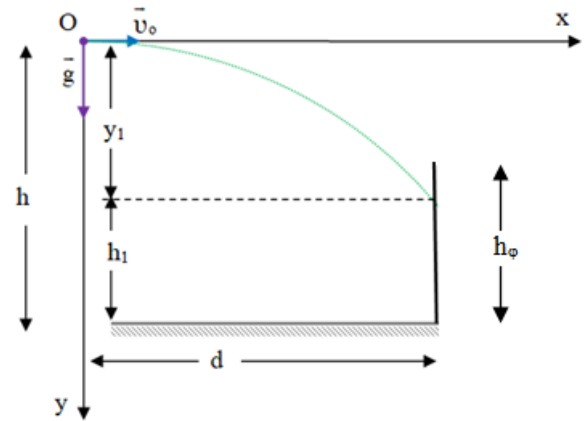
Στο χρόνο αυτό έχει κατέβει κατακόρυφα κατά

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,6^2 \text{ m} \Rightarrow y_1 = 1,8 \text{ m}.$$

Εκείνη τη στιγμή βρίσκεται σε ύψος

$$h_1 = h - y_1 = 2,45 \text{ m} - 1,8 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 0,65 \text{ m}.$$

Αφού $h_1 < h_\phi = 0,912 \text{ m}$, άρα το μπαλάκι θα χτυπήσει στο φιλέ.



Σχόλια

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπ' όψη.
- 2) Η δύναμη που ασκεί η ρακέτα στο μπαλάκι **δεν είναι σταθερή**.

Η εκφώνηση έπρεπε να δίνει το μέτρο της **μέσης δύναμης** $\vec{F}$ που ασκήθηκε από τη ρακέτα στο μπαλάκι.

43. (21887) Σώμα μάζας $M = 4 \text{ kg}$ είναι δεμένο στην άκρη νήματος μήκους $L = 1 \text{ m}$ και ισορροπεί με το νήμα να είναι κατακόρυφο. Ανυψώνουμε το σώμα, σε κατακόρυφη απόσταση $H = 45 \text{ cm}$ από την αρχική του θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα, και το αφήνουμε ελεύθερο.

4.1. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που θα αποκτήσει το σώμα μάζας M , όταν περνά από τη θέση, όπου το νήμα ξαναγίνεται κατακόρυφο.

Μονάδες 5

4.2. Τη στιγμή που το σώμα μάζας M διέρχεται από τη θέση, όπου το νήμα είναι κατακόρυφο, δεύτερο σώμα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ κινούμενο οριζόντια και αντίθετα από το σώμα μάζας M σφηνώνεται σε αυτό, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί συσσωμάτωμα. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του σώματος μάζας m , ώστε το συσσωμάτωμα να παραμείνει ακίνητο αμέσως μετά την κρούση;

Μονάδες 5

4.3. Να υπολογίσετε τη μεταβολή του μέτρου της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα μάζας M και στο συσσωμάτωμα αντίστοιχα, ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση αντίστοιχα (το νήμα και στις δύο περιπτώσεις είναι κατακόρυφο).

Μονάδες 7

4.4. Με ποια ταχύτητα θα πρέπει να κινείται το σώμα μάζας m πριν από την κρούση, ώστε το συσσωμάτωμα που θα προκύψει, να κινηθεί αμέσως μετά την κρούση, στην ίδια κατεύθυνση με αυτή που κινούταν το σώμα μάζας M πριν την κρούση και να φθάσει σε θέση που το νήμα να σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία θ , για την οποία $\sin\theta = 0,8$;

Μονάδες 8

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος παράγει έργο μόνο η βαρυτική δύναμη (η τάση του νήματος δεν παράγει έργο γιατί είναι συνεχώς κάθετη στις στοιχειώδεις μετατοπίσεις).

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση Α μέχρι την κατώτερη θέση Γ :

$$K_{\Gamma} - K_A = W_B \Leftrightarrow \frac{1}{2}MV^2 - 0 = MgH \Leftrightarrow V^2 = 2gH \Leftrightarrow$$

$$V = \sqrt{2gH} \Rightarrow V = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

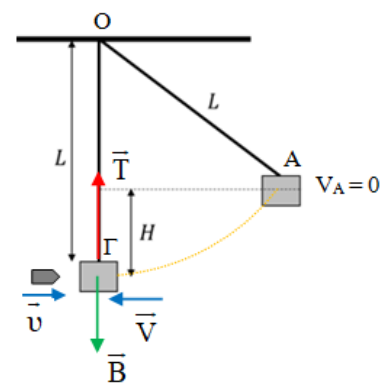
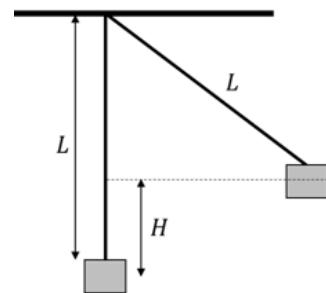
Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv - MV = 0 \Leftrightarrow mv = MV \Leftrightarrow v = \frac{MV}{m} \Rightarrow v = \frac{4 \cdot 3 \text{ m}}{0,5 \text{ s}} \Rightarrow v = 24 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Κατά τη διαδρομή $A \rightarrow \Gamma$ το σώμα κινείται σε κυκλικό τόξο ακτίνας L . Τη στιγμή που διέρχεται από το Γ η συνισταμένη είναι η κεντρομόλος δύναμη, άρα :



$$\Sigma F = m\alpha_{\kappa} \Leftrightarrow T - B = M \frac{V^2}{L} \Leftrightarrow T = M \left(g + \frac{V^2}{L} \right) \Rightarrow T = 4 \cdot \left(10 + \frac{3^2}{1} \right) \text{N} \Rightarrow T = 76 \text{N}.$$

Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα είναι ακίνητο, άρα ισχύει :

$$\Sigma F' = 0 \Leftrightarrow T' - B_{ολ} = 0 \Leftrightarrow T' = (m + M)g \Rightarrow T' = 45 \text{N}.$$

Ισχύει :

$$\Delta T = T' - T = 45 \text{N} - 76 \text{N} \Rightarrow \Delta T = -31 \text{N},$$

δηλαδή το μέτρο της τάσης του νήματος ελαττώθηκε κατά 31 N.

4.4

Έστω $\vec{V}'$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση, στην περίπτωση που το βλήμα έχει ταχύτητα $\vec{v}'$ πριν την κρούση.

Κατά τη διαδρομή από τη θέση Γ (αμέσως μετά την κρούση) μέχρι τη θέση Ε στην οποία μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του συσσωματώματος, το συσσωμάτωμα ανέρχεται κατακόρυφα κατά

$$H' = (OG) - (OZ) = L - L \sin \theta = L(1 - \sin \theta) \Rightarrow H' = 0,2 \text{m}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη θέση Γ (αμέσως μετά την κρούση) μέχρι τη θέση Ε :

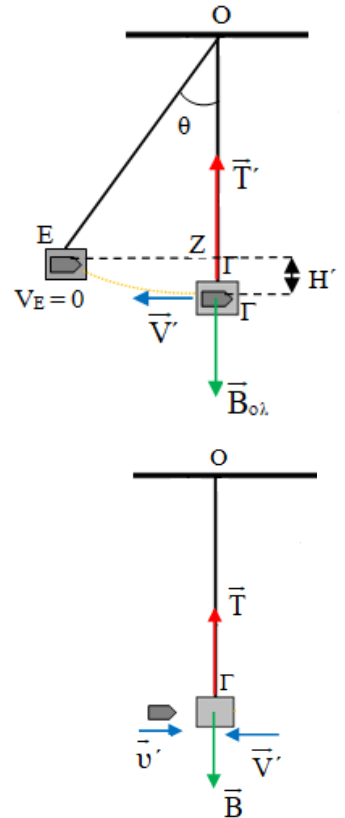
$$K_E - K_{\Gamma'} = W_B' \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}(m + M)V'^2 = -(m + M)gH' \Leftrightarrow V'^2 = 2gH' \Leftrightarrow$$

$$V' = \sqrt{2gH'} \Rightarrow V' = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V' = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv' - MV = -(m + M)V' \Leftrightarrow mv' = MV - (m + M)V' \Leftrightarrow$$

$$v' = \frac{MV - (m + M)V'}{m} \Rightarrow v' = \frac{4 \cdot 3 - 4,5 \cdot 2}{0,5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v' = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



44. (21888) Επάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η κάτοψη του οποίου φαίνεται στο σχήμα, υπάρχει ακλόνητα στερεωμένο ένα σιδερένιο έλασμα, ημικυκλικού σχήματος και ακτίνας $R = 20 \text{ cm}$. Στο ένα άκρο του ελάσματος (σημείο A) είναι τοποθετημένο, ακίνητο σώμα μάζας $M = 1 \text{ kg}$. Ένα δεύτερο σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα $v = 20 \text{ m/s}$, κατά τη διεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα και συγκρούεται με το σώμα μάζας M . Η κρούση είναι πλαστική. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την κρούση κινείται κυκλικά, λόγω του ελάσματος, χωρίς να χάνει την επαφή του με αυτό, με ταχύτητα σταθερού μέτρου.

Να υπολογίσετε:

4.1. Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 7

4.2. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το συσσωμάτωμα από το έλασμα κατά τη διάρκεια της κυκλικής του κίνησης.

Μονάδες 7

4.3. Την χρονική διάρκεια της κίνησης του συσσωματώματος από το σημείο A μέχρι το σημείο B .

Μονάδες 6

4.4. Στο σημείο B το συσσωμάτωμα προσκρούει σε ακλόνητο στήριγμα και το χρονικό διάστημα για να ακινητοποιηθεί είναι $\Delta t = 0,1 \text{ sec}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέσης δύναμης που ασκήθηκε από το ακλόνητο στήριγμα στο συσσωμάτωμα.

Μονάδες 5

Απάντηση

4,1

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ}(πριν)} = p_{\text{ολ}(μετά)} \Leftrightarrow mv = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{1 \cdot 20 \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow V = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Η μοναδική δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα στην οριζόντια διεύθυνση είναι η δύναμη $\vec{F}_\varepsilon$ από το έλασμα, η οποία έχει τη διεύθυνση της ακτίνας με φορά προς το κέντρο του ελάσματος άρα είναι η κεντρομόλος δύναμη :

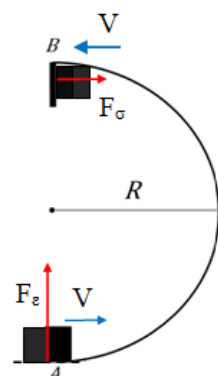
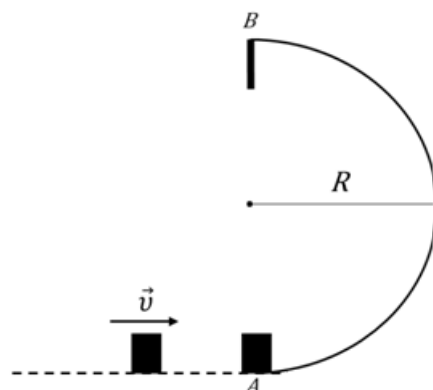
$$\Sigma F = m a_{\kappa} \Leftrightarrow F_{\varepsilon} = (m+M) \frac{V^2}{R} \Rightarrow F_{\varepsilon} = 2 \cdot \frac{10^2}{0,2} \text{ N} \Rightarrow F_{\varepsilon} = 1000 \text{ N}.$$

4.3

Η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι : $T = \frac{2\pi R}{V}$. (1)

Στη διάρκεια της κίνησης από το A στο B το συσσωμάτωμα διαγράφει ημικύκλιο, άρα η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι :

$$\Delta t = \frac{T}{2} \xrightarrow{(1)} \Delta t = \frac{\frac{2\pi R}{V}}{2} = \frac{\pi R}{V} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi \cdot 0,2}{10} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{50} \text{ s}.$$



4.4

Η μεταβολή της ορμής του συσσωματώματος κατά τη διάρκεια της κρούσης με το στήριγμα είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_{\sigma} = p_{\sigma(\text{μετά})} - p_{\sigma(\text{πριν})} = 0 - [-(m+M)V] = (m+M)V \Rightarrow \Delta p_{\sigma} = 20 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση δύναμη που δέχθηκε το συσσωμάτωμα από το στήριγμα είναι (αλγεβρικά) :

$$\bar{F}_{\sigma} = \frac{\Delta p_{\sigma}}{\Delta t} = \frac{20}{0,1} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_{\sigma} = 200 \text{ N}.$$

Η δύναμη αυτή έχει φορά προς τα δεξιά και μέτρο (μέση τιμή) $|\bar{F}_{\sigma}| = 200 \text{ N}$.

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι δεν υπάρχει τριβή ανάμεσα στο έλασμα και το συσσωμάτωμα.

45. (21889) Βλήμα μάζας $m_1 = 100 \text{ g}$ κινείται με ταχύτητα μέτρου, $v = 160 \text{ m/s}$ και σφηνώνεται σε ξύλινο κιβώτιο μάζας $m_2 = 1,9 \text{ kg}$, που βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα σφηνώνεται στο κιβώτιο σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 0,02 \text{ s}$.

Να υπολογίσετε:

4.1. Την τιμή της τελικής ταχύτητας του συσσωματώματος.

Μονάδες 5

4.2. Τη μείωση της κινητικής ενέργειας του βλήματος κατά τη διάρκεια της πλαστικής κρούσης.

Μονάδες 6

4.3. Τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ορμή του κιβωτίου κατά τη διάρκεια της ενσφήνωσης του βλήματος στο κιβώτιο, εάν θεωρηθεί ότι είναι σταθερός σε όλη τη διάρκεια της ενσφήνωσης.

Μονάδες 6

Λίγο μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εισέρχεται σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο και αφού κινηθεί για κάποιο χρονικό διάστημα επάνω σ' αυτό, ακινητοποιείται.

4.4. Να υπολογίσετε:

α. Το χρονικό διάστημα, από τη στιγμή της εισόδου του συσσωματώματος στο μη λείο επίπεδο, μέχρις ότου αυτό να ακινητοποιηθεί.

β. Την απόσταση που θα διανύσει το συσσωμάτωμα στο μη λείο επίπεδο.

Μονάδες 8

Δίνονται:

Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και ο συντελεστής της τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και μη λείου επιπέδου $\mu = 0,2$.

Απάντηση

4.1

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}$ του βλήματος και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m_1 v = (m_1 + m_2) V \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$V = \frac{0,1 \cdot 160 \text{ m}}{2} \frac{1}{s} \Rightarrow V = 8 \frac{\text{m}}{s}.$$

4.2

Η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση είναι :

$$K_{β(πριν)} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 160^2 \text{ J} \Rightarrow K_{β(πριν)} = 1280 \text{ J}.$$

Η κινητική ενέργεια του βλήματος αμέσως μετά την κρούση είναι :

$$K_{β(μετά)} = \frac{1}{2} m_1 V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 8^2 \text{ J} \Rightarrow K_{β(μετά)} = 3,2 \text{ J}.$$

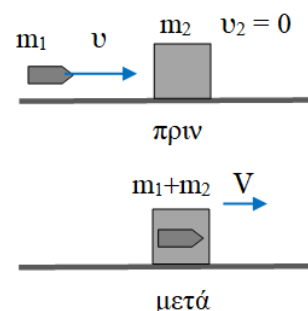
Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του βλήματος λόγω της κρούσης είναι :

$$|\Delta K_{β}| = K_{β(πριν)} - K_{β(μετά)} = 1280 \text{ J} - 3,2 \text{ J} \Rightarrow |\Delta K_{β}| = 1276,8 \text{ J}.$$

4.3.

Η μεταβολή της ορμής του κιβωτίου στη διάρκεια της εισόδου του βλήματος είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_{κ} = p_{κ(μετά)} - p_{κ(πριν)} = m_2 V \Rightarrow \Delta p_{κ} = 1,9 \cdot 8 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{s} = 15,2 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{s}.$$



Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, η μέση οριζόντια δύναμη που ασκήθηκε από το βλήμα στο κιβώτιο στη διάρκεια της εισόδου, είναι :

$$\bar{F}_κ = \frac{\Delta p_κ}{\Delta t} = \frac{15,2}{2 \cdot 10^{-2}} \text{ N} \Rightarrow \bar{F}_κ = 760 \text{ N}.$$

Άρα, η δύναμη έχει μέτρο (μέση τιμή) $|\bar{F}_κ| = 760 \text{ N}$ και φορά προς τα δεξιά.

4.4.

α.

Στο μη λείο επίπεδο το συσσωμάτωμα επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής ολίσθησης, μέχρι να σταματήσει.

Στον άξονα y ισχύει :

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = (m_1 + m_2)g. \quad (1)$$

Από το νόμο της τριβής προκύπτει :

$$T = \mu N \xrightarrow{(1)} T = \mu(m_1 + m_2)g. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = (m_1 + m_2)\alpha \Leftrightarrow -T = (m_1 + m_2)\alpha \xrightarrow{(2)} -\mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\alpha \Leftrightarrow \alpha = -\mu g \Rightarrow \alpha = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

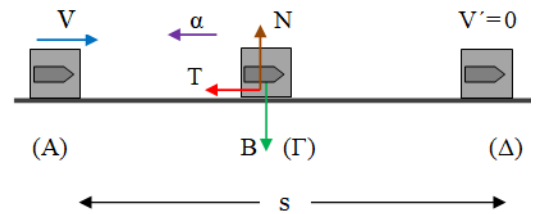
Το συσσωμάτωμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση και σταματά μετά από χρονική διάρκεια Δt . Ισχύει :

$$V' = V + \alpha(\Delta t) \xrightarrow{V'=0} 0 = 8 - 2(\Delta t) \Rightarrow 2(\Delta t) = 8 \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}.$$

β.

Το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα στο μη λείο δάπεδο, μέχρι να σταματήσει, είναι :

$$s = V(\Delta t) + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 = \left(8 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2\right) \text{ m} \Rightarrow s = 16 \text{ m}.$$



46. (21971) Μια μικρή σφαίρα (2), μάζας m_2 , είναι ακίνητη στο άκρο της ταράτσας ενός ψηλού κτιρίου (σημείο Α), σε ύψος $h = 20 \text{ m}$ από το οριζόντιο έδαφος. Δεύτερη μικρή σφαίρα (1), μάζας m_1 , κινείται ευθύγραμμα ολισθαίνοντας στο παγωμένο δάπεδο της ταράτσας, το οποίο είναι εντελώς λείο, με ταχύτητα $\vec{v}_1$, μέτρου $v_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και συγκρούεται μετωπικά με την ακίνητη σφαίρα (2).

Μετά τη σύγκρουση η σφαίρα (2) εκτελεί οριζόντια βολή και χτυπάει στο έδαφος σε σημείο Γ, το οποίο απέχει από το Α απόσταση $(A\Gamma) = d = 25 \text{ m}$.

Αν δίνεται ότι για τις μάζες των δύο σφαιρών ισχύει η σχέση $m_2 = 2 \cdot m_1$ και το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας δίνεται $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, να υπολογίσετε:

4.1. Τη χρονική διάρκεια της οριζόντιας βολής της σφαίρας (2), από το σημείο Α μέχρι να κτυπήσει στο έδαφος, στο σημείο Γ.

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας $\vec{v}_2'$ που απέκτησε η σφαίρα (2) αμέσως μετά τη κρούση της σφαίρας (1) πάνω της.

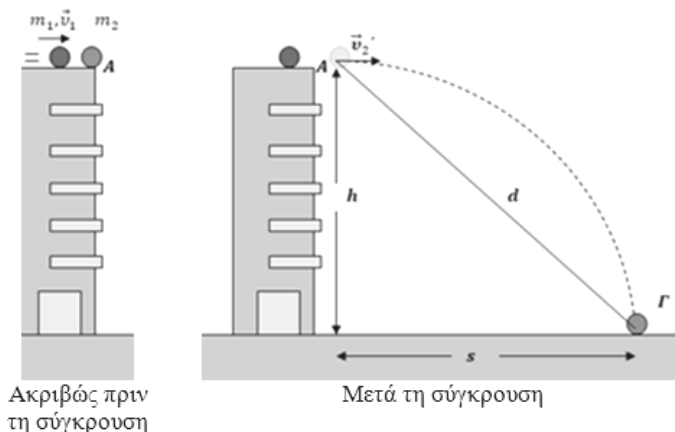
Μονάδες 7

4.3. Την ταχύτητα της σφαίρας (1) αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 6

4.4. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που είχε η σφαίρα (1) πριν την κρούση, το οποίο μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά την κρούση των δύο σφαιρών.

Μονάδες 6



Απάντηση

4.1

Στον άξονα y η Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \text{ s} = \sqrt{4} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 2 \text{ s}.$$

4.2

Στον οριζόντιο άξονα x η Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_x = v_2'$.

Η οριζόντια απόσταση s (βεληνεκές) που διανύει η Σ_2 μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι :

$$s = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} \text{ m} = \sqrt{225} \text{ m} \Rightarrow s = 15 \text{ m}.$$

Από την εξίσωση της μετατόπισης στον άξονα x, για $x = s$ και $t = t_{\text{ολ}}$ προκύπτει : $s = v_2' t_{\text{ολ}}$.

Επομένως :

$$v_2' = \frac{s}{t_{\text{ολ}}} = \frac{15 \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow v_2' = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Υποθέτουμε ότι οι σφαίρες πριν και μετά την κρούση κινούνται στην ίδια ευθεία.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ (αλγεβρικά) :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \xrightarrow{m_2 = 2m_1} m_1 v_1 = m_1 v_1' + 2m_1 v_2' \Leftrightarrow v_1 = v_1' + 2v_2' \Leftrightarrow$$

$$v_1' = v_1 - 2v_2' \Rightarrow v_1' = (15 - 2 \cdot 7,5) \frac{m}{s} \Rightarrow v_1' = 0.$$

4.4

Η αρχική κινητική ενέργεια της Σ_1 είναι : $K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος μετά την κρούση είναι : $K_{\sigma(μετά)} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$.

Η θερμική ενέργεια που μεταφέρθηκε στο περιβάλλον είναι ίση με την ελάττωση της κινητικής ενέργειας

του συστήματος λόγω της κρούσης : $Q = |\Delta K_{\sigma}| = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 - m_2 v_2'^2)$.

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της Σ_1 που μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{|\Delta K_{\sigma}|}{K_1} \cdot 100(\%) = \frac{m_1 v_1^2 - m_2 v_2'^2}{m_1 v_1^2} \cdot 100(\%) = \left(1 - \frac{2m_1 v_2'^2}{m_1 v_1^2} \right) \cdot 100(\%) = \left(1 - \frac{2v_2'^2}{v_1^2} \right) \cdot 100(\%)$$

$$\Rightarrow \Pi(\%) = 50\%.$$

Σχόλια :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι

1) η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

2) οι ταχύτητες των σφαιρών πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση.

47. (21972) Ένα μικρό βλήμα, μάζας $m_1 = 50 \text{ g}$, το οποίο κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, συγκρούεται με ένα μικρό κιβώτιο, μάζας $m_2 = 200 \text{ g}$, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο στην άκρη της ταράτσας ενός ψηλού κτιρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το βλήμα διαπερνά το κιβώτιο, με μια κρούση ασήμαντης διάρκειας, βγαίνει από αυτό με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_1'$, ενώ το κιβώτιο έχει αποκτήσει και αυτό οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_2'$.

Τα δύο σώματα έχουν ασήμαντες διαστάσεις

σε σχέση με το χώρο στον οποίο κινούνται, ώστε να μπορούν να θεωρηθούν σημειακά αντικείμενα.

Το σημείο της κρούσης είναι σε ύψος $h = 20 \text{ m}$ από το οριζόντιο έδαφος στη βάση του κτιρίου και οι αντιστάσεις του αέρα μπορούν να αγνοηθούν στις κινήσεις των δύο σωμάτων.

Τα δύο σώματα εκτελούν οριζόντιες βολές και κτυπούν στο έδαφος σε σημεία που απέχουν μεταξύ τους $d = 8 \text{ m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας θεωρείται $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Να υπολογίσετε:

4.1. Τη χρονική διάρκεια της οριζόντιας βολής κάθε σώματος, από τη στιγμή της κρούσης, μέχρι να κτυπήσει στο έδαφος.

Μονάδες 6

4.2. Τα μέτρα των ταχυτήτων v_1', v_2' των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 7

4.3. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής κάθε σώματος εξαιτίας της κρούσης.

Μονάδες 6

4.4. Τις οριζόντιες αποστάσεις s_1, s_2 στις οποίες έφτασαν τα δύο σώματα πάνω στο έδαφος.

Μονάδες 6

Απάντηση

4.1

Μετά την κρούση, στον άξονα y κάθε σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h .

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 \Leftrightarrow t_{\text{ολ}}^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \text{ s} = \sqrt{4} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 2 \text{ s}.$$

4.2

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται. Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση. Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

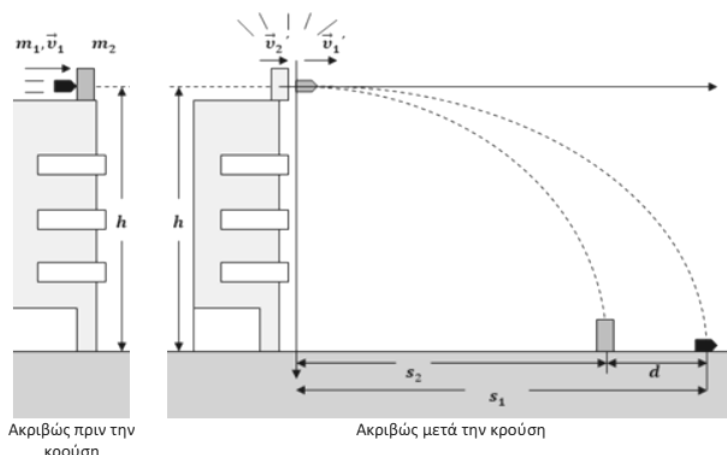
$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \xrightarrow{m_2 = 4m_1} m_1 v_1 = m_1 v_1' + 4m_1 v_2' \Leftrightarrow v_1 = v_1' + 4v_2' \Rightarrow v_1' + 4v_2' = 84 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (1)$$

Μετά την κρούση στον άξονα x κάθε σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Μέχρι τη στιγμή που φτάνουν στο έδαφος έχουν διανύσει οριζόντια αποστάσεις :

$$s_1 = v_1' t_{\text{ολ}} \quad (2)$$

$$s_2 = v_2' t_{\text{ολ}} \quad (3)$$



Ισχύει :

$$d = s_1 - s_2 \xrightarrow{(2),(3)} d = (v_1' - v_2')t_{\text{ολ}} \Rightarrow v_1' - v_2' = \frac{d}{t_{\text{ολ}}} \Rightarrow v_1' - v_2' = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει :

$$v_1' + 4v_2' - v_1' + v_2' = (84 - 4) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 5v_2' = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2' = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$(4) \Rightarrow v_1' = v_2' + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1' = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1(v_1' - v_1) \Rightarrow \Delta p_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Kg}(20 - 84) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -3,2 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\Delta p_2 = p_2' - p_2 = m_2 v_2' \Rightarrow \Delta p_2 = (2 \cdot 10^{-1} \text{ Kg}) \left(16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow \Delta p_2 = 3,2 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Τα μέτρα των μεταβολών των ορμών των σωμάτων είναι : $|\Delta p_1| = |\Delta p_2| = 3,2 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.4

$$(2) \Rightarrow s_1 = v_1' t_{\text{ολ}} = 20 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow s_1 = 40 \text{ m}.$$

$$(3) \Rightarrow s_2 = v_2' t_{\text{ολ}} = 16 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow s_2 = 32 \text{ m}.$$

48. (21992) Ένα σώμα, μάζας $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο άκρο νήματος του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο, εκτελεί κυκλική κίνηση πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι (κάτοψη του οποίου βλέπετε στο διπλανό σχήμα).

Το μήκος του νήματος είναι $l = 0,5 \text{ m}$ και η γραμμική ταχύτητα του σώματος έχει σταθερό μέτρο $v = 10 \text{ m/s}$.

4.1. Να βρεθούν η γωνιακή ταχύτητα ω , η περίοδος T και η κεντρομόλος επιτάχυνση a_k του σώματος.

Μονάδες 6

Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα κινείται ευθύγραμμα. Στην πορεία του συναντάει δεύτερο ακίνητο σώμα από πλαστελίνη μάζας $m_2 = 0,8 \text{ kg}$ και συγκρούεται με αυτό πλαστικά.

4.2. Να υπολογιστεί το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 το οποίο έχει μεταφερθεί στο συσσωμάτωμα.

Μονάδες 6

Το συσσωμάτωμα, φθάνει στην άκρη του τραπεζιού και εκτελεί οριζόντια βολή.

Η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του συσσωματώματος από το σημείο από το οποίο βάλλεται είναι $s = 0,8 \text{ m}$.

4.3. Να βρεθεί το ύψος του τραπεζιού.

Μονάδες 6

4.4. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι $v_s = \sqrt{2} \cdot V$, όπου V η ταχύτητα με την οποία εγκαταλείπει το τραπέζι το συσσωμάτωμα.

Μονάδες 7

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$. Αγνοήστε τριβές και την αντίσταση του αέρα.

Απάντηση

4.1

Το S_1 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R = l$.

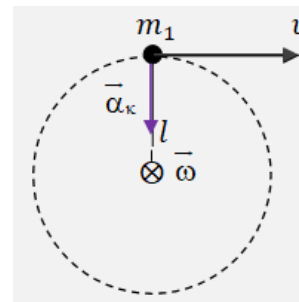
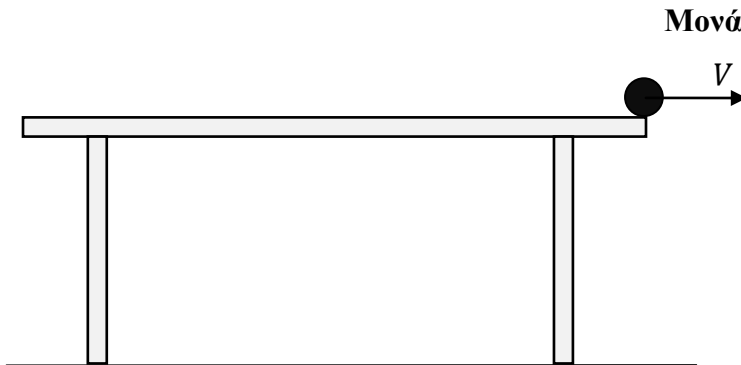
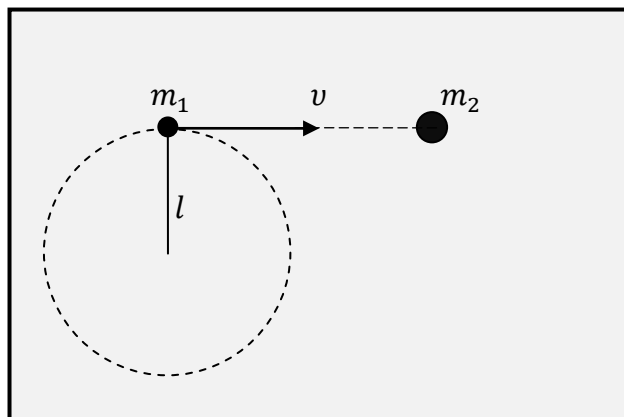
Από τη σχέση γραμμικής – γωνιακής ταχύτητας υπολογίζουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας :

$$v = \omega l \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{l} \Rightarrow \omega = \frac{10 \text{ rad}}{0,5 \text{ s}} \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού).

Για την περίοδο της κίνησης ισχύει :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{20} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{10} \text{ s}.$$



Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\alpha_k = \frac{v^2}{\ell} \Rightarrow \alpha_k = \frac{10^2}{0,5 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_k = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το διάνυσμα της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_k$ έχει τη διεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς (σε κάθε θέση του κινητού) και φορά προς το κέντρο της τροχιάς.

4.2

Αφού δεν υπάρχει τριβή, το σύστημα είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση (αλγεβρικά) :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow m_1 v = (m_1 + m_2) V \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \Rightarrow V = \frac{0,2 \cdot 10 \text{ m}}{1 \text{ s}} \Rightarrow V = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που παρέμεινε στο σύστημα είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{K_{\sigma(\text{μετά})}}{K_{\sigma(\text{πριν})}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2}{\frac{1}{2} m_1 v^2} \cdot 100\% = \frac{1 \cdot 2^2}{0,2 \cdot 10^2} \cdot 100\% = 20\%.$$

4.3

Αφού εγκαταλείψει το τραπέζι, το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h.

Στον οριζόντιο άξονα x η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα μέτρου $v_x = V$.

Από την εξίσωση της μετατόπισης υπολογίζουμε τον χρόνο κίνησης μέχρι να φτάσει στο έδαφος :

$$x = Vt \xrightarrow{x=s, t=t_{\text{ολ}}} s = Vt_{\text{ολ}} \Leftrightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{s}{V} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{0,8}{2} \text{ s} \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 0,4 \text{ s}.$$

Στον κατακόρυφο άξονα y το συσσωμάτωμα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2} g t_{\text{ολ}}^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,4^2 \text{ m} \Rightarrow h = 0,8 \text{ m}.$$

4.4

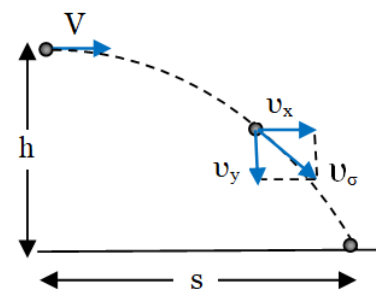
Για το μέτρο της (συνισταμένης) ταχύτητας $\vec{v}_\sigma$ τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει :

$$v_\sigma^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v_y^2 = v_\sigma^2 - v_x^2 \xrightarrow{v_\sigma = \sqrt{2}V, v_x = V} v_y^2 = 2V^2 - V^2$$

$$\Leftrightarrow v_y^2 = V^2 \Leftrightarrow v_y = V. \text{ (μέτρο)}$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας στον άξονα y υπολογίζουμε τον χρόνο t_1 :

$$v_y = g t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_y}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{2}{10} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 0,2 \text{ s}.$$



Σχόλιο : Στο ερώτημα 4.1 η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητείται μόνο το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ και της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_k$ ή ζητείται να καθοριστεί και η κατεύθυνσή τους.

Κεφάλαιο 5

Ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο

1. (15895)

Δύο υλικά σημεία, που έχουν ίσες μάζες και φέρουν ηλεκτρικά φορτία $q_1 = +1 \mu C$ και $q_2 = +2 \mu C$, συγκρατούνται ακίνητα στο κενό και σε απόσταση $r = 2 \text{ cm}$.

4.1 Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική τους ενέργεια.

Μονάδες 6

Τα υλικά σημεία αφήνονται ελεύθερα να κινηθούν την χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

4.2 Αν v_1, v_2 είναι τα αντίστοιχα μέτρα των ταχυτήτων τους, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{v_1}{v_2}$, όταν η

απόστασή τους γίνει αρκετά μεγάλη ώστε η μεταξύ τους ηλεκτρική αλληλεπίδραση να θεωρείται ασήμαντη.

Μονάδες 6

4.3 Αν η μάζα κάθε υλικού σημείου είναι $m = 0,1 \text{ kg}$, να υπολογίσετε τα μέτρα v_1 και v_2 των ταχυτήτων του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 7

4.4 Για την χρονική διάρκεια από t_0 μέχρι την χρονική στιγμή που η απόστασή τους γίνει αρκετά μεγάλη, ώστε η μεταξύ τους ηλεκτρική αλληλεπίδραση να θεωρείται ασήμαντη, να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που δέχεται το πρώτο υλικό σημείο από το δεύτερο.

Μονάδες 6

Δίνεται: $k_{\eta\lambda} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$. Να θεωρήσετε αμελητέα την βαρυτική αλληλεπίδραση των υλικών σημείων τόσο μεταξύ τους όσο και με άλλα σώματα.

Απάντηση

4.1

Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U_{\text{αρχ}} = K_c \frac{q_1 q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} \text{ J} = 9 \cdot 10^{-1} \text{ J} \quad \text{ή} \quad U_{\text{αρχ}} = 0,9 \text{ J}.$$

4.2

Τα σωμάτια κινούνται με την επίδραση μόνο των αμοιβαίων ηλεκτρικών δυνάμεων, άρα το σύστημα των σωματίων είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

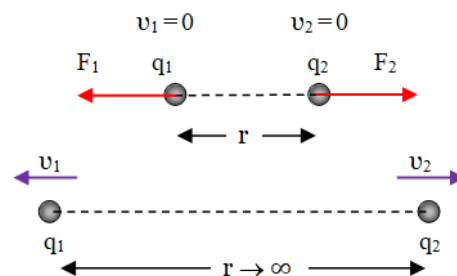
$$p_{\text{ολ(τελ)}} = p_{\text{ολ(αρχ)}} \Leftrightarrow mv_2 - mv_1 = 0 \Leftrightarrow v_2 = v_1 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1.$$

(Η σχέση αυτή συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματίων σε κάθε χρονική στιγμή μετά την εκκίνηση).

4.3

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματίων είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σωμάτια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι «άπειρη» και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :



$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = 0 + U_{\alpha\rho\chi} \xrightarrow{v_1=v_2=v} mv^2 = U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow$$

$$v^2 = \frac{U_{\alpha\rho\chi}}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{U_{\alpha\rho\chi}}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{0,9}{0,1}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Επομένως : } v_1 = v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του 1ου σωματίου από τη στιγμή που αφήνεται μέχρι η απόστασή του από το άλλο να γίνει «άπειρη» :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = W_{F_1} \Leftrightarrow W_{F_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow W_{F_1} = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 9 \text{ J} \Rightarrow W_{F_1} = 0,45 \text{ J}.$$

2. (15896) Δύο σημειακά φορτία $q_1 = +1 \mu C$ και $q_2 = -2 \mu C$ έχουν ίσες μάζες και συγκρατούνται ακίνητα στο κενό και σε απόσταση $r = 10 \text{ cm}$ μεταξύ τους.

4.1. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των σημειακών φορτίων q_1 και q_2 .

Μονάδες 6

Τα σημειακά φορτία αφήνονται ελεύθερα να κινηθούν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

4.2. Αν v_1, v_2 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων των σημειακών φορτίων q_1 και q_2 αντίστοιχα, όταν η μεταξύ τους απόσταση υποπενταπλασιαστεί, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{v_1}{v_2}$,

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε τα μέτρα v_1 και v_2 των ταχυτήτων των σημειακών φορτίων q_1 και q_2 αντίστοιχα, όταν η απόστασή τους υποπενταπλασιαστεί, αν για τις μάζες των δύο φορτίων ισχύει $m_1 = m_2 = m = 0,72 \text{ mg}$.

Μονάδες 7

4.4. Να σχεδιάσετε, σε κοινό σύστημα ορθογώνιων αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις που απεικονίζουν τις μεταβολές της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας, της κινητικής ενέργειας και της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σημειακών φορτίων q_1 και q_2 , σε συνάρτηση με την απόστασή τους, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή που η απόστασή τους υποπενταπλασιάζεται.

Μονάδες 6

Δίνεται: $k_{\eta\lambda} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$. Σε καθένα από τα φορτία q_1 και q_2 ασκείται μόνο η ηλεκτρική δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ τους.

Απάντηση

4.1

Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U_{\alpha\rho\chi} = K_c \frac{q_1 q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{10^{-1}} \text{ J} = -18 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad \text{ή}$$

$$U_{\alpha\rho\chi} = -0,18 \text{ J}. \quad (1)$$

4.2

Τα σωμάτια κινούνται με την επίδραση μόνο των αμοιβαίων ηλεκτρικών δυνάμεων, άρα το σύστημα των σωματίων είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ}(\text{τελ})} = p_{\text{ολ}(\alpha\rho\chi)} \Leftrightarrow mv_2 - mv_1 = 0 \Leftrightarrow v_2 = v_1 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = 1.$$

(Η σχέση αυτή συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματίων σε κάθε χρονική στιγμή μετά την εκκίνηση).

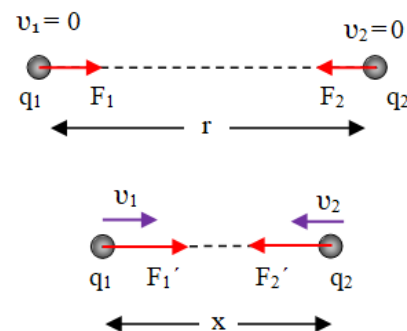
4.3

Όταν υποπενταπλασιαστεί η απόσταση, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U_{\text{τελ}} = K_c \frac{q_1 q_2}{\frac{r}{5}} = 5K_c \frac{q_1 q_2}{r} \xrightarrow{(1)} U_{\text{τελ}} = 5U_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow U_{\text{τελ}} = -0,9 \text{ J}.$$

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματίων είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σωμάτια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση υποπενταπλασιαστεί και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :



$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + U_{\text{τελ}} = 0 + U_{\text{αρχ}} \xrightarrow{v_1=v_2=v} mv^2 = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} \Leftrightarrow$$

$$v^2 = \frac{U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}}}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{-0,18 + 0,9}{0,72 \cdot 10^{-6}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Επομένως : $v_1 = v_2 = 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.4

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή : $E_{\text{μηχ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = -0,18\text{J}.$

Η δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση : $U = K_c \frac{q_1 q_2}{x} \Rightarrow U = -\frac{18 \cdot 10^{-3}}{x} \text{ (S.I.)} \quad (2)$

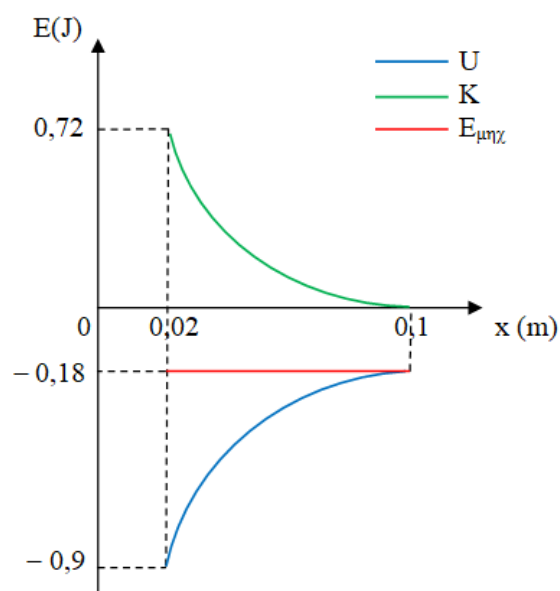
Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για την αρχική χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και μία τυχαία χρονική στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σωματίων είναι x (πριν υποπενταπλασιαστεί) :

$$K + U = E_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow K = E_{\text{αρχ}} - U \xrightarrow{(2)} K = -0,18 + \frac{18 \cdot 10^{-3}}{x} \text{ (S.I.)} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) συμπεραίνουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις $U = f(x)$, $K = f(x)$ είναι τμήματα υπερβολών.

$$\text{Για } x = r = 10^{-1} \text{ m} \xrightarrow{(2),(3)} U = -0,18\text{J}, K = 0.$$

$$\text{Για } x = \frac{r}{5} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \xrightarrow{(2),(3)} U = -0,9\text{J}, K = 0,72\text{J}.$$



Σχόλιο :

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και δεν έχει μάζα ή ταχύτητα.

Η σωστή διατύπωση είναι : «Δύο σωματίδια με φορτία q_1, q_2 έχουν ίσες μάζες ... », «τα σωματίδια αφήνονται ... », «τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματίων ... ».

3. (15897)

Δύο σημειακά φορτία $q_1 = q_2 = +1 \mu C$ συγκρατούνται σε σημεία Α και Β αντίστοιχα, στον αέρα και σε απόσταση $r = 10 \text{ cm}$.

4.1. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των σημειακών φορτίων.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργούν τα φορτία q_1 και q_2 στο μέσο Μ της απόστασης των σημείων Α και Β.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που πεδίου κατά τη μεταφορά σημειακού φορτίου $q = -1 \mu C$ από το σημείο Μ στο άπειρο (∞), δηλαδή σε θέση όπου η δύναμη του πεδίου μηδενίζεται.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί, από το σημείο Μ, κάθετα στην ΑΒ, σημειακό φορτίο $q = -1 \mu C$ και μάζας $m = 72 \text{ mg}$ ώστε μόλις να διαφύγει από το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα σημειακά φορτία q_1 και q_2 .

Μονάδες 7

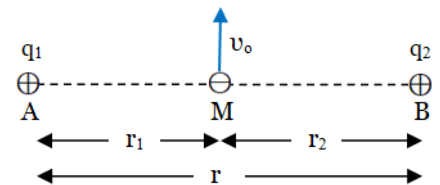
Δίνεται: $k_{\eta\lambda} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$. Να ληφθούν υπόψη μόνο οι ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις των φορτίων.

Απάντηση

4.1

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων q_1, q_2 είναι

$$U_{1,2} = K_c \frac{q_1 q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{10^{-1}} \text{ J} \Rightarrow U_{1,2} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$



4.2

Για τις αποστάσεις των δύο σωματίων από το Μ ισχύει: $r_1 = r_2 = \frac{r}{2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Το δυναμικό του πεδίου των φορτίων q_1, q_2 στο σημείο Μ είναι

$$V_M = K_c \frac{q_1}{r_1} + K_c \frac{q_2}{r_2} = 2K_c \frac{q_1}{r_1} \Rightarrow V_M = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2}} \text{ V} \Rightarrow V_M = 3,6 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

4.3

Το έργο της δύναμης που πεδίου των φορτίων q_1, q_2 κατά τη μεταφορά του σημειακού φορτίου q από το Μ στο «άπειρο» (∞) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$W_{M \rightarrow \infty} = q(V_M - V_\infty) = qV_M \Rightarrow W_{M \rightarrow \infty} = (-10^{-6}) \cdot 3,6 \cdot 10^5 \text{ J} \Rightarrow W_{M \rightarrow \infty} = -3,6 \cdot 10^{-1} \text{ J} = -0,36 \text{ J}.$$

4.4

Αφού το σωματίο μόλις που διαφεύγει από το ηλεκτρικό πεδίο, άρα τη στιγμή που εξέρχεται από το πεδίο (στο «άπειρο») έχει μηδενική ταχύτητα ($v_\infty = 0$).

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σωματίου από το Μ στο άπειρο:

$$K_\infty - K_M = W_{M \rightarrow \infty} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{M \rightarrow \infty} \Leftrightarrow v_0^2 = -\frac{2W_{M \rightarrow \infty}}{m} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{-\frac{2W_{M \rightarrow \infty}}{m}} \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{2 \cdot (-0,36)}{72 \cdot 10^{-6}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο : Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και δεν έχει μάζα ούτε ταχύτητα.

Η σωστή διατύπωση είναι : «Δύο σωμάτια με φορτία $q_1 = q_2 = + 1\mu\text{C}$ συγκρατούνται . . . », « . . . κατά τη μεταφορά σωματίου . . . », «. . . το μέτρο της ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί σωματίο με φορτίο $q = - 1\mu\text{C}$ και μάζα $m = 72\text{ mg}$. . . ».

4. (16109)

Τα σωματίδια A και B συγκρατούνται ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα σωματίδια έχουν ίσα θετικά φορτία $Q = q$ μάζες m_A και m_B αντίστοιχα, το σύστημα των δύο ηλεκτρικών φορτίων έχει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U και αφήνονται να κινηθούν.



4.1. Να δείξετε ότι ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων που έχουν κάθε χρονική στιγμή τα δύο σωματίδια είναι αντιστρόφως ανάλογος με τον λόγο των μαζών τους.

Μονάδες 5

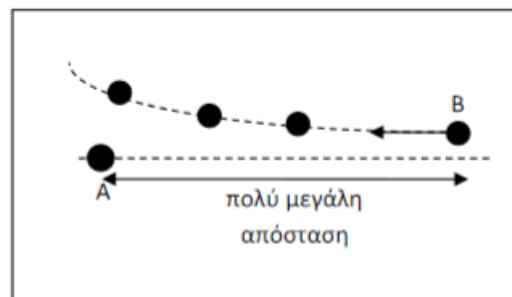
4.2. Να δείξετε ότι η κινητική ενέργεια του B, σε πολύ μεγάλη απόσταση από το A (σε απόσταση τόση ώστε τα σωματίδια πρακτικά δεν αλληλεπιδρούν), δίνεται από τη σχέση: $K_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot U$.

Μονάδες 8

4.3. Για αυτό το ερώτημα υποθέτουμε πως η μάζα του A είναι πολύ μεγαλύτερη της μάζας του B ($m_A \gg m_B$), ώστε στους υπολογισμούς η μάζα του B να θεωρείται αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του A. **Να υπολογίσετε**, αξιοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) ή με όποιον άλλο τρόπο σκεφτείτε, **τις κινητικές ενέργειες των A και B** όταν βρίσκονται σε πολύ μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.

Μονάδες 7

4.4. Όταν το B φθάνει σε μεγάλη απόσταση από το A, **το εκτοξεύουμε** και πάλι προς τα πίσω, όχι όμως ακριβώς στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια αλλά **λίγο έκκεντρα**, όπως φαίνεται στο σχήμα που αποτελεί κάτοψη του επιπέδου στο οποίο γίνεται η κίνηση. **Εξηγήστε γιατί το B θα ακολουθήσει μια τροχιά όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο σχήμα.



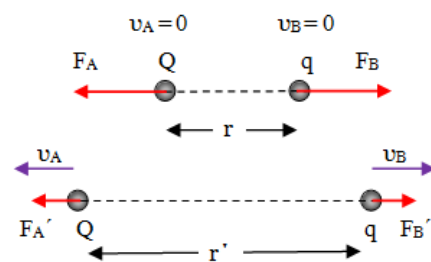
Μονάδες 5

Απάντηση

4.1

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων είναι απωστικές, με αποτέλεσμα να απομακρύνονται κινούμενα στην ευθεία που τα συνδέει.

Τα σωματίδια κινούνται με την επίδραση μόνο των αμοιβαίων ηλεκτρικών δυνάμεων, άρα το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή. Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :



$$p_{ολ(τελ)} = p_{ολ(αρχ)} \Leftrightarrow m_B v_B - m_A v_A = 0 \Leftrightarrow m_B v_B = m_A v_A \Leftrightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B}{m_A}. \quad (1)$$

Άρα, σε κάθε χρονική στιγμή τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματιδίων είναι αντιστρόφως ανάλογα με τις μάζες τους.

4.2

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σωματίδια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι «άπειρη» και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + 0 = 0 + U \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2} m_A \frac{m_B^2}{m_A^2} v_B^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = U \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 \left(\frac{m_B}{m_A} + 1 \right) = U \Leftrightarrow K_B \frac{m_B + m_A}{m_A} = U \Leftrightarrow K_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot U. \quad (2)$$

4.3

Αφού $m_A \gg m_B \Rightarrow m_A + m_B \cong m_A$. (3)

$$(2), (3) \Rightarrow K_B \cong \frac{m_A}{m_A} \cdot U \Rightarrow K_B \cong U. \quad (4)$$

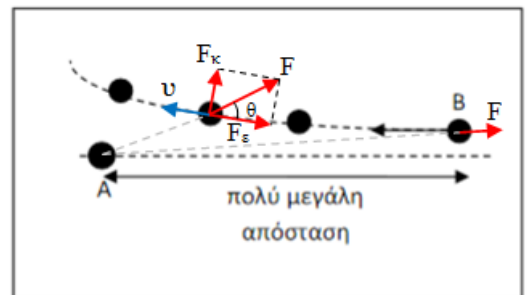
Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σωμάτια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι «άπειρη» και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow K_A + K_B = U \xrightarrow{(4)} K_A + U \cong U \Rightarrow K_A \cong 0.$$

4.4

Στη διάρκεια της κίνησης το σωματίδιο B δέχεται απωστική ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}$ από το A, η οποία έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια.

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η ηλεκτρική δύναμη δεν έχει την ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα του B, με αποτέλεσμα να δημιουργείται κεντρομόλος δύναμη και το σωματίδιο B να κινείται σε καμπύλη τροχιά.



Παρατήρηση

Για όσο χρόνο το B πλησιάζει το A, το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης αυξάνεται, άρα αυξάνεται και το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης :

$$F_{\kappa} = F \sin \theta \xrightarrow{F \uparrow, \theta \uparrow} F_{\kappa} \uparrow.$$

Αφού το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης αυξάνεται και το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται, άρα ελαττώνεται η ακτίνα της τροχιάς με αποτέλεσμα την πιο έντονη καμπύλωση της τροχιάς :

$$F_{\kappa} = m \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow R = m \frac{v^2}{F_{\kappa}} \xrightarrow{v \downarrow, F_{\kappa} \uparrow} R \downarrow.$$

Σχόλια :

1) Στο ερώτημα 4.3 η εκφώνηση ζητά τον υπολογισμό των κινητικών ενεργειών K_A , K_B .

Όμως, **οι κινητικές ενέργειες δεν μπορούν να υπολογιστούν αφού δεν δίνεται η τιμή της αρχικής δυναμικής ενέργειας U.**

2) Στο ερώτημα 4.4

α) η διατύπωση «... το εκτοξεύουμε... λίγο έκκεντρα...» είναι ασαφής.

Η εκφώνηση έπρεπε να λέει : «... το εκτοξεύουμε έτσι ώστε η ταχύτητά του να μην έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια».

β) η διατύπωση «Εξηγήστε γιατί το B θα ακολουθήσει μια τροχιά όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα» είναι ασαφής, αφού δεν διευκρινίζει αν ζητείται απλά να εξηγήσουν οι εξεταζόμενοι/νες γιατί η τροχιά είναι καμπύλη ή επιπλέον ζητείται να εξηγήσουν και την αυξανόμενη καμπύλωση της τροχιάς.

Το ερώτημα 4.4 είναι ασαφές και ακατάλληλο για τις εξετάσεις.

5. (16328)

Σφαιρίδιο μάζας $m_1 = 10^{-9} \text{ Kg}$, φορτισμένο με θετικό φορτίο $q_1 = 10^{-8} \text{ C}$, βάλλεται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 40 \text{ m/s}$ προς δεύτερο σφαιρίδιο, που είναι αρχικά ακίνητο σε απόσταση $d = 1 \text{ m}$ από αυτό. Το δεύτερο σφαιρίδιο έχει μάζα $m_2 = 3m_1$ και φορτίο $q_2 = q_1$. Τα σφαιρίδια βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο, λείο και μονωτικό δάπεδο.

4.1. Να περιγράψετε το είδος της κίνησης που εκτελεί καθένα από τα σφαιρίδια μέχρι να φτάσουν στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

Μονάδες 5

4.2. Να προσδιορίσετε τις ταχύτητες των σφαιριδίων όταν βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

Μονάδες 6

4.3. Να προσδιορίσετε τη μεταβολή της ορμής για κάθε ένα από τα σωματίδια μέχρι αυτά να φτάσουν στην ελάχιστη απόσταση.

Μονάδες 6

4.4. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση στην οποία πλησιάζουν τα δύο σφαιρίδια;

Μονάδες 8

Δίνεται η σταθερά του νόμου Coulomb: $K_C = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$, αγνοούνται άλλες αντιστάσεις στην κίνηση των σφαιριδίων και θεωρούμε θετική την φορά κίνησης του σφαιριδίου μάζας m_1 .

Απάντηση

4.1

Ανάμεσα στα δύο σφαιρίδια αναπτύσσονται απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις.

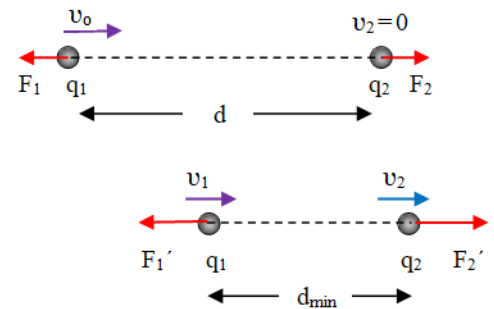
Η δύναμη $\vec{F}_1$ που δέχεται το 1ο είναι αντίρροπη από την ταχύτητα, με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει, ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ που δέχεται το 2ο το επιταχύνει.

Αρχικά το 1ο έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το 2ο, με αποτέλεσμα να μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους αποκτούν ίσα μέτρα ($u_1 = u_2 = u$) και στη συνέχεια το 2ο έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το 1ο, με αποτέλεσμα η μεταξύ τους απόσταση να αυξάνεται.

Επομένως, **η απόσταση μεταξύ των σφαιριδίων είναι ελάχιστη τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες.**

Μέχρι τη στιγμή που η απόστασή τους είναι ελάχιστη, το 1ο εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση (με μεταβλητή επιβράδυνση) ενώ το 2ο εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση (με μεταβλητή επιτάχυνση).



4.2

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα έχουν μηδενική συνισταμένη, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική κατάσταση τη στιγμή που εκτοξεύεται το 1ο και τελική τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες :

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow m_1 u_0 = m_1 u + m_2 u \xrightarrow{m_2 = 3m_1} m_1 u_0 = (m_1 + 3m_1) u \Leftrightarrow u = \frac{u_0}{4} \Rightarrow u = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σφαιριδίων είναι ελάχιστη, οι ταχύτητες έχουν μέτρα :

$$u_1 = u_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης των σφαιριδίων και υπολογίζουμε τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαιριδίου (αλγεβρικά) :

$$\Delta p_1 = m_1 v_1 - m_1 v_o = m_1 (v_1 - v_o) \Rightarrow \Delta p_1 = 10^{-9} \text{ Kg} \cdot (10 - 40) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -3 \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\Delta p_2 = m_2 v_2 - 0 = m_2 v_2 \Rightarrow \Delta p_2 = (3 \cdot 10^{-9} \text{ Kg}) \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \Rightarrow \Delta p_2 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δηλαδή, οι μεταβολές των ορμών των σφαιριδίων είναι αντίθετες.

4.4

Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σώματα και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι ελάχιστη και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_o^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{d} = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{d_{\min}} \xrightarrow{m_2=3m_1}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_o^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{d} = 2m_1 v^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{d_{\min}} \Leftrightarrow K_c \frac{q_1 q_2}{d_{\min}} = m_1 \left(\frac{v_o^2}{2} - 2v^2 \right) + K_c \frac{q_1 q_2}{d}.$$

Με αντικατάσταση :

$$9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8} \cdot 10^{-8}}{d_{\min}} = 10^{-9} (800 - 200) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8} \cdot 10^{-8}}{1} \Rightarrow d_{\min} = \frac{9 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^{-7} + 9 \cdot 10^{-7}} \text{ m} \Rightarrow d_{\min} = \frac{9}{15} \text{ m} = 0,6 \text{ m}.$$

6. (16331)

Στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς $a = 0,3 \text{ cm}$, συγκρατούνται αρχικά ακίνητα τρία μικρά σφαιρίδια φορτισμένα με ίσα ηλεκτρικά φορτία $q_1 = q_2 = q_3 = 2 \mu\text{C}$. Στη συνέχεια απομακρύνουμε το φορτίο q_3 από την κορυφή Γ και διατηρούμε τα άλλα δύο στις κορυφές Α και Β δένοντας το κάθε ένα από αυτά στο άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος μήκους $L = 0,3 \text{ cm}$.

Έτσι τελικά τα φορτία αυτά ισορροπούν σε λείο οριζόντιο δάπεδο σε απόσταση $L = 0,3 \text{ cm}$ μεταξύ τους.

Οι μάζες των φορτίων q_1, q_2 είναι $m_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Kg}$ και $m_2 = 2m_1$, αντίστοιχα.

Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και τα δύο σφαιρίδια αρχίζουν να κινούνται λόγω των απωστικών ηλεκτρικών δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους.

4.1. Να προσδιορίσετε την ενέργεια του αρχικού συστήματος των τριών φορτίων.

Μονάδες 5

4.2. Αν $U_{\text{αρχ}}$ και $U_{\text{τελ}}$ οι δυναμικές ενέργειες του συστήματος των δύο φορτίων q_1, q_2 όταν αυτά

απέχουν μεταξύ τους απόσταση L και $2L$ αντίστοιχα, να προσδιορίσετε το λόγο: $\frac{U_{\text{αρχ}}}{U_{\text{τελ}}}$.

Μονάδες 5

4.3. Να προσδιορίσετε το λόγο των μέτρων των δύο ταχυτήτων $\frac{v_1}{v_2}$ που αποκτούν τα φορτία q_1 και q_2

στην απόσταση $2L$.

Μονάδες 7

4.4. Να προσδιορίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων v_1 και v_2 .

Μονάδες 8

Δίνεται η σταθερά του νόμου Coulomb: $K_C = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$, ενώ αγνοούνται όλες οι δυνάμεις που μπορεί να δέχονται τα μικρά σφαιρίδια, εκτός από την ηλεκτρική τους αλληλεπίδραση.

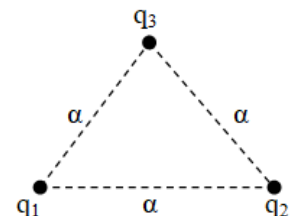
Απάντηση

4.1

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών που έχουν όλα τα (διαφορετικά) ζεύγη φορτίων :

$$U_{\text{ολ}} = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} \Leftrightarrow U_{\text{ολ}} = K_c \left(\frac{q_1 q_2}{a} + \frac{q_1 q_3}{a} + \frac{q_2 q_3}{a} \right) = 3K_c \frac{q^2}{a}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } U_{\text{ολ}} = 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-6})^2}{3 \cdot 10^{-3}} \text{ J} \Rightarrow U_{\text{ολ}} = 36 \text{ J}.$$



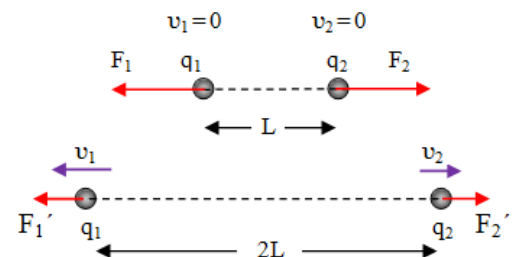
4.2

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των φορτίων q_1, q_2 όταν η απόστασή τους είναι L και $2L$ αντίστοιχα, είναι :

$$U_{\text{αρχ}} = K_c \frac{q_1 q_2}{L} \quad (1), \quad U_{\text{τελ}} = K_c \frac{q_1 q_2}{2L} \quad (2).$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{U_{\text{αρχ}}}{U_{\text{τελ}}} = \frac{K_c \frac{q_1 q_2}{L}}{K_c \frac{q_1 q_2}{2L}} \Leftrightarrow \frac{U_{\text{αρχ}}}{U_{\text{τελ}}} = 2.$$



4.3

Τα σωμάτια κινούνται με την επίδραση μόνο των αμοιβαίων ηλεκτρικών δυνάμεων, άρα το σύστημα των σωματίων είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(τελ)} = p_{ολ(αρχ)} \Leftrightarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 = 0 \xrightarrow{m_2 = 2m_1} 2m_1 v_2 = m_1 v_1 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = 2.$$

Η σχέση αυτή συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματίων σε κάθε χρονική στιγμή (μετά την εκκίνησή τους), άρα και τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση είναι $2L$.

4.4

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματίων είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σωματίδια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι $2L$ και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{τελ} + U_{τελ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{2L} = 0 + K_c \frac{q_1 q_2}{L} \xrightarrow{m_2 = 2m_1, v_1 = 2v_2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 (2v_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m_1 v_2^2 = K_c \frac{q_1 q_2}{L} - K_c \frac{q_1 q_2}{2L} \Leftrightarrow 3m_1 v_2^2 = K_c \frac{q_1 q_2}{2L} \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{K_c q_1 q_2}{6m_1 L}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_2 = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{4 \cdot 10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Επομένως : } v_1 = 2v_2 = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «... τα σφαιρίδια ισορροπούν...», «οι μάζες των σφαιριδίων είναι...», «... των ταχυτήτων που αποκτούν τα σφαιρίδια...».

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και δεν έχει μάζα ή ταχύτητα.

7. (16849)

Δύο σφαίρες A και B μικρών διαστάσεων βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο κατασκευασμένο από κάποιο μονωτικό υλικό και έχουν μάζες $m_A = 1 \text{ g}$ και $m_B = 2 \text{ g}$ αντίστοιχα. Οι σφαίρες φέρουν ηλεκτρικά φορτία $Q_A = 0,1 \text{ } \mu\text{C}$ και $Q_B = 0,2 \text{ } \mu\text{C}$. Κρατάμε ακίνητες τις σφαίρες σε απόσταση $x = 2 \text{ cm}$ και κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη την A ενώ τη B συνεχίζουμε να την κρατάμε ακίνητη.

Να υπολογίσετε:

4.1. Το μέτρο της επιτάχυνσης της σφαίρας A , μόλις αυτή αφήνεται ελεύθερη.

Μονάδες 5

4.2. Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας A , όταν απέχει απόσταση $2x$ από την B .

Μονάδες 7

Επαναφέρουμε τις σφαίρες στην αρχική τους θέση, δηλαδή σε απόσταση x και στη συνέχεια τις αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερες και τις δύο. Τη χρονική στιγμή που αυτές απέχουν απόσταση $2x$ να υπολογίσετε:

4.3. Το μέτρο της επιτάχυνσης της κάθε σφαίρας.

Μονάδες 5

4.4. Το μέτρο της ταχύτητας της κάθε σφαίρας.

Μονάδες 8

Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$. Η αντίσταση του αέρα και οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση

4.1

Όταν η απόσταση μεταξύ των σφαιρών είναι x , το μέτρο της απωστικής δύναμης $\vec{F}_A$ που δέχεται η A από τη B , είναι :

$$F_A = K_c \frac{|Q_A Q_B|}{x^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} \text{ N} = \frac{18 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-4}} \text{ N} \Rightarrow$$

$$F_A = 4,5 \cdot 10^{-1} \text{ N} = 0,45 \text{ N}.$$

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, το μέτρο της επιτάχυνσης της A την ίδια στιγμή είναι :

$$\alpha_A = \frac{F_A}{m_A} = \frac{0,45 \text{ N}}{10^{-3} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_A = 450 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σφαιρών είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνεται ελεύθερη A και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι $2x$ και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

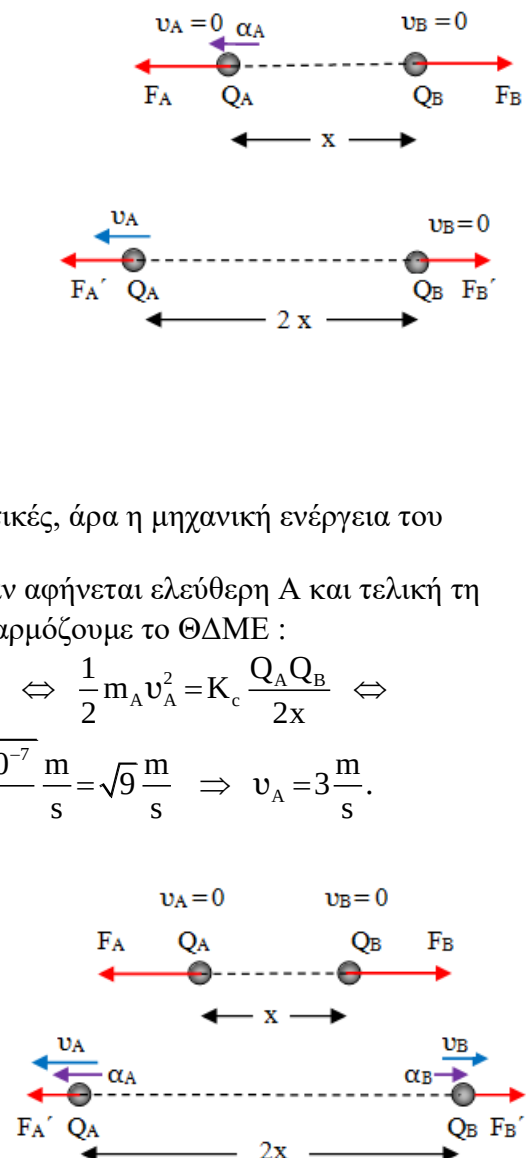
$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + K_c \frac{Q_A Q_B}{2x} = 0 + K_c \frac{Q_A Q_B}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 = K_c \frac{Q_A Q_B}{2x} \Leftrightarrow$$

$$v_A^2 = \frac{K_c Q_A Q_B}{m_A x} \Leftrightarrow v_A = \sqrt{\frac{K_c Q_A Q_B}{m_A x}} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_A = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Όταν η απόσταση μεταξύ των σφαιρών είναι $2x$, το μέτρο της απωστικής δύναμης μεταξύ τους είναι :

$$F_A' = F_B' = K_c \frac{|Q_A Q_B|}{(2x)^2} = K_c \frac{|Q_A Q_B|}{4x^2} \Rightarrow F_A' = F_B' = \frac{F_A}{4}.$$



$$\text{Άρα : } F_A' = F_B' = \frac{0,45}{4} \text{ N} = 0,1125 \text{ N}.$$

$$\text{Το μέτρο της επιτάχυνσης της A είναι : } \alpha_A = \frac{F_A'}{m_A} = \frac{0,1125 \text{ N}}{10^{-3} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_A = 112,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\text{Το μέτρο της επιτάχυνσης της B είναι : } \alpha_B = \frac{F_B'}{m_B} = \frac{0,1125 \text{ N}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_B = 56,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.4

Οι σφαίρες κινούνται με την επίδραση μόνο των αμοιβαίων ηλεκτρικών δυνάμεων, άρα το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης της B και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(τελ)} = p_{ολ(αρχ)} \Leftrightarrow m_B v_B - m_A v_A = 0 \xrightarrow{m_B = 2m_A} 2m_A v_B = m_A v_A \Leftrightarrow v_A = 2v_B.$$

Η σχέση αυτή συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών σε κάθε χρονική στιγμή, άρα και τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση είναι $2x$.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερες οι σφαίρες και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι $2x$ και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

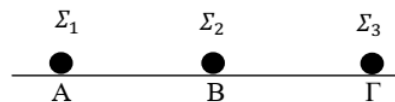
$$K_{τελ} + U_{τελ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + K_c \frac{Q_A Q_B}{2x} = 0 + K_c \frac{Q_A Q_B}{x} \xrightarrow{m_B = 2m_A, v_A = 2v_B}$$

$$\frac{1}{2} m_A (2v_B)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m_A v_B^2 = K_c \frac{Q_A Q_B}{x} - K_c \frac{Q_A Q_B}{2x} \Leftrightarrow 3m_A v_B^2 = K_c \frac{Q_A Q_B}{2x} \Leftrightarrow v_B = \sqrt{\frac{K_c Q_A Q_B}{6m_A x}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_B = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_B = \sqrt{1,5} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Επομένως : } v_A = 2v_B = \sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

8. (17170) Τρία σημειακά σωματίδια Σ_1 , Σ_2 και Σ_3 , βρίσκονται σε ευθεία, στις θέσεις Α, Β και Γ, ενός οριζοντίου μονωτικού επιπέδου μεγάλων διαστάσεων. Για τις μεταξύ τους αποστάσεις ισχύει $AB = BG = r = 3 \text{ m}$. Οι μάζες των σωματιδίων είναι $m_1 = m_3 = m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ και $m_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$, ενώ για τα φορτία τους ισχύει: $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-4} \text{ C}$.



4.1. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων.

Μονάδες 6

4.2. Ποιο από τα φορτία του παραπάνω συστήματος δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη, όταν τα σωματίδια βρίσκονται στις θέσεις που έχουν τοποθετηθεί αρχικά;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

4.3. Αφήνουμε τα φορτία Σ_1 και Σ_3 ελεύθερα να κινηθούν ενώ το Σ_2 παραμένει στην αρχική του θέση. Να βρείτε τα μέτρα των ταχυτήτων τους όταν θα έχουν φτάσει σε πολύ μεγάλη (άπειρη) απόσταση.

Μονάδες 8

Επαναφέρουμε τα φορτία στις αρχικές τους θέσεις. Ακινητοποιούμε τα Σ_1 και Σ_3 στις θέσεις Α και Γ και τα κρατάμε σταθερά σε αυτές και εκτοξεύουμε το Σ_2 με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_0 = 20\sqrt{21} \text{ m/s}$ (σε διεύθυνση διαφορετική από την ευθεία στην οποία βρίσκονται τα τρία φορτία).

4.4. Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία το Σ_2 φτάνει στο άπειρο;

Μονάδες 7

Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$. Η επίδραση της βαρύτητας, οι τριβές και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση

4.1

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος αρχικά, είναι :

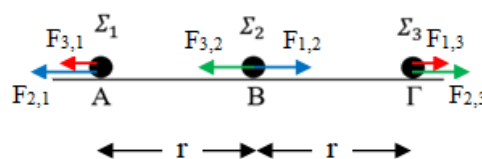
$$U_{\text{αρχ}} = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = K_c \left(\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_3}{2r} + \frac{q_2 q_3}{r} \right) \xrightarrow{q_1 = q_2 = q_3 = q} U_{\text{αρχ}} = 5K_c \frac{q^2}{2r}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } U_{\text{αρχ}} = 5 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(10^{-4})^2}{2 \cdot 3} \text{ J} \Rightarrow U_{\text{αρχ}} = 75 \text{ J}.$$

4.2

Κάθε ένα από τα σωματίδια Σ_1 , Σ_3 δέχεται δύο ομόρροπες δυνάμεις από τα υπόλοιπα, με αποτέλεσμα η συνισταμένη δύναμη να μην είναι μηδενική.

Το σωματίδιο Σ_2 δέχεται δύο αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_{1,2}$, $\vec{F}_{3,2}$ από



τα Σ_1 , Σ_3 αντίστοιχα, οι οποίες έχουν ίσα μέτρα : $F_{1,2} = F_{3,2} = F = K_c \frac{q^2}{r^2}$, με αποτέλεσμα η συνισταμένη δύναμη σε αυτό να είναι μηδενική : $\Sigma F_2 = F_{1,2} - F_{3,2} = F - F \Rightarrow \Sigma F_2 = 0$.

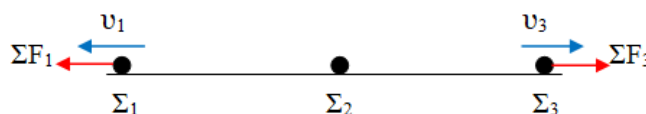
Άρα το σωματίδιο Σ_2 ισορροπεί.

4.3

Κατά τη διάρκεια της κίνησης των σωματιδίων Σ_1 , Σ_3 δεν υπάρχουν τριβές, άρα το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του Σ_3 και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ(τελ)}} = p_{\text{ολ(αρχ)}} \Leftrightarrow mv_3 - mv_1 = 0 \Leftrightarrow v_3 = v_1 = v. \quad (1)$$



Η σχέση αυτή συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματιδίων σε κάθε χρονική στιγμή.

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των τριών σωματιδίων είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σωματίδια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι «άπειρη» και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_3^2 + 0 = 0 + U_{\text{αρχ}} \xrightarrow{(1)} mv^2 = U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow v^2 = \frac{U_{\text{αρχ}}}{m} \Leftrightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{U_{\text{αρχ}}}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{75}{3 \cdot 10^{-2}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{2500} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Επομένως : } v_1 = v_3 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Υπολογίζουμε το δυναμικό του πεδίου των φορτίων q_1, q_3 στο σημείο Β :

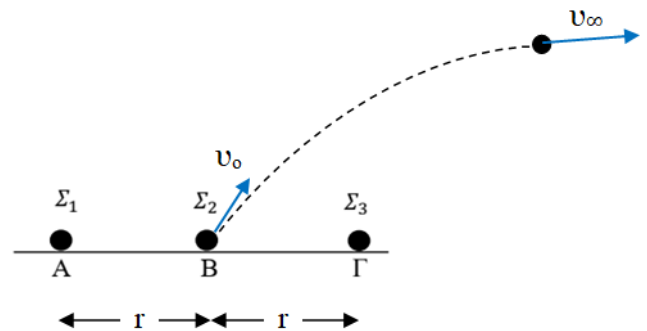
$$V_B = K_c \frac{q_1}{r} + K_c \frac{q_3}{r} = 2K_c \frac{q}{r} \Rightarrow V_B = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-4}}{3} \text{ V}$$

$$\Rightarrow V_B = 6 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του Σ_2 από το Β στο «άπειρο» :

$$K_{\infty} - K_B = W_{\eta\lambda}^{B \rightarrow \infty} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2 v_{\infty}^2 - \frac{1}{2}m_2 v_o^2 = q_2(V_B - V_{\infty}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2 v_{\infty}^2 = \frac{1}{2}m_2 v_o^2 + q_2 V_B \Leftrightarrow$$

$$v_{\infty}^2 = v_o^2 + \frac{2q_2 V_B}{m_2} \Leftrightarrow v_{\infty} = \sqrt{v_o^2 + \frac{2q_2 V_B}{m_2}} \Rightarrow v_{\infty} = \sqrt{(20\sqrt{21})^2 + \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-2}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\infty} = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Σχόλιο : Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος.

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Αφήνουμε τα σωματίδια . . . ελεύθερα να κινηθούν», «Επαναφέρουμε τα σωματίδια . . . ».

9. (17171) Δύο σωματίδια με φορτία $q_1 = q_2 = 10^{-4} \text{ C}$ και μάζες $m_1 = m_2 = m = 1 \text{ g}$ μπορούν να κινούνται στις ράγες μιας κυκλικής διαδρομής ακτίνας $r = 3 \text{ m}$, χωρίς τριβές. Το σύστημα βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο μονωτικό επίπεδο μεγάλων διαστάσεων. Την κάτοψη του συστήματος των δύο σωματιδίων με τις ράγες βλέπουμε στο διπλανό σχήμα. Τα σωματίδια βρίσκονται αρχικά ακίνητα σε δύο αντιδιαμετρικές θέσεις της κυκλικής διαδρομής, όπως φαίνεται στο σχήμα.

4.1. Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων.

Μονάδες 6

4.2. Ο μηχανισμός ο οποίος κρατάει τα σωματίδια στην κυκλική διαδρομή απορρυθμίζεται (την ίδια χρονική στιγμή και για τα δύο) ενώ είναι ακίνητα και τα σωματίδια μπορούν να κινηθούν ελεύθερα. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας με την οποία φτάνουν στο άπειρο.

Μονάδες 6

Επαναφέρουμε τα δύο σωματίδια στις αντιδιαμετρικές θέσεις της κυκλικής διαδρομής, ρυθμίζουμε το μηχανισμό που τα κρατά σε αυτή τη διαδρομή και τους δίνουμε ταχύτητες, κατά την διεύθυνση της διαμέτρου, με μέτρο $v_0 = 100 \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και αντίθετες κατευθύνσεις.

4.3. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας με την οποία θα φτάσουν στο άπειρο;

Μονάδες 7

4.4. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που πρέπει να ασκείται από τις κυκλικές ράγες στα σωματίδια, ώστε αυτά να εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητες μέτρου $v_0 = 100 \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Μονάδες 6

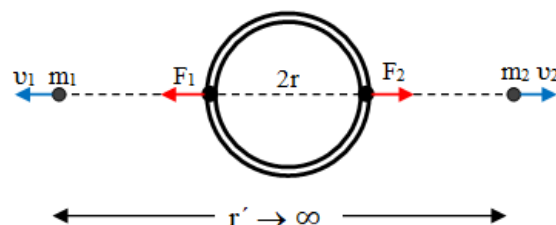
Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$. Οι τριβές και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση

4.1

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι αρχικά :

$$U_{\text{αρχ}} = K_c \frac{q_1 q_2}{2r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-4} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3} \text{ J} \Rightarrow U_{\text{αρχ}} = 15 \text{ J}.$$



4.2

Οι απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις απομακρύνουν τα σωματίδια, μέχρι η μεταξύ τους απόσταση να γίνει πολύ μεγάλη, ώστε να μην αλληλεπιδρούν.

Το σύστημα των δύο σωματιδίων είναι μονωμένο, άρα η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του Σ_2 και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ(τελ)}} = p_{\text{ολ(αρχ)}} \Leftrightarrow mv_2 - mv_1 = 0 \Leftrightarrow v_2 = v_1 = v. \quad (1)$$

Η σχέση αυτή συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματιδίων σε κάθε χρονική στιγμή.

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν αφήνονται ελεύθερα τα σωματίδια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι «άπειρη» και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = 0 + U_{\text{αρχ}} \xrightarrow{(1)} mv^2 = U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow v^2 = \frac{U_{\text{αρχ}}}{m} \Leftrightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{U_{\text{αρχ}}}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{15}{10^{-3}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{15000} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 50\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

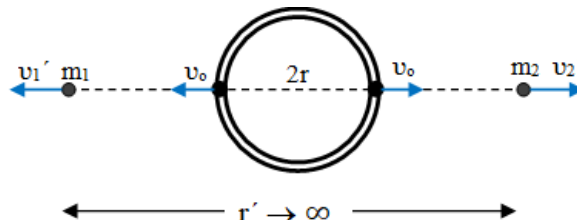
Επομένως : $v_1 = v_2 = 50\sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.3

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του Σ_2 και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$P_{\text{ολ}(\text{τελ})} = P_{\text{ολ}(\text{αρχ})} \Leftrightarrow mv_2' - mv_1' = mv_o - mv_o \Leftrightarrow$$

$$v_2' = v_1' = v'. \quad (2)$$



Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν εκτοξεύονται τα σωματίδια και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι «άπειρη» και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}mv_o^2 + U_{\text{αρχ}} \xrightarrow{(2)} mv'^2 = mv_o^2 + U_{\text{αρχ}}$$

$$\Leftrightarrow v'^2 = \frac{mv_o^2 + U_{\text{αρχ}}}{m} \Leftrightarrow v' = \sqrt{v_o^2 + \frac{U_{\text{αρχ}}}{m}}.$$

Με αντικατάσταση : $v' = \sqrt{2,5 \cdot 10^4 + \frac{15}{10^{-3}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{4 \cdot 10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v' = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.4

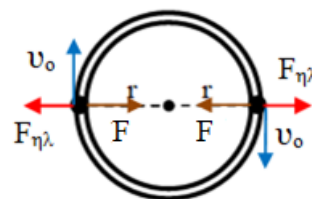
Κάθε σωματίδιο δέχεται δύο δυνάμεις, στη διεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς : την απωστική ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda}$ και τη δύναμη $\vec{F}$ από την τροχιά, με φορά προς το κέντρο.

Η $\vec{F}_{\eta\lambda}$ έχει μέτρο : $F_{\eta\lambda} = K_c \cdot \frac{q_1 q_2}{(2r)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-4} \cdot 10^{-4}}{6^2} \text{N} = 2,5 \text{N}.$

Η συνισταμένη δύναμη είναι η κεντρομόλος, άρα :

$$\Sigma F = m \frac{v_o^2}{r} \Leftrightarrow F - F_{\eta\lambda} = m \frac{v_o^2}{r} \Leftrightarrow F = F_{\eta\lambda} + m \frac{v_o^2}{r} \Rightarrow F = \left(2,5 + 10^{-3} \cdot \frac{25000}{3} \right) \text{N} \Rightarrow$$

$$F = \frac{32,5}{3} \text{N} \quad \text{ή} \quad F = \frac{65}{6} \text{N}.$$



Σχόλια :

1) Στο ερώτημα 4.3 η εκφώνηση

α) αναφέρει « . . . ρυθμίζουμε το μηχανισμό που τα κρατά σε αυτή τη (κυκλική) διαδρομή . . . » (δηλαδή λειτουργεί ο μηχανισμός που διατηρεί τα σωματίδια στην κυκλική τροχιά), ενώ στη συνέχεια τα σωματίδια κινούνται στη διεύθυνση της διαμέτρου της τροχιάς !

β) δεν αναφέρει ότι οι ταχύτητες έχουν τέτοια φορά ώστε τα σωματίδια να απομακρύνονται.

2) Στο ερώτημα 4.4 πρέπει οι αρχικές ταχύτητες να είναι εφαπτομενικές στις κυκλικές ράγες και αντίρροπες, ώστε τα σωματίδια να είναι συνεχώς αντιδιαμετρικά.

10. (17172) Δύο σημειακά φορτισμένα σώματα με φορτία

$q_1 = q_2 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ βρίσκονται στις θέσεις A και B , πάνω σε οριζόντιο μονωμένο επίπεδο μεγάλων διαστάσεων, για τις οποίες ισχύει $AB = 3 \text{ m}$. Η μάζα του σώματος που βρίσκεται στο σημείο A είναι $m = 0,2 \text{ kg}$.

4.1. Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων.

Μονάδες 6

4.2. Να βρεθεί η τιμή του φορτίου q_3 τρίτου σημειακού φορτισμένου σώματος, το οποίο πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο Γ της ευθείας AB , για το οποίο ισχύει $B\Gamma = 3 \text{ m}$, ώστε η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών σωμάτων να είναι μηδενική.

Μονάδες 6

4.3. Να εξετάσετε αν σε κάποιο από τα φορτία q_1 , q_2 και q_3 η συνισταμένη δύναμη από τα άλλα είναι μηδέν στις θέσεις A , B και Γ αντίστοιχα.

Μονάδες 6

Ακινητοποιούμε τα φορτία q_2 και q_3 στις θέσεις B και Γ και αφήνουμε το q_1 ελεύθερο να κινηθεί.

4.4. Αφού αιτιολογήσετε γιατί το φορτίο q_1 μπορεί να φτάσει στο άπειρο (δηλαδή σε πολύ μεγάλη απόσταση από τα άλλα δύο φορτία), να βρείτε την ταχύτητά του όταν φτάνει στο άπειρο.

Μονάδες 7

Δίνεται $k_c = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. Η επίδραση της βαρύτητας, οι τριβές και η αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων q_1 , q_2 είναι :

$$U_{1,2} = K_c \frac{q_1 q_2}{(AB)} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{3} \text{ J} \Rightarrow U_{1,2} = 270 \text{ J}.$$

4.2

Για την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίων q_1 , q_2 , q_3 ισχύει :

$$U_{\text{ολ}} = K_c \left(\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_3}{2r} + \frac{q_2 q_3}{r} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_3}{2r} + \frac{q_2 q_3}{r} = 0 \Leftrightarrow 2q_1 q_2 + q_1 q_3 + 2q_2 q_3 = 0$$

$$\xrightarrow{q_1 = q_2 = q} q_3(q + 2q) = -2q^2 \Leftrightarrow q_3 = -\frac{2q}{3} \Rightarrow q_3 = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{3} \text{ C} \Rightarrow q_3 = -2 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

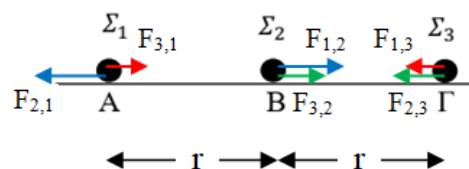
4.3

Κάθε ένα από τα σωματίδια Σ_2 , Σ_3 δέχεται δύο ομόρροπες δυνάμεις από τα υπόλοιπα, με αποτέλεσμα η συνισταμένη δύναμη να μην είναι μηδενική.

Το σωματίδιο Σ_1 δέχεται δύο αντίρροπες δυνάμεις $\vec{F}_{2,1}$, $\vec{F}_{3,1}$ από τα Σ_2 , Σ_3 αντίστοιχα, οι οποίες έχουν μέτρα :

$$F_{2,1} = K_c \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{3^2} \text{ N} \Rightarrow F_{2,1} = 90 \text{ N},$$

$$F_{3,1} = K_c \frac{|q_1 q_3|}{(2r)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{6^2} \text{ N} \Rightarrow F_{3,1} = 15 \text{ N}.$$



Επομένως, η συνισταμένη δύναμη σε αυτό δεν είναι μηδενική :

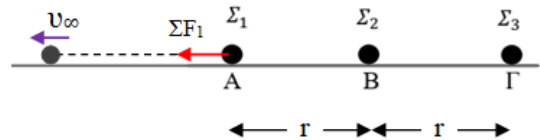
$$\Sigma F_1 = F_{2,1} - F_{3,1} = 90 \text{ N} - 15 \text{ N} = 75 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_1 \neq 0.$$

Άρα, ούτε το σωματίδιο Σ_1 ισορροπεί.

4.4

Η συνισταμένη δύναμη στο Σ_1 έχει τη διεύθυνση της ευθείας των σωματίων με φορά προς τα αριστερά.

Επομένως, όταν το αφήσουμε ελεύθερο θα κινηθεί πάνω στην ευθεία αυτή με φορά προς τα αριστερά και θα απομακρυνθεί από τα άλλα δύο μέχρι να φτάσει στο «άπειρο».



Υπολογίζουμε το δυναμικό του πεδίου των φορτίων q_2, q_3 στο σημείο A :

$$V_A = K_c \frac{q_2}{r} + K_c \frac{q_3}{2r} \Rightarrow V_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^{-4}}{3} - \frac{2 \cdot 10^{-4}}{6} \right) \text{ V} \Rightarrow V_A = 6 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_1 από το A στο «άπειρο» :

$$K_\infty - K_A = W_{\eta\lambda}^{A \rightarrow \infty} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_\infty^2 - 0 = q_1 (V_A - V_\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_\infty^2 = q_1 V_A \Leftrightarrow v_\infty^2 = \frac{2q_1 V_A}{m_1} \Leftrightarrow$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2q_1 V_A}{m_1}} \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{-1}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\infty = 30\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο

Οι διατυπώσεις : «Ακινητοποιούμε τα φορτία . . . », « . . . αφήνουμε το q_1 ελεύθερο να κινηθεί», « . . . το φορτίο q_1 μπορεί να φτάσει στο άπειρο . . . » δεν είναι σωστές.

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σωματίδιο.

11. (19490) Δύο φορτισμένα σωματίδια Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1 = 10^{-6} \text{Kg}$ και $m_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{Kg}$ και ηλεκτρικά φορτία $q_1 = -5 \mu\text{C}$ και $q_2 = -10 \mu\text{C}$ αντίστοιχα. Τα σωματίδια Σ_1 και Σ_2 βρίσκονται αρχικά σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ εκτοξεύουμε το Σ_1 με ταχύτητα $\vec{v}_0$ που έχει κατεύθυνση προς το Σ_2 και μέτρο $v_0 = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το σωματίδιο Σ_2 συγκρατείται ακίνητο με κατάλληλο μηχανισμό.

Η αντίσταση του αέρα, οι τριβές και η επίδραση της βαρύτητας θεωρούνται αμελητέες.

Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά $K_C = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$.

4.1. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση r_1 , από το Σ_2 , στην οποία θα φτάσει το Σ_1 .

Μονάδες 6

Τη χρονική στιγμή t_1 που τα σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση r_1 απελευθερώνουμε το σωματίδιο Σ_2 .

4.2. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{a_1}{a_2}$ των μέτρων των επιταχύνσεων των δύο σωματιδίων αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 .

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε την ταχύτητα κάθε σωματιδίου τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία η απόσταση των σωματιδίων είναι $r_2 = 3r_1$.

Μονάδες 8

4.4. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής κάθε σωματιδίου τη χρονική στιγμή t_2 .

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1

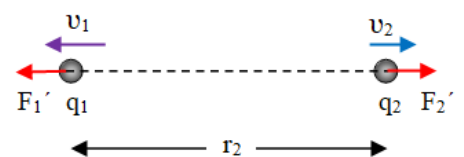
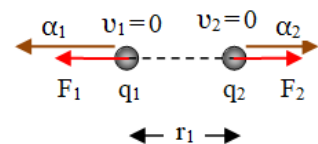
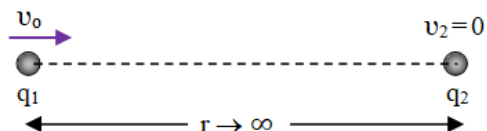
Με την επίδραση της απωστικής ηλεκτρικής δύναμης, το Σ_1 επιβραδύνεται. Τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του Σ_1 , η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη.

Η ηλεκτρική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν εκτοξεύεται το σφαιρίδιο και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι ελάχιστη και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ:

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + 0 = 0 + K_C \frac{q_1 q_2}{r_1} \Leftrightarrow$$

$$r_1 = \frac{2K_C q_1 q_2}{m_1 v_0^2} \Rightarrow r_1 = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot (-10^{-5})}{10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^8} \text{m} \Rightarrow r_1 = 10^{-3} \text{m}.$$



4.2

Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων έχουν ίσα μέτρα (δράση – αντίδραση): $F_1 = F_2 = F$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\left. \begin{array}{l} F = m_1 a_1 \\ F = m_2 a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = 2.$$

4.3

Με την επίδραση των απωστικών ηλεκτρικών δυνάμεων, τα σωματίδια απομακρύνονται. Αφού δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(τελ)} = p_{ολ(αρχ)} \Leftrightarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 = 0 \xrightarrow{m_2 = 2m_1} 2m_1 v_2 = m_1 v_1 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 :

$$K_{τελ} + U_{τελ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{3r_1} = 0 + K_c \frac{q_1 q_2}{r_1} \xrightarrow{m_2 = 2m_1, v_1 = 2v_2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 (2v_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m_1 v_2^2 = K_c \frac{q_1 q_2}{r_1} - K_c \frac{q_1 q_2}{3r_1} \Leftrightarrow 3m_1 v_2^2 = \frac{2K_c q_1 q_2}{3r_1} \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2K_c q_1 q_2}{9m_1 r_1}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot (-10^{-5})}{9 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}}} \frac{m}{s} = \sqrt{10^8} \frac{m}{s} \Rightarrow v_2 = 10^4 \frac{m}{s}.$$

$$\text{Επομένως : } v_1 = 2v_2 = 2 \cdot 10^4 \frac{m}{s}.$$

4.4

Τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι r_2 , το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης είναι :

$$F_1' = F_2' = K_c \frac{|q_1 q_2|}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-5}}{(3 \cdot 10^{-3})^2} N \Rightarrow F_1' = F_2' = 5 \cdot 10^4 N.$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σωματιδίου είναι ίσος με τη

$$\text{συνισταμένη δύναμη : } \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ηλ}.$$

Άρα, τη χρονική στιγμή t_2 , το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής κάθε σωματιδίου είναι :

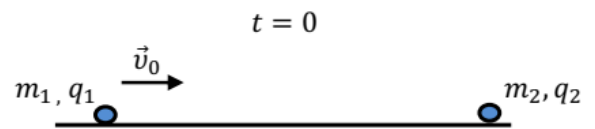
$$\left| \frac{dp_1}{dt} \right| = F_1' = 5 \cdot 10^4 N,$$

$$\left| \frac{dp_2}{dt} \right| = F_2' = 5 \cdot 10^4 N.$$

12. (20720) Δύο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια (1) και (2) έχουν μάζες m_1 και m_2 και ηλεκτρικά φορτία q_1 και q_2 αντίστοιχα και βρίσκονται επάνω σε λείο, οριζόντιο μονωτικό δάπεδο και σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ s το σωματίδιο (1) εκτοξεύεται με ταχύτητα μέτρου v_0 και κατεύθυνση προς το σωματίδιο (2), ενώ το σωματίδιο (2) αφήνεται ταυτόχρονα ελεύθερο να κινηθεί.

Δίνονται: $m_1 = 10^{-6}$ kg, $m_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ kg, $q_1 = -5 \mu\text{C}$, $q_2 = -10 \mu\text{C}$, $v_0 = 3 \cdot 10^4$ m/s, $k = 9 \cdot 10^9$ N · m² / C².



4.1. Να χαρακτηρίσετε το είδος της κίνησης του κάθε σωματιδίου.

Μονάδες 5

Να υπολογίσετε:

4.2. τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων, όταν η μεταξύ τους απόσταση γίνει ελάχιστη,

Μονάδες 6

4.3. την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν,

Μονάδες 7

4.4. την απόσταση των δύο σωματιδίων, τη χρονική στιγμή που θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σωματιδίου (1).

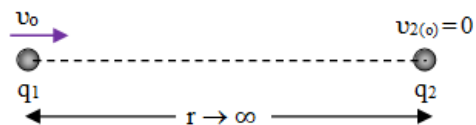
Μονάδες 7

Η αντίσταση του αέρα, και η επίδραση της βαρύτητας θεωρούνται αμελητέες.

Απάντηση

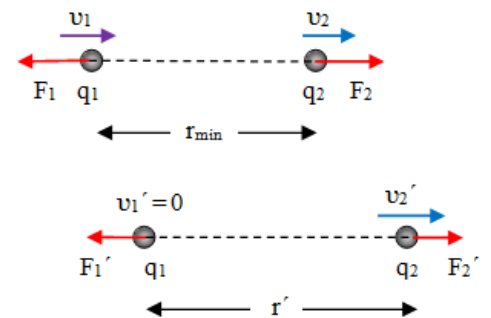
4.1

Αρχικά τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν, άρα το 1ο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ενώ το 2ο παραμένει ακίνητο.



Από τη στιγμή που τα δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν, αναπτύσσονται μεταξύ τους απωστικές ηλεκτρικές δυνάμεις.

Η δύναμη $\vec{F}_1$ που δέχεται το 1ο είναι αντίρροπη από την ταχύτητα, με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει, ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ που δέχεται το 2ο το επιταχύνει.



Επομένως, το 1ο εκτελεί ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη κίνηση (με μεταβλητή επιβράδυνση) μέχρι να σταματήσει (στιγμιαία) και στη συνέχεια επιταχύνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση, ενώ το 2ο εκτελεί συνεχώς ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση (με μεταβλητή επιτάχυνση).

4.2

Αρχικά το 1ο έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το 2ο, με αποτέλεσμα να μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση. Αφού το μέτρο της ταχύτητας του 1ου μειώνεται ενώ του 2ου αυξάνεται, κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους θα αποκτήσουν ίσα μέτρα ($v_1 = v_2 = v$). Στη συνέχεια η ταχύτητα του 2ου είναι μεγαλύτερη από του 1ου, με αποτέλεσμα η μεταξύ τους απόσταση να αυξάνεται.

Επομένως, η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες.

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα των δύο σωματιδίων έχουν μηδενική συνισταμένη, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική κατάσταση τη στιγμή που εκτοξεύεται το 1ο και τελική τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες :

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow m_1 v_0 = m_1 v + m_2 v \xrightarrow{m_2=2m_1} m_1 v_0 = (m_1 + 2m_1) v \Leftrightarrow v = \frac{v_0}{3} \Rightarrow v = 10^4 \frac{m}{s}.$$

Άρα, τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη, οι ταχύτητες έχουν μέτρα :

$$v_1 = v_2 = 10^4 \frac{m}{s}.$$

4.3

Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν εκτοξεύεται 1ο σωματίδιο και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι ελάχιστη και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} \xrightarrow{m_2=2m_1}$$

$$m_1 v_0^2 = 3m_1 v^2 + 2K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} \Leftrightarrow 2K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} = m_1 (v_0^2 - 3v^2) \Leftrightarrow r_{\min} = \frac{2K_c q_1 q_2}{m_1 (v_0^2 - 3v^2)}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } r_{\min} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot (-10^{-5})}{10^{-6} \cdot (9 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^8)} m \Rightarrow r_{\min} = \frac{90 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^2} m \Rightarrow r_{\min} = 1,5 \cdot 10^{-3} m.$$

4.4

Έστω v_2' το μέτρο της ταχύτητας του 2ου σωματιδίου, τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του 1ου.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική κατάσταση τη στιγμή που εκτοξεύεται το 1ο και τελική τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του :

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow m_1 v_0 = 0 + m_2 v_2' \xrightarrow{m_2=2m_1} m_1 v_0 = 2m_1 v_2' \Leftrightarrow v_2' = \frac{v_0}{2}. \quad (1)$$

Έστω r' η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων, τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του 1ου.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή της εκτόξευσης του 1ου σωματιδίου και τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του :

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ}' + U_{τελ}' \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{r'} \xrightarrow{(1)}$$

$$m_1 v_0^2 = 2m_1 \frac{v_0^2}{4} + 2K_c \frac{q_1 q_2}{r'} \Leftrightarrow 2K_c \frac{q_1 q_2}{r'} = \frac{m_1 v_0^2}{2} \Leftrightarrow r' = \frac{4K_c q_1 q_2}{m_1 v_0^2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } r' = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-6}) \cdot (-10^{-5})}{10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^8} m \Rightarrow r' = \frac{20 \cdot 10^{-2}}{10^2} m \Rightarrow r' = 2 \cdot 10^{-3} m.$$

13. (20898) Ακλόνητο σημειακό ηλεκτρικό φορτίο $Q = -100\mu C$ βρίσκεται πάνω σε λείο και μονωτικό δάπεδο. Σφαιρίδιο με φορτίο $q = 1\mu C$ και μάζα $m = 10gr$ βρίσκεται αρχικά σε απόσταση $r = 0,1m$ από το Q και εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = 30\text{ m/s}$ έτσι ώστε να απομακρύνεται από το Q .

4.1. Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση στην οποία θα βρεθεί το φορτίο q .

Μονάδες 6

4.2. Να βρείτε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο φορτίων.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του φορτίου q , όταν αυτό βρεθεί στη μέγιστη δυνατή απόσταση.

Μονάδες 6

4.4. Για ποιες τιμές της αρχικής ταχύτητάς του, το φορτίο q καταλήγει σε άπειρη απόσταση από το Q .

Μονάδες 7

Οι βαρυτικές και οι μαγνητικές αλληλεπιδράσεις παραλείπονται.

Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά $K_C = 9 \cdot 10^9\text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$.

Απάντηση

4.1

Η ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda}$ που δέχεται το σφαιρίδιο είναι αντίρροπη από την αρχική ταχύτητα, με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει.

Τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του σφαιριδίου, η απόστασή του από το άλλο γίνεται μέγιστη.

Η ηλεκτρική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή. Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος όταν εκτοξεύεται σφαιρίδιο και τελική τη μηχανική ενέργεια όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι μέγιστη και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ:

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow 0 + K_C \frac{Qq}{r_{\text{max}}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + K_C \frac{Qq}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-4}) \cdot 10^{-6}}{r_{\text{max}}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 900 + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-4}) \cdot 10^{-6}}{10^{-1}} \Rightarrow -\frac{0,9}{r_{\text{max}}} = 4,5 - 9 \Rightarrow -\frac{0,9}{r_{\text{max}}} = -4,5 \Rightarrow$$

$$r_{\text{max}} = 0,2\text{ m}.$$

4.2

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση: $U = K_C \frac{Qq}{x}$.

Αφού τα φορτία είναι ετερόσημα, η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική.

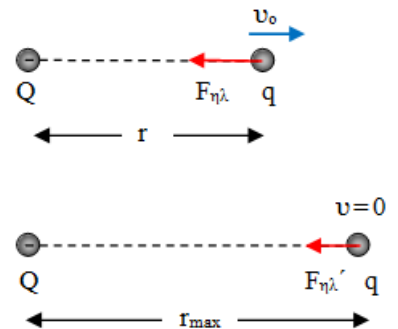
Όταν αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των φορτίων, η απόλυτη τιμή της δυναμικής ενέργειας μειώνεται άρα η αλγεβρική τιμή της αυξάνεται. Επομένως, η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη όταν η απόσταση μεταξύ των φορτίων είναι μέγιστη.

$$\text{Δηλαδή: } U_{\text{max}} = K_C \frac{Qq}{r_{\text{max}}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-4}) \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-1}}\text{ J} = -4,5\text{ J}.$$

4.3

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη συνισταμένη

$$\text{δύναμη: } \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_{\eta\lambda}.$$



Άρα, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου, τη στιγμή που βρίσκεται στη μέγιστη απόσταση, είναι :

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = F_{\eta\lambda} = K_c \frac{|Qq|}{r_{\max}^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-4} \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-2}} \text{ N} = 22,5 \text{ N}.$$

Η κατεύθυνση του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου (δηλαδή της ηλεκτρικής δύναμης που δέχεται) είναι από το σφαιρίδιο προς το σημειακό φορτίο Q.

4.4

Έστω ότι το σφαιρίδιο εκτοξεύτηκε με αρχική ταχύτητα $v_{o(\min)}$ ώστε να φτάσει στο «άπειρο» με μηδενική κινητική ενέργεια : $K_{\infty} = 0$.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που εκτοξεύτηκε το σφαιρίδιο από απόσταση r και τη στιγμή που φτάνει σε «άπειρη» απόσταση από το Q :

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\infty} + U_{\infty} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{o(\min)}^2 + K_c \frac{Qq}{r} = 0 + 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{o(\min)}^2 = -K_c \frac{Qq}{r} \Leftrightarrow v_{o(\min)}^2 = -\frac{2K_c Qq}{mr} \Leftrightarrow$$

$$v_{o(\min)} = \sqrt{-\frac{2K_c Qq}{mr}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_{o(\min)} = \sqrt{-\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-4}) \cdot 10^{-6}}{10^{-2} \cdot 10^{-1}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{1800} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{o(\min)} = 30\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

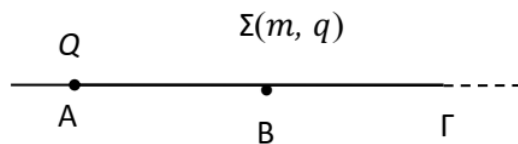
Επομένως, για να διαφύγει το σφαιρίδιο στο «άπειρο» πρέπει να εκτοξευτεί με αρχική ταχύτητα :

$$v_o' \geq 30\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλια

- 1) Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και δεν έχει ταχύτητα ή ορμή.
- 2) Στο ερώτημα 4.3 η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητά μόνο το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής ή ζητά και την κατεύθυνσή του.
- 3) Στο ερώτημα 4.4 η διατύπωση «Για ποιες τιμές της αρχικής ταχύτητάς του, το φορτίο q καταλήγει σε άπειρη απόσταση από το Q» είναι ασαφής.
Μία καλύτερη διατύπωση είναι «Να υπολογίσετε το μέτρο της ελάχιστης αρχικής ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί το σφαιρίδιο ώστε να φτάσει σε άπειρη απόσταση από το Q».

14. (21604) Σημειακό ηλεκτρικό φορτίο $Q = 0,4 \mu\text{C}$ βρίσκεται σταθερά στερεωμένο στο σημείο Α λείου οριζόντιου επιπέδου. Το δάπεδο είναι κατασκευασμένο από μονωτικό υλικό. Τοποθετούμε στο σημείο Β του οριζόντιου επιπέδου, ένα αρχικά ακίνητο σημειακό φορτισμένο αντικείμενο Σ , το οποίο έχει μάζα $m = 2 \text{ mg}$ και ηλεκτρικό φορτίο $q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, και το οποίο στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται ότι $(AB) = (B\Gamma) = 1 \text{ m}$ και η ηλεκτρική σταθερά $k_c = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$. Θεωρούμε μηδενική την αντίσταση του αέρα και δεν λαμβάνεται υπόψη η δύναμη της βαρύτητας. Να υπολογίσετε:



4.1. Την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος, που περιλαμβάνει το σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q και το σημειακό φορτισμένο αντικείμενο Σ , όταν το Σ βρίσκεται ακίνητο στο σημείο Β.

Μονάδες 5

4.2. Την αύξηση ή την ελάττωση της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του πιο πάνω συστήματος (Σ, Q) , όταν το αντικείμενο Σ μετακινηθεί από το σημείο Β, στο σημείο Γ.

Μονάδες 6

4.3. Την ταχύτητα με την οποία φτάνει το αντικείμενο Σ στο σημείο Γ. Θεωρούμε ότι η μοναδική δύναμη που ασκείται στο Σ είναι η ηλεκτρική δύναμη Coulomb.

Μονάδες 7

4.4. Την ταχύτητα του φορτισμένου αντικειμένου Σ , μόλις αυτό φτάσει σε σημείο εκτός του ηλεκτρικού πεδίου του σημειακού φορτίου Q . Θεωρούμε ότι η μοναδική δύναμη που ασκείται στο Σ είναι η δύναμη Coulomb.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων Q, q υπολογίζεται από τη σχέση :

$$U_{\text{αρχ}} = K_c \frac{Qq}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{1} \text{ J} \Rightarrow U_{\text{αρχ}} = 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

4.2

Η απωστική ηλεκτρική δύναμη θα μετακινήσει το σωματίο πάνω στην ευθεία ΑΒ, ώστε να απομακρύνεται από το Α.

Τη στιγμή που το σωματίο φτάνει στο Γ, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U_{\text{τελ}} = K_c \frac{Qq}{2r} = \frac{1}{2} U_{\text{αρχ}} \Rightarrow U_{\text{τελ}} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

Η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας είναι :

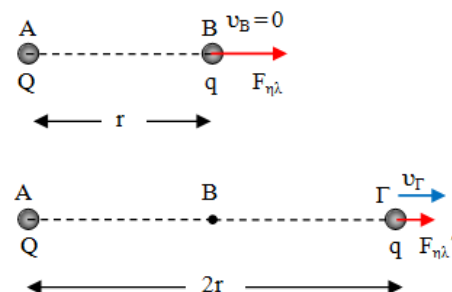
$$\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = (3,6 \cdot 10^{-5} - 7,2 \cdot 10^{-5}) \text{ J} \Rightarrow \Delta U = -3,6 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

Επομένως, κατά τη μετάβαση του σωματίου από το Β στο Γ η δυναμική ενέργεια του συστήματος ελαττώθηκε κατά $3,6 \cdot 10^{-5} \text{ J}$.

4.3

Η ηλεκτρική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο το σωματίο στο Β και τη στιγμή που φτάνει στο Γ :



$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 + U_{\text{τελ}} = 0 + U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\text{τελ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 = -\Delta U \Leftrightarrow$$

$$v_{\Gamma}^2 = -\frac{2(\Delta U)}{m} \Leftrightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{-\frac{2(\Delta U)}{m}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_{\Gamma} = \sqrt{-\frac{2 \cdot (-3,6 \cdot 10^{-5})}{2 \cdot 10^{-6}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{36} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\Gamma} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο το σωματίο στο Β και τη στιγμή που φτάνει στο «άπειρο» :

$$K_{\infty} + U_{\infty} = K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 + 0 = 0 + U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = U_{\alpha\rho\chi} \Leftrightarrow v_{\infty}^2 = \frac{2U_{\alpha\rho\chi}}{m} \Leftrightarrow v_{\infty} = \sqrt{\frac{2U_{\alpha\rho\chi}}{m}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-6}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{72} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\infty} = 6\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

15. (21822) Κατά την εξέλιξη ενός πειράματος, σε σωλήνα κενού, ένα μικρό σωματίδιο (1) μάζας $m_1 = 70 \mu\text{g}$, φορτισμένο με ηλεκτρικό φορτίο $q_1 = 7 \mu\text{C}$ κινείται ευθύγραμμα εναντίον άλλου σωματιδίου (2) μάζας $m_2 = m_1$, φορτισμένου με το ίδιο ακριβώς ηλεκτρικό φορτίο ($q_2 = q_1$). Αρχικά το σωματίδιο (2) συγκρατείται ακίνητο με κατάλληλο μηχανισμό και το σωματίδιο (1) έχει ταχύτητα μέτρου $v_0 = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ όταν βρίσκεται αρκετά μακριά από το σωματίδιο (2), ώστε να μην αλληλεπιδρούν, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το κινούμενο σωματίδιο (1) επιβραδύνεται από την ηλεκτρική άπωση που δέχεται από το (2), καθώς πλησιάζει προς αυτό. Όταν το σωματίδιο (1) έχει πλησιάσει το ακίνητο σωματίδιο (2) σε απόσταση d_1 , έχει υποδιπλασιαστεί το μέτρο της ταχύτητάς του ($v_1 = \frac{v_0}{2}$) και ακριβώς εκείνη τη στιγμή ο μηχανισμός



απελευθερώνει το σωματίδιο m_2 , το οποίο πλέον κινείται ελεύθερα εξαιτίας μόνο της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο φορτισμένων σωματιδίων.

Να υπολογίσετε:

4.1. Την απόσταση d_1 .

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωματιδίων, στη διάρκεια της παραπάνω αλληλεπίδρασης μεταξύ τους.

Μονάδες 6

4.3. Το μέτρο της ταχύτητας των σωματιδίων όταν βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση

Μονάδες 6

4.4. Την ελάχιστη απόσταση στην οποία θα πλησιάσουν μεταξύ τους τα δύο σωματίδια.

Μονάδες 7

Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά στο κενό $K_{\eta\lambda} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$, τα σωματίδια έχουν ασήμαντες διαστάσεις, μαγνητικά πεδία εξαιτίας της κίνησης των φορτισμένων σωματιδίων αγνοούνται και οι δυνάμεις ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης είναι οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια κατά τη διάρκεια του πειράματος που περιγράψαμε.

Απάντηση

4.1

Η ηλεκτρική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή. Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που εκτοξεύεται το σφαιρίδιο από «άπειρη» απόσταση και τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση είναι d_1 :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{d_1} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + 0 \Rightarrow$$

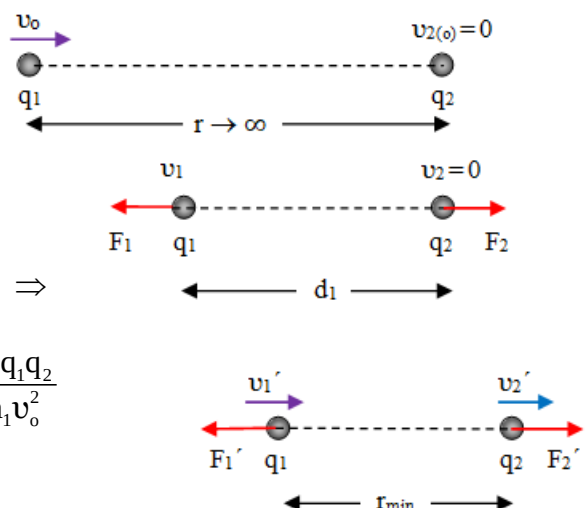
$$K_c \frac{q_1 q_2}{d_1} = \frac{1}{2} m_1 (v_0^2 - \frac{v_1^2}{4}) \Leftrightarrow K_c \frac{q_1 q_2}{d_1} = \frac{3}{8} m_1 v_0^2 \Leftrightarrow d_1 = \frac{8 K_c q_1 q_2}{3 m_1 v_0^2}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (7 \cdot 10^{-6})^2}{3 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \cdot (2 \cdot 10^4)^2} \text{ m} \Rightarrow d_1 = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

4.2

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 1ου σωματιδίου.

Για το χρονικό διάστημα που συγκρατείται ακίνητο το 2ο σωματίδιο, η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι (αλγεβρικά):



$$\Delta p_{\sigma} = \Delta p_1 = m_1 v_1 - m_1 v_o = m_1 (v_1 - v_o) \Rightarrow \Delta p_{\sigma} = 7 \cdot 10^{-8} \text{ Kg} \cdot (10^4 - 2 \cdot 10^4) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_{\sigma} = -7 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Για το χρονικό διάστημα που κινείται και το 2ο σωματίδιο, το σύστημα είναι μονωμένο άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή : $\vec{p}_{\sigma(\text{τελ})} = \vec{p}_{\sigma(\text{αρχ})}$.

$$\text{Επομένως : } \Delta p_{\sigma'} = p_{\sigma(\text{τελ})} - p_{\sigma(\text{αρχ})} \Rightarrow \Delta p_{\sigma'} = 0.$$

$$\text{Άρα, η συνολική μεταβολή της ορμής είναι : } \Delta p_{\sigma(\text{ολ})} = \Delta p_{\sigma} + \Delta p_{\sigma'} = -7 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Το μέτρο της μεταβολής της ορμής είναι : } |\Delta p_{\sigma(\text{ολ})}| = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Αρχικά το 1ο έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το 2ο, με αποτέλεσμα να μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση. Αφού το μέτρο της ταχύτητας του 1ου μειώνεται ενώ του 2ου αυξάνεται, κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους θα αποκτήσουν ίσα μέτρα ($v_1' = v_2' = v$). Στη συνέχεια η ταχύτητα του 2ου είναι μεγαλύτερη από του 1ου, με αποτέλεσμα η μεταξύ τους απόσταση να αυξάνεται.

Επομένως, **η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες.**

Το σύστημα είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική κατάσταση τη στιγμή που το 1ο έχει ταχύτητα $\vec{v}_1$ και τελική τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες :

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{αρχ})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{τελ})} \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_1 v + m_2 v \xrightarrow{m_2 = m_1} m_1 v_1 = 2m_1 v \Leftrightarrow v = \frac{v_1}{2} \Rightarrow v = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη, οι ταχύτητες έχουν μέτρα :

$$v_1' = v_2' = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που το 1ο βρίσκεται σε «άπειρη» απόσταση και τη στιγμή που η απόστασή τους είναι ελάχιστη :

$$K_{\text{τελ}}' + U_{\text{τελ}}' = K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} = \frac{1}{2} m_1 v_o^2 + 0 \xrightarrow{m_2 = m_1, v = \frac{v_o}{4}}$$

$$m_1 \frac{v_o^2}{16} + K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} = \frac{1}{2} m_1 v_o^2 \Leftrightarrow K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} = \frac{7 m_1 v_o^2}{16} \Leftrightarrow r_{\min} = \frac{16 K_c q_1 q_2}{7 m_1 v_o^2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } r_{\min} = \frac{16 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (7 \cdot 10^{-6})^2}{7 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \cdot (2 \cdot 10^4)^2} \text{ m} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \text{ή} \quad r_{\min} = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Σχόλιο

Στο ερώτημα 4.2 δεν είναι σαφές αν ζητείται η μεταβολή της ορμής στο χρονικό διάστημα που το 2ο σωματίδιο είναι ακίνητο ή (και) στο χρονικό διάστημα που κινούνται και τα δύο.

16. (21990) Δύο μικρά μεταλλικά σφαιρίδια (Σ_1) και (Σ_2) με μάζες $m_1 = 2 \text{ g}$ και $m_2 = 4 \text{ g}$ αντίστοιχα, συγκρατούνται αρχικά ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο μονωτικό δάπεδο, σε θέσεις τέτοιες, ώστε τα κέντρα τους να απέχουν μεταξύ τους $r = 3 \text{ cm}$. Τα δύο σφαιρίδια (Σ_1) και (Σ_2) είναι ηλεκτρικά φορτισμένα με φορτία $Q_1 = 4 \text{ }\mu\text{C}$ και $Q_2 = 9 \text{ }\mu\text{C}$ αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ τα δύο σφαιρίδια αφήνονται ταυτόχρονα ελεύθερα και αρχίζουν να κινούνται εξαιτίας των ηλεκτρικών δυνάμεων με τις οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Να υπολογίσετε:

4.1. Την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιριδίων τη στιγμή που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $r = 3 \text{ cm}$.

Μονάδες 6

4.2. Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιριδίων τη χρονική στιγμή t_1 , κατά την οποία η μεταξύ τους απόσταση έχει διπλασιαστεί.

Μονάδες 7

4.3. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής κάθε σφαιριδίου τη χρονική στιγμή t_1 .

Μονάδες 6

4.4. Αν εκτοξεύαμε τα δύο σφαιρίδια από άπειρη απόσταση, το ένα προς το άλλο, πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα κέντρα τους, ποια θα έπρεπε να είναι τα μέτρα των ταχυτήτων τους ώστε να φτάσουν σε ελάχιστη απόσταση 3 cm με μηδενικές ταχύτητες;

Μονάδες 6

Να θεωρήσετε ασημαντες τις αντιστάσεις του αέρα. Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά στο κενό (αέρα) $k_c = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

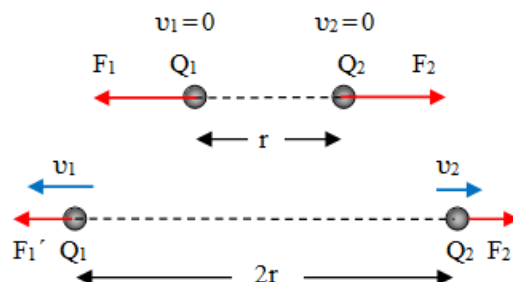
Απάντηση

4.1

Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$U = K_c \frac{Q_1 Q_2}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2}} \text{ J} = 108 \cdot 10^{-1} \text{ J} \quad \text{ή}$$

$$U = 10,8 \text{ J}.$$



4.2

Τα σφαιρίδια κινούνται με την επίδραση μόνο των αμοιβαίων ηλεκτρικών δυνάμεων, άρα το σύστημα είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 2ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(τελ)} = p_{ολ(αρχ)} \Leftrightarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 = 0 \xrightarrow{m_2 = 2m_1} 2m_1 v_2 = m_1 v_1 \Leftrightarrow v_1 = 2v_2.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που αφήνονται ελεύθερα σε απόσταση r και τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση είναι $2r$:

$$K_{τελ} + U_{τελ} = K_{αρχ} + U_{αρχ} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + K_c \frac{Q_1 Q_2}{2r} = 0 + K_c \frac{Q_1 Q_2}{r} \xrightarrow{m_2 = 2m_1, v_1 = 2v_2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 (2v_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m_1 v_2^2 = U - \frac{U}{2} \Leftrightarrow 3m_1 v_2^2 = \frac{U}{2} \Leftrightarrow v_2^2 = \frac{U}{6m_1} \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{U}{6m_1}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_2 = \sqrt{\frac{10,8}{6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = \sqrt{9 \cdot 10^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Επομένως : } v_1 = 2v_2 = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Το μέτρο της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σφαιριδίων, όταν η απόστασή τους είναι $2r$, υπολογίζεται από το νόμο του Coulomb :

$$F_1' = F_2' = K_c \frac{|Q_1 Q_2|}{(2r)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{(6 \cdot 10^{-2})^2} \text{ N} \Rightarrow F_1' = F_2' = 90 \text{ N}.$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη συνισταμένη

$$\text{δύναμη} : \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_{\eta\lambda}.$$

Άρα, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής κάθε σφαιριδίου, τη χρονική στιγμή t_1 , είναι :

$$\left| \frac{dp_1}{dt} \right| = F_1' = 90 \text{ N},$$

$$\left| \frac{dp_2}{dt} \right| = F_2' = 90 \text{ N}.$$

4.4

Έστω u_1, u_2 τα μέτρα των ταχυτήτων εκτόξευσης των σφαιριδίων και $r_{\min}$ η ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 1ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ}(\alpha\rho\chi)} = p_{\text{ολ}(\tau\epsilon\lambda)} \Leftrightarrow m_1 u_1 - m_2 u_2 = 0 \xrightarrow{m_2 = 2m_1}$$

$$m_1 u_1 = 2m_1 u_2 \Leftrightarrow u_1 = 2u_2.$$

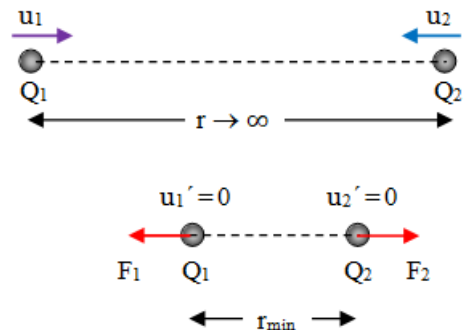
Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που εκτοξεύονται και τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση είναι ελάχιστη :

$$K_{\alpha\rho\chi}' + U_{\alpha\rho\chi}' = K_{\tau\epsilon\lambda}' + U_{\tau\epsilon\lambda}' \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 + 0 = 0 + K_c \frac{Q_1 Q_2}{r_{\min}} \xrightarrow{m_2 = 2m_1, u_1 = 2u_2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 (2u_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m_1 u_2^2 = K_c \frac{Q_1 Q_2}{r_{\min}} \Leftrightarrow 3m_1 u_2^2 = K_c \frac{Q_1 Q_2}{r_{\min}} \Leftrightarrow u_2^2 = \frac{K_c Q_1 Q_2}{3m_1 r_{\min}} \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{\frac{K_c Q_1 Q_2}{3m_1 r_{\min}}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } u_2 = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u_2 = \sqrt{18 \cdot 10^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u_2 = 30\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Επομένως : } u_1 = 2u_2 = 60\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



17. (22075) Σφαίρα με φορτίο $Q = 8 \mu\text{C}$ βρίσκεται ακίνητη στο έδαφος και σε ύψος $h = 90 \text{ cm}$ πάνω από αυτή και στην ίδια κατακόρυφο, φέρεται άλλη σφαίρα μάζας $m = 4 \text{ g}$ και φορτίου $q = 10^{-7} \text{ C}$.

Να υπολογίσετε:

4.1. την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών.

Μονάδες 3

Κάποια στιγμή η σφαίρα μάζας m αφήνεται να κινηθεί. Να βρείτε:

4.2. το έργο της δύναμης του ηλεκτροστατικού πεδίου κατά την μετακίνηση της σφαίρας από την αρχική θέση μέχρι σημείο Α, που απέχει από το έδαφος ύψος $\frac{2h}{3}$.

Μονάδες 6

4.3. την ταχύτητα που έχει όταν διέρχεται από το σημείο Α.

Μονάδες 6

4.4. Το ελάχιστο ύψος από το έδαφος καθώς πλησιάζει το φορτίο Q .

Μονάδες 7

Δίνονται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $K = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$.

Απάντηση

4.1

Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U_O = K_c \frac{Qq}{h} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-7}}{9 \cdot 10^{-1}} \text{ J} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

4.2

Όταν η σφαίρα βρίσκεται στη θέση Α, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U_A = K_c \frac{Qq}{\frac{2h}{3}} = \frac{3}{2} K_c \frac{Qq}{h} = \frac{3}{2} U_O \Rightarrow U_A = 12 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Από τη σχέση μεταξύ του έργου της δύναμης του ηλεκτρικού πεδίου και της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας προκύπτει :

$$W_{\eta\lambda(O \rightarrow A)} = U_O - U_A = (8 \cdot 10^{-3} - 12 \cdot 10^{-3}) \text{ J} \Rightarrow W_{\eta\lambda(O \rightarrow A)} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

4.3

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $O \rightarrow A$:

$$K_A - K_O = W_{B(O \rightarrow A)} + W_{\eta\lambda(O \rightarrow A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - 0 = mg \frac{h}{3} + W_{\eta\lambda(O \rightarrow A)} \Leftrightarrow v_A^2 = 2 \left(\frac{gh}{3} + \frac{W_{\eta\lambda(O \rightarrow A)}}{m} \right) \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2 \left(\frac{10 \cdot 0,9}{3} - \frac{4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow v_A = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

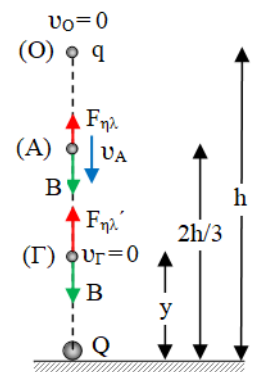
4.4

Αρχικά το βάρος έχει μεγαλύτερο μέτρο από την ηλεκτρική δύναμη ($B > F_{\eta\lambda}$) με αποτέλεσμα η σφαίρα να επιταχύνεται μέχρι κάποιο σημείο, στο οποίο οι δύο δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα : $F_{\eta\lambda} = B$.

Στη συνέχεια είναι $F_{\eta\lambda} > B$, άρα η συνισταμένη έχει φορά προς τα πάνω και το σώμα επιβραδύνεται μέχρι το σημείο Γ στο οποίο μηδενίζεται η ταχύτητα.

Τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της σφαίρας, η απόσταση από το έδαφος είναι ελάχιστη.

Έστω y το ελάχιστο ύψος από το έδαφος.



Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $O \rightarrow \Gamma$:

$$K_{\Gamma} - K_O = W_{B(O \rightarrow \Gamma)} + W_{\eta\lambda(O \rightarrow \Gamma)} \Leftrightarrow 0 - 0 = mgh - mgy + U_O - U_{\Gamma} \Leftrightarrow 0 = mgh - mgy + U_O - K_c \frac{Qq}{y} \Leftrightarrow$$

$$K_c \frac{Qq}{y} + mgy = mgh + U_O \Rightarrow 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-7}}{y} + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot y = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0,9 + 8 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\frac{7,2 \cdot 10^{-3}}{y} + 40 \cdot 10^{-3} \cdot y = 44 \cdot 10^{-3} \xrightarrow{\times y} 7,2 + 40y^2 = 44y \xrightarrow{:4} 10y^2 - 11y + 1,8 = 0.$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1,8 = 121 - 72 \Rightarrow \Delta = 49.$$

$$y = \frac{11 \pm 7}{20} m \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{11-7}{20} m = 0,2 m, & \text{δεκτή} \\ y = \frac{11+7}{20} m = 0,9 m, & \text{απορρίπτεται, γιατί αντιστοιχεί στην αρχική θέση O.} \end{cases}$$

Εναλλακτικός τρόπος (χωρίς διακρίνουσα)

$$K_{\Gamma} - K_O = W_{B(O \rightarrow \Gamma)} + W_{\eta\lambda(O \rightarrow \Gamma)} \Leftrightarrow 0 - 0 = mgh - mgy + U_O - U_{\Gamma} \Leftrightarrow 0 = mgh - mgy + K_c \frac{Qq}{h} - K_c \frac{Qq}{y} \Leftrightarrow$$

$$mgh - mgy + K_c Qq \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{y} \right) = 0 \Leftrightarrow mgh - mgy + K_c Qq \frac{y-h}{hy} = 0 \Leftrightarrow mgh - mgy - K_c Qq \frac{h-y}{hy} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(h-y) \left(mg - \frac{K_c Qq}{hy} \right) = 0. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτουν δύο λύσεις :

i) $y = h = 0,9 m$ (απορρίπτεται, γιατί είναι στην αρχική θέση O)

$$\text{ii) } mg - \frac{K_c Qq}{hy} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{K_c Qq}{mgh} \Rightarrow y = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0,9} m \Rightarrow y = 0,2 m. \quad (\text{δεκτή})$$

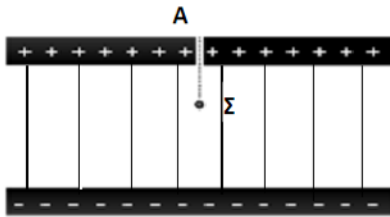
➤ Επομένως, το ελάχιστο ύψος που θα φτάσει η σφαίρα πάνω από το έδαφος είναι $y = 0,2 m$.

Σχόλιο :

Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι οι δυνάμεις από τον ατμοσφαιρικό αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

18. (16108) Το πείραμα του Millikan, γνωστό και ως πείραμα της σταγόνας λαδιού, είναι από τα πιο διάσημα πειράματα στην ιστορία της Φυσικής και είχε ως αποτέλεσμα την ακριβή μέτρηση για πρώτη φορά του στοιχειώδους φορτίου (φορτίου του ηλεκτρονίου) το 1909. Η συσκευή με την οποία πραγματοποιήθηκε το πείραμα φαίνεται στη φωτογραφία. Στο κάτω μέρος της συσκευής υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (επίπεδος πυκνωτής με τους οπλισμούς – πλάκες τοποθετημένους οριζόντια).



Αρνητικά φορτισμένες σταγόνες λαδιού εισέρχονται από την οπή A που υπάρχει στον θετικό οπλισμό του οριζόντια επίπεδου πυκνωτή. Όλο το σύστημα βρίσκεται σε κενό. Η σταγόνα Σ, με μάζα $m = 0,1 \text{ g}$ και φορτίο $q = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, κινείται ήδη εντός του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, που έχει ένταση $E = 60 \text{ kV/m}$. Η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι $d = 10 \text{ mm}$.

4.1. Να σχεδιάσετε τη φορά των δυναμικών γραμμών του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, και να υπολογίσετε την ηλεκτρική δύναμη που δέχεται η σταγόνα Σ.

Μονάδες 5

4.2. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται η σταγόνα, καθώς και την κατεύθυνση της κίνησής της. Υπολογίστε την επιτάχυνση με την οποία κινείται.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε το έργο της ηλεκτρικής δύναμης κατά τη μετακίνηση της σταγόνας λαδιού από τον θετικό στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σταγόνας κατά την κίνησή της από τον θετικό στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή.

Μονάδες 8

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 10 \text{ m/s}^2$.
Η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Οι δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έχουν φορά από τη θετική προς την αρνητική πλάκα.

Το μέτρο της έντασης του πεδίου είναι : $E = 60 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 6 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης που δέχεται η σταγόνα είναι :

$$F = E|q| = 6 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ C} \Rightarrow F = 9 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

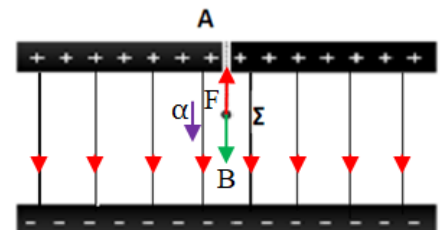
4.2

Η σταγόνα έχει αρνητικό φορτίο, άρα η ηλεκτρική δύναμη έχει φορά προς τα πάνω (αντίθετη από τις δυναμικές γραμμές).

Εκτός από την ηλεκτρική δύναμη, στη σταγόνα ασκείται και το βάρος που έχει μέτρο :

$$B = mg = 10^{-4} \text{ Kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow B = 10 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

Αφού $B > F$, η σταγόνα θα κινηθεί προς τα κάτω με επιτάχυνση μέτρου :



$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{B-F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{(10-9) \cdot 10^{-4} \text{ N}}{10^{-4} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.3

Κατά τη διάρκεια της κίνησης η ηλεκτρική δύναμη έχει αντίθετη φορά από τη μετατόπιση. Μέχρι να φτάσει η σταγόνα στην αρνητική πλάκα, το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι :

$$W_F = F \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -F \cdot d \Rightarrow W_F = -(9 \cdot 10^{-4} \text{ N}) \cdot (10^{-2} \text{ m}) \Rightarrow W_F = -9 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή της σταγόνας από τη θετική στην αρνητική πλάκα :

$$\Delta K = \Sigma W = (\Sigma F) \cdot d = (10^{-4} \text{ N}) \cdot (10^{-2} \text{ m}) \Rightarrow \Delta K = 10^{-6} \text{ J}.$$

Σχόλια :

1) Η έννοια του πυκνωτή είναι εκτός διδακτέας ύλης.

Η διατύπωση «στο θετικό οπλισμό του **οριζόντια επίπεδου πυκνωτή**» είναι λάθος.

Η σωστή διατύπωση είναι : «στον οριζόντιο θετικό οπλισμό του **επίπεδου πυκνωτή**».

2) Η εκφώνηση αναφέρει ότι οι σταγόνες είναι αρνητικά φορτισμένες και στη συνέχεια δίνει το φορτίο μιας σταγόνας $q = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Το σωστό είναι : $q = -1,5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

3) Το «πείραμα» που περιγράφει η εκφώνηση δεν είναι ακριβώς το πείραμα που εκτέλεσε ο R. Millikan.

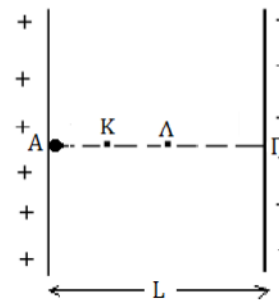
Σύμφωνα με την εκφώνηση, οι σταγόνες κινούνται στο κενό με σταθερή επιτάχυνση.

Στο πείραμα του Millikan οι σταγόνες λαδιού κινούνται στον αέρα και αποκτούν μετά από λίγο σταθερή ταχύτητα.

19. (16130)

Δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $L = 1 \text{ cm}$, είναι φορτισμένες με αντίθετα φορτία, όπως στο παραπάνω σχήμα και δημιουργούν ανάμεσά τους ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πλακών είναι $V = 200 \text{ V}$.

Σωματίο μάζας $m = 10 \text{ g}$ και ηλεκτρικού φορτίου $q = +10^{-8} \text{ C}$, αφήνεται ελεύθερο από ένα σημείο Α πολύ κοντά στη θετική πλάκα.



4.1. Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Μονάδες 5

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματίου.

Μονάδες 6

4.3. Τη χρονική στιγμή t_1 το σωματίο φτάνει στο σημείο Γ που βρίσκεται στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σωματίου στο σημείο Γ.

Μονάδες 7

4.4. Το σωματίο κατά την πορεία του από το σημείο Α στο σημείο Γ διέρχεται και από τα σημεία Κ και Λ που απέχουν απόσταση $(ΚΛ) = 0,25 \text{ cm}$. Αν το δυναμικό στο σημείο Κ είναι $V_K = 80 \text{ V}$, να υπολογίσετε το δυναμικό στο σημείο Λ.

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε ότι το βάρος του σωματίου είναι αμελητέο.

Απάντηση

4.1

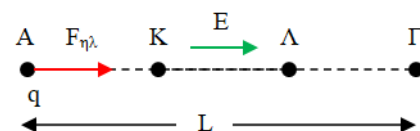
Το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται από τη σχέση :

$$E = \frac{V}{L} = \frac{2 \cdot 10^2 \text{ V}}{10^{-2} \text{ m}} \Rightarrow E = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

4.2

Το σωματίο επιταχύνεται με την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης. Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής :

$$\alpha = \frac{F_{\eta\lambda}}{m} = \frac{E|q|}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8} \text{ N}}{10^{-2} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.3

1ος τρόπος (με τις εξισώσεις κίνησης)

Το σωματίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$), μέχρι να φτάσει στην αρνητική πλάκα μετά από χρόνο t_1 . Ισχύει :

$$L = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2L}{\alpha} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2L}{\alpha}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}.$$

Το σωματίο φτάνει στην αρνητική πλάκα με ταχύτητα μέτρου :

$$v_1 = \alpha t_1 = \left(2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot (1 \text{ s}) \Rightarrow v_1 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από τη θετική στην αρνητική πλάκα :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\eta\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = F_{\eta\lambda} L \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 = m \alpha L \Leftrightarrow v_1^2 = 2 \alpha L \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2 \alpha L}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_1 = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Κ, Λ και το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου συνδέονται με τη σχέση : $V_K - V_\Lambda = E \cdot (ΚΛ)$.

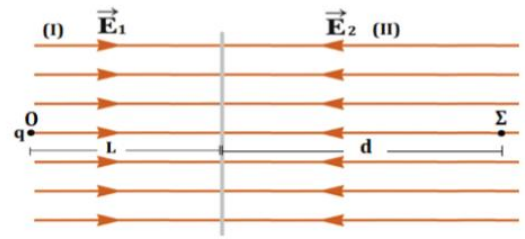
Επομένως :

$$V_\Lambda = V_K - E \cdot (ΚΛ) \Rightarrow V_\Lambda = 80 \text{ V} - \left(2 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \cdot (0,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \Rightarrow V_\Lambda = 80 \text{ V} - 50 \text{ V} = 30 \text{ V}.$$

Σχόλιο : Η έννοια του πυκνωτή είναι εκτός διδακτέας ύλης.

20. (16137)

Σωματίδιο μάζας $m = 2 \text{ mg}$ με ηλεκτρικό φορτίο $q = +2 \mu\text{C}$, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, αφήνεται σε ένα σημείο O της περιοχής (I), στην οποία υπάρχει **οριζόντιο ηλεκτροστατικό πεδίο** με ένταση μέτρου $E_1 = 1 \text{ V/m}$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, το σωματίδιο αφού έχει διανύσει απόσταση L μέσα στην περιοχή (I), έχει αποκτήσει ταχύτητα v_1 και εισέρχεται αμέσως στην περιοχή (II), στην οποία υπάρχει οριζόντιο **ηλεκτροστατικό πεδίο έντασης E_2 , αντίθετης κατεύθυνσης από το πεδίο έντασης E_1** (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα). Το σωματίδιο τη χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ s}$ βρίσκεται στη θέση Σ , έχοντας διανύσει μια απόσταση d στην περιοχή (II) και έχει ταχύτητα μέτρου $v_2 = 1 \text{ m/s}$.



4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματιδίου στην περιοχή (I).

Μονάδες 5

4.2. Να υπολογίσετε την απόσταση L και το μέτρο της ταχύτητας v_1 του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t_1 .

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε το μέτρο της έντασης E_2 και την απόσταση d που διανύει το σωματίδιο στην περιοχή (II).

Μονάδες 8

4.4. Αν το δυναμικό του σημείου O είναι $V_O = 10 \text{ V}$ να υπολογίσετε το δυναμικό στο σημείο Σ .

Μονάδες 6

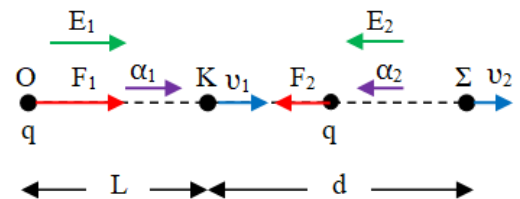
Απάντηση

4.1

Στο σωματίδιο ασκείται σταθερή δύναμη από το 1ο πεδίο, μέτρου $F_1 = E_1|q| = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N}$.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση μέτρου

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ N}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.2

Στο 1ο πεδίο το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Σε χρονική διάρκεια t_1 θα διανύσει απόσταση :

$$L = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 \text{ m} \Rightarrow L = 2 \text{ m}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή t_1 είναι : $v_1 = \alpha_1 t_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.3

Στο 2ο πεδίο το σωματίδιο δέχεται σταθερή δύναμη $\vec{F}_2$ αντίρροπη της ταχύτητας και αποκτά σταθερή επιτάχυνση (επιβράδυνση) $\vec{\alpha}_2$. Η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης είναι :

$$\alpha_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(1 - 2) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(4 - 2) \text{ s}} \Rightarrow \alpha_2 = -0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής υπολογίζουμε το μέτρο της έντασης $\vec{E}_2$:

$$F_2 = m|\alpha_2| \Leftrightarrow E_2|q| = m|\alpha_2| \Leftrightarrow E_2 = \frac{m|\alpha_2|}{|q|} \Rightarrow E_2 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 \text{ N}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ C}} \Rightarrow E_2 = 0,5 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Σε χρονική διάρκεια $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 2 \text{ s}$ το σωματίδιο διανύει απόσταση :

$$d = v_1(\Delta t_2) + \frac{1}{2} a_2(\Delta t_2)^2 = \left[2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-0,5) \cdot 2^2 \right] \text{m} \Rightarrow d = 3 \text{m}.$$

4.4

1ος τρόπος

Έστω K το σημείο της διαδρομής στο όριο των δύο πεδίων. Ισχύουν οι σχέσεις :

$$V_O - V_K = E_1 \cdot L \quad (1)$$

$$V_\Sigma - V_K = E_2 \cdot d \quad (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τη σχέση (1) από την (2) :

$$V_\Sigma - V_K - V_O + V_K = E_2 \cdot d - E_1 \cdot L \Leftrightarrow V_\Sigma - V_O = E_2 \cdot d - E_1 \cdot L \Leftrightarrow V_\Sigma = V_O + E_2 \cdot d - E_1 \cdot L \Rightarrow$$

$$V_\Sigma = (10 + 0,5 \cdot 3 - 1 \cdot 2) \text{ V} \Rightarrow V_\Sigma = 9,5 \text{V}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $O \rightarrow \Sigma$:

$$W_{\eta\lambda} = \Delta K \Leftrightarrow q(V_O - V_\Sigma) = \frac{1}{2} m v_2^2 - 0 \Leftrightarrow V_\Sigma = V_O - \frac{m v_2^2}{2q} \Rightarrow V_\Sigma = 10 \text{V} - \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \text{V} \Rightarrow V_\Sigma = 9,5 \text{V}.$$

Σχόλια :

1) Η έκφραση «οριζόντιο ηλεκτροστατικό πεδίο» είναι λάθος.

Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι οριζόντιες.

2) Η διατύπωση «ηλεκτροστατικό πεδίο έντασης $\vec{E}_2$ αντίθετης κατεύθυνσης από το πεδίο έντασης $\vec{E}_1$ » είναι λάθος.

Η ένταση $\vec{E}_2$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την $\vec{E}_1$.

3) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι τα δύο ηλεκτροστατικά πεδία είναι ομογενή.

4) Στο σχήμα, πρέπει οι δυναμικές γραμμές του 2ου πεδίου να είναι πιο αραιές από του 1ου, αφού η ένταση $\vec{E}_2$ έχει μικρότερο μέτρο από την $\vec{E}_1$.

5) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι στο σωματίδιο δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις εκτός από την ηλεκτρική δύναμη.

21. (16329)

Δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες φορτισμένες με αντίθετα φορτία, όπως στο σχήμα, δημιουργούν ανάμεσά τους ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Η διαφορά δυναμικού των δύο πλακών είναι $V = 1 \text{ KV}$ και η απόσταση μεταξύ τους $d = 5 \text{ mm}$.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, από το σημείο Α του πεδίου, ένα θετικό φορτίο q_1 επιταχύνεται από την ηρεμία χωρίς αντιστάσεις, μόνο με την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου και φτάνει στο σημείο Β. Η απόσταση (ΑΒ) είναι ίση με $(AB) = d = 5 \text{ mm}$.

Γνωρίζετε ότι: το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι ίσο με $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$,

η μάζα του ίση με $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$ ενώ για το θετικό φορτίο q_1 ισχύει η σχέση $q_1 = e$ και η μάζα του είναι ίση με $m_1 = 2m_e$.

4.1. Να προσδιορίσετε την ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

Μονάδες 4

4.2. Αν από το σημείο Β, επιταχυνθεί από την ηρεμία ένα ηλεκτρόνιο τότε να βρείτε το λόγο των μέτρων των επιταχύνσεων που αποκτά καθένα από τα σωματίδια.

Μονάδες 8

4.3. Να προσδιορίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτά το φορτίο q_1 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το έργο για τη μετακίνηση του φορτίου q_1 μεταξύ των σημείων Α και Β.

Το αποτέλεσμα για το έργο να δοθεί σε eV .

Μονάδες 5

4.4. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της θέσης του φορτίου q_1 σε συνάρτηση με το τετράγωνο του χρόνου $(x - t^2)$, ορίζοντας έναν άξονα x , με $x_0 = 0$ στο σημείο Α, δηλαδή στο σημείο στο οποίο αρχίζει να κινείται το φορτίο αυτό.

Μονάδες 8

Απάντηση

4.1

Η ένταση $\vec{E}$ του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έχει κατεύθυνση από τη θετική προς την αρνητική πλάκα και μέτρο :

$$E = \frac{V}{d} = \frac{10^3 \text{ V}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \Rightarrow E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

4.2

Κάθε σωματίο επιταχύνεται με την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης. Το μέτρο της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής.

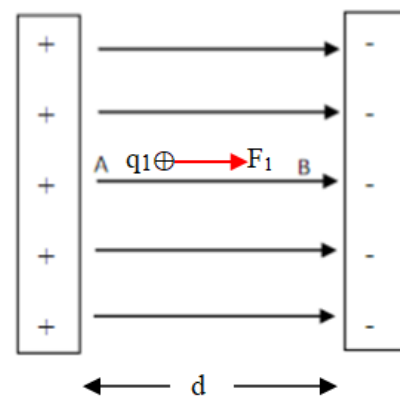
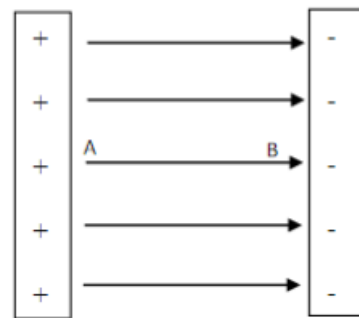
Σωματίο φορτίου q_1

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{E|q_1|}{m_1} \xrightarrow{q_1=e, m_1=2m_e} \alpha_1 = \frac{Ee}{2m_e}. \quad (1)$$

Ηλεκτρόνιο

$$\alpha_e = \frac{F_e}{m_e} \Rightarrow \alpha_e = \frac{Ee}{m_e}. \quad (2)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει : } \alpha_1 = \frac{1}{2} \alpha_e \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_e} = \frac{1}{2}.$$



4.3

Σωματίο φορτίου q_1

$$\alpha_1 = \frac{Ee}{2m_e} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ m}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_1 \cong 1,76 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης κατά τη διαδρομή $A \rightarrow B$ είναι :

$$W_{\eta\lambda(A \rightarrow B)} = q_1 \cdot V_{AB} = e \cdot V_{AB} \Rightarrow W_{\eta\lambda(A \rightarrow B)} = e \cdot 1000V \Rightarrow W_{\eta\lambda(A \rightarrow B)} = 1000 \text{ eV}.$$

4.4

Το σωματίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Η εξίσωση της θέσης του είναι :

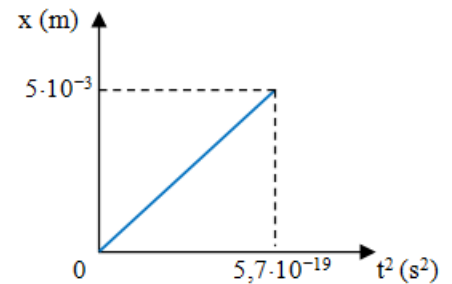
$$x = \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 \Rightarrow x \cong \frac{1}{2} \cdot 1,76 \cdot 10^{16} \cdot t^2 \Rightarrow x \cong 8,8 \cdot 10^{15} \cdot t^2. \quad (3)$$

$$\text{Για } t = 0 \xrightarrow{(3)} x = 0.$$

$$\text{Για } x = d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \xrightarrow{(3)} t^2 \cong 5,7 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2.$$

[ή $t_1 \cong 7,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$, η χρονική στιγμή που φτάνει στο B]

Σύμφωνα με τη σχέση (3) η θέση x είναι ανάλογη του t^2 , άρα το διάγραμμα της σχέσης $x = f(t^2)$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



Σχόλια :

1) Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και δεν έχει μάζα ούτε κινείται ή επιταχύνεται.

Η εκφώνηση έπρεπε να λέει : « . . . ένα σωματίδιο με θετικό φορτίο q_1 επιταχύνεται . . . », « . . . η μάζα του σωματιδίου είναι . . . », « . . . για τη μετακίνηση του σωματιδίου . . . ».

2) Στο ερώτημα 4.4 έπρεπε να δίνεται ότι η χρονική στιγμή που ξεκινά το σωματίο είναι $t_0 = 0$.

Αν η εκφώνηση έδινε τη μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$, τότε το μέτρο της επιτάχυνσης θα

ήταν $\alpha_1 = \frac{16}{9} \cdot 10^{16} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, η χρονική στιγμή που φτάνει στο B θα ήταν ακριβώς $t = \frac{3}{4} \cdot 10^{-9} \text{ s} = 7,5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$

(δηλαδή $t^2 = \frac{9}{16} \cdot 10^{-18} \text{ s}^2$) και δεν θα απαιτούνταν προσεγγίσεις.

3) Η μονάδα έργου 1 eV (ηλεκτρονιοβόλτ) είναι εκτός διδακτέας ύλης.

22. (16367)

Οι δύο φορτισμένες οριζόντιες μεταλλικές πλάκες του σχήματος συνδέονται με πηγή συνεχούς τάσης V και απέχουν απόσταση d . Στο χώρο μεταξύ των πλακών, στο μέσο της απόστασης τους, αιωρείται μικρή σταγόνα μάζας $m = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$ και φορτίου $q = -2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.



4.1. Αν η σταγόνα ισορροπεί, να υπολογίσετε την ένταση του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών.

Μονάδες 6

Διπλασιάζουμε την τάση της πηγής, διατηρώντας σταθερή την απόσταση των πλακών, οπότε η σταγόνα αρχίζει να κινείται κατακόρυφα.

4.2. Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί η σταγόνα και να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης που θα αποκτήσει.

Μονάδες 6

4.3. Αν η σταγόνα φτάνει στην πλάκα, προς την οποία κινήθηκε, με ταχύτητα μέτρου 1 m/s , να υπολογίσετε την απόσταση d μεταξύ των πλακών.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης του βάρους της σταγόνας καθώς και το έργο της ηλεκτρικής δύναμης του πεδίου κατά τη μετακίνηση της σταγόνας από την αρχική της θέση μέχρι τη στιγμή που φτάνει στην πλάκα προς την οποία κινήθηκε.

Μονάδες 7

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει τιμή $g = 10 \text{ m/s}^2$.
Η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Η φορτισμένη σταγόνα δέχεται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και τη δύναμη $\vec{F}$ από το ηλεκτρικό πεδίο.

Αφού η σταγόνα ισορροπεί, οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες, άρα η ηλεκτρική δύναμη είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και έχει μέτρο :

$$F = B = mg. \quad (1)$$

$$\text{Το μέτρο της έντασης του πεδίου είναι : } E = \frac{F}{|q|} \xrightarrow{(1)} E = \frac{mg}{|q|} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ N}}{2 \cdot 10^{-7} \text{ C}} \Rightarrow E = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

4.2

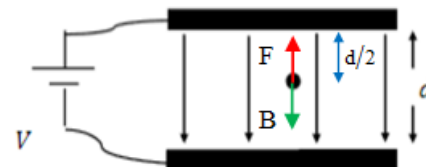
Όταν διπλασιάσουμε την τάση της πηγής, θα διπλασιαστεί το μέτρο της έντασης του πεδίου :

$$E' = \frac{2V}{d} = 2 \cdot \frac{V}{d} \Rightarrow E' = 2E.$$

$$\text{Άρα θα διπλασιαστεί και το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης : } F' = E'|q| = 2E|q| = 2F \xrightarrow{(1)} F' = 2mg.$$

Αφού $F' > B$, η σταγόνα θα κινηθεί προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F' - B}{m} = \frac{2mg - mg}{m} \Rightarrow \alpha = g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.3

1ος τρόπος (με τις εξισώσεις κίνησης)

Η σταγόνα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$), μέχρι να φτάσει στη θετική πλάκα μετά από χρόνο t με ταχύτητα μέτρου v . Ισχύει :

$$v = at \Leftrightarrow t = \frac{v}{a} \Rightarrow t = \frac{1}{10} \text{ s}.$$

Η σταγόνα διανύει απόσταση $\frac{d}{2}$ μέχρι να φτάσει στη θετική πλάκα, άρα ισχύει :

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} at^2 \Leftrightarrow d = at^2 \Rightarrow d = 10 \cdot \frac{1}{100} \text{ m} \Rightarrow d = 0,1 \text{ m}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από την αρχική θέση μέχρι τη θετική πλάκα :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ηλ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} mv^2 - 0 = (\Sigma F) \frac{d}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} mv^2 = ma \frac{d}{2} \Leftrightarrow v^2 = ad \Leftrightarrow d = \frac{v^2}{a} \Rightarrow$$

$$d = \frac{1^2}{10} \text{ m} \Rightarrow d = 0,1 \text{ m}.$$

4.4

Το έργο του βάρους κατά τη μετακίνηση της σταγόνας από την αρχική της θέση μέχρι τη θετική πλάκα είναι : $W_B = mg \frac{d}{2} \sin 180^\circ = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot (-1) \text{ J} \Rightarrow W_B = -10^{-4} \text{ J}.$

Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης κατά τη μετακίνηση της σταγόνας από την αρχική της θέση μέχρι τη θετική πλάκα είναι : $W_{F'} = F' \frac{d}{2} \sin 0^\circ = 2mg \frac{d}{2} = mgd = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-1} \text{ J} \Rightarrow W_{F'} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$

23. (16739)

Στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο που υπάρχει ανάμεσα σε δυο οριζόντιες μεταλλικές πλάκες αμελητέου πάχους, οι οποίες έχουν αντίθετα φορτία $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα, αιωρείται (ισορροπεί) σε σημείο A σωματίδιο μάζας $m = 1 \text{ g}$ και φορτίου q , όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι δύο μεταλλικές πλάκες απέχουν μεταξύ τους απόσταση $L = 2 \text{ cm}$ και έχουν διαφορά δυναμικού $V = 100 \text{ V}$. Αν δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$, να βρεθούν:

4.1. το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

Μονάδες 5

4.2. το πρόσημο και το μέγεθος του φορτίου q .

Μονάδες 6

Με κατάλληλο τρόπο διπλασιάζουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ

των μεταλλικών πλακών. Αν η απόσταση του σημείου A από τον αρνητικό οπλισμό είναι $d = 1,5 \text{ cm}$,

4.3. να βρεθεί το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να συναντήσει το φορτίο q την μεταλλική πλάκα στην οποία θα φτάσει πρώτα.

Μονάδες 7

4.4. Ποιο είναι το έργο της ηλεκτρικής δύναμης κατά την κίνηση του φορτίου από το σημείο A μέχρι την μεταλλική πλάκα, την οποία θα συναντήσει πρώτη.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης του πεδίου είναι :

$$E = \frac{V}{L} = \frac{100 \text{ V}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \Rightarrow E = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

4.2

Το φορτισμένο σωματίδιο δέχεται δύο δυνάμεις : το βάρος $\vec{B}$ και τη δύναμη $\vec{F}$ από το ηλεκτρικό πεδίο. Αφού ισορροπεί, οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες, άρα η ηλεκτρική δύναμη είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και έχει μέτρο :

$$F = B = mg. \quad (1)$$

Ισχύει :

$$E = \frac{F}{|q|} \Leftrightarrow |q| = \frac{F}{E} \xrightarrow{(1)} |q| = \frac{mg}{E} \Rightarrow |q| = \frac{10^{-3} \cdot 10}{5 \cdot 10^3} \text{ C} \Rightarrow |q| = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

Αφού η ηλεκτρική δύναμη έχει αντίθετη φορά από την ένταση του πεδίου, άρα το σωματίδιο έχει αρνητικό φορτίο. Επομένως : $q = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

4.3

Όταν διπλασιάσουμε την τάση της πηγής, θα διπλασιαστεί το μέτρο της έντασης του πεδίου :

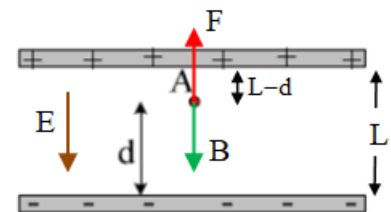
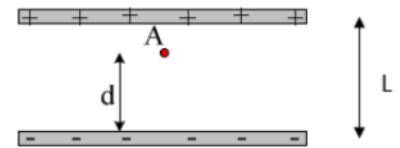
$$E' = \frac{2V}{d} = 2 \cdot \frac{V}{d} \Rightarrow E' = 2E.$$

Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης αποκτά τιμή : $F' = E'|q| = 2E|q| = 2F \xrightarrow{(1)} F' = 2mg.$

Αφού $F' > B$, το σωματίδιο θα κινηθεί προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F' - B}{m} = \frac{2mg - mg}{m} \Rightarrow \alpha = g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$), και διανύει απόσταση $s = L - d$ μέχρι να φτάσει στη θετική πλάκα μετά από χρόνο t . Ισχύει :



$$s = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2s}{a} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{10}} \text{ s} \Rightarrow t = \frac{10^{-1}}{\sqrt{10}} \text{ s} \quad \text{ή} \quad t = \frac{\sqrt{10}}{100} \text{ s}.$$

4.4

Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης κατά τη μετακίνηση του σωματιδίου από την αρχική θέση μέχρι τη θετική πλάκα είναι :

$$W_{F'} = F'(L-d)\sin\theta^0 = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \text{ J} \Rightarrow W_{F'} = 10^{-4} \text{ J}.$$

Σχόλιο :

Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και δεν κινείται ούτε επιταχύνεται.

Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : « . . . για να συναντήσει το σωματίδιο τη μεταλλική πλάκα . . . », « . . . κατά την κίνηση του σωματιδίου . . . ».

24. (17169) Σωματίδιο Σ_1 μάζας $m = 10^{-3}$ Kg και φορτίου $q = 10^{-5}$ C αφήνεται ακίνητο σε σημείο ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έντασης μέτρου $E = 10^3$ N/C. Το σωματίδιο μπορεί να κινείται σε οριζόντιο δάπεδο μεγάλης έκτασης, κατασκευασμένο από κάποιο μονωτικό υλικό, χωρίς τριβές.

Στο σχήμα βλέπουμε την κάτοψη του ηλεκτρικού πεδίου.

4.1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σωματιδίου όταν αυτό έχει διανύσει απόσταση $d = 20$ m.

Μονάδες 8

4.2. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού μεταξύ της θέσης από την οποία αφέθηκε το σωματίδιο και της τελικής του θέσης (μετά από $d = 20$ m).

Μονάδες 4

Όταν το σωματίδιο Σ_1 διανύσει την απόσταση $d = 20$ m, συναντά δεύτερο σωματίδιο Σ_2 , το οποίο έχει μηδενικό ηλεκτρικό φορτίο και αρχικά ήταν ακίνητο. Τα δύο σωματίδια συγκρούονται πλαστικά.

4.3. Να υπολογίσετε τη μάζα του δεύτερου σωματιδίου, δεδομένου ότι κατά τη σύγκρουση η απώλεια μηχανικής ενέργειας είναι ίση με το 75% της αρχικής ενέργειας του σωματιδίου Σ_1 .

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που θα έπρεπε να είχε το δεύτερο σωματίδιο, κατά μέτρο και κατεύθυνση, ώστε όταν συγκρουστεί πλαστικά με το Σ_1 (όταν το σωματίδιο έχει διανύσει και πάλι την απόσταση $d = 20$ m), το συσσωμάτωμα να επιστρέψει με μηδενική ταχύτητα στην αρχική θέση από την οποία αφέθηκε το Σ_1 .

Μονάδες 7

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης είναι : $F = E|q| = 10^3 \cdot 10^{-5}$ N $\Rightarrow F = 10^{-2}$ N.

Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής, το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματιδίου είναι :

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{10^{-2} \text{ N}}{10^{-3} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$). Ισχύει :

$$d = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2d}{\alpha} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{\alpha}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}.$$

Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του σωματιδίου έχει μέτρο : $v_1 = \alpha \cdot t_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.2

1ος τρόπος

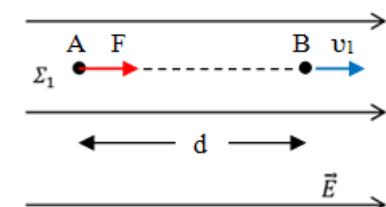
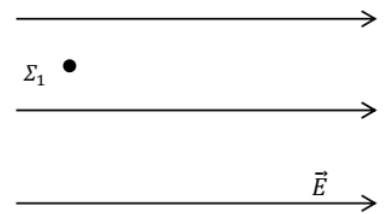
Το σωματίδιο κινείται από το A στο B κατά τη φορά των δυναμικών γραμμών, άρα : $V_A > V_B \Leftrightarrow V_{AB} > 0$.

Ισχύει η σχέση : $V_{AB} = E \cdot d = 10^3 \cdot 20 \text{ V} \Rightarrow V_{AB} = 2 \cdot 10^4 \text{ V}.$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σωματιδίου από το A στο B :

$$W_{F(A \rightarrow B)} = K_B - K_A \Leftrightarrow q \cdot V_{AB} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 \Leftrightarrow V_{AB} = \frac{m_1 v_1^2}{2q}.$$



Με αντικατάσταση : $V_{AB} = \frac{10^{-3} \cdot 20^2}{2 \cdot 10^{-5}} V \Rightarrow V_{AB} = 2 \cdot 10^4 V.$

4.3

Έστω m_2 η μάζα του 2ου σωματιδίου και V το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Το σύστημα είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 1ου και εφαρμόζω την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση :

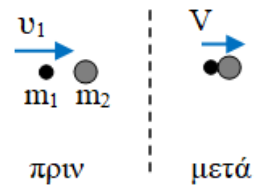
$$P_{ολ(μετά)} = P_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow (m_1 + m_2)V = m_1 v_1 \Leftrightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Από την ελάττωση της κινητικής ενέργειας, προκύπτει :

$$K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)} = 75\% \cdot K_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow K_{ολ(μετά)} = 25\% \cdot K_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$(m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{4} m_1 v_1^2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4m_1 = m_1 + m_2 \Leftrightarrow m_2 = 3m_1 \Rightarrow m_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}.$$



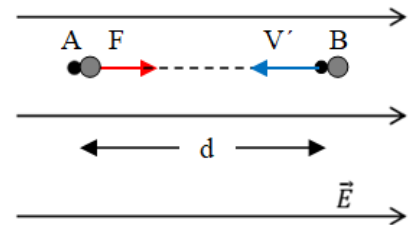
4.4

Έστω V' το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή $B \rightarrow A$:

$$K_A' - K_B' = W_{F(B \rightarrow A)} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V'^2 = -F \cdot d \Leftrightarrow V'^2 = \frac{2Fd}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow V' = \sqrt{\frac{2Fd}{m_1 + m_2}} \Rightarrow V' = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{4 \cdot 10^{-3}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow V' = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



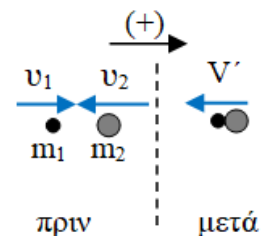
Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του 2ου σωματιδίου πριν την κρούση.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$P_{ολ(μετά)} = P_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow -(m_1 + m_2)V' = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1 + (m_1 + m_2)V'}{m_2}$$

$$\xrightarrow{m_2 = 3m_1} v_2 = \frac{m_1 v_1 + 4m_1 V'}{3m_1} \Leftrightarrow v_2 = \frac{v_1 + 4V'}{3}.$$

Με αντικατάσταση : $v_2 = \frac{20 + 4 \cdot 10}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Σχόλιο

Στο ερώτημα 4.3 δεν διευκρινίζεται η εκφώνηση ότι αναφέρεται στην αρχική **κινητική** ενέργεια του 1ου σωματιδίου.

25. (17478) Σημειακό φορτισμένο σωματίδιο, που έχει μάζα $m = 1\text{ g}$ και φορτίο $q = +1\text{ }\mu\text{C}$, εκτοξεύεται, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$, μέτρου $v_0 = 10^{-2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$, παράλληλα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου έντασης μέτρου $E = 10\frac{\text{N}}{\text{C}}$. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι οριζόντιες, με φορά αντίθετη από τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_0$.

4.1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της κίνησης του σημειακού φορτισμένου σωματιδίου.

Μονάδες 6

4.2. Πόση είναι η ταχύτητα του σημειακού φορτισμένου σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\text{ s}$;

Μονάδες 6

4.3. Πόσο είναι το έργο της ηλεκτρικής δύναμης, που ασκείται στο σημειακό φορτισμένο σωματίδιο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\text{ s}$;

Μονάδες 6

4.4. Πόση είναι η διαφορά δυναμικού των θέσεων του σημειακού φορτισμένου σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t_1 = 1\text{ s}$;

Μονάδες 7

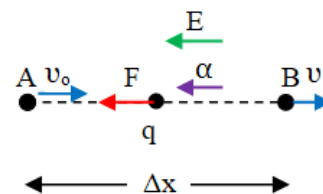
Να θεωρήσετε ότι στο φορτισμένο σωματίδιο ασκείται μόνο η ηλεκτρική δύναμη από το ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.

Απάντηση

4.1

Το σωματίδιο δέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο σταθερή δύναμη μέτρου $F = E|q|$, αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση, αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας, μέτρου :

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{E|q|}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.2

Αφού η επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα, το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η τιμή της ταχύτητας μετά από χρόνο t είναι :

$$v = v_0 - \alpha t = (10^{-2} - 10^{-2} \cdot 1) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 0.$$

4.3

1ος τρόπος

Μετά από χρόνο t το σωματίδιο έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 = \left(10^{-2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \cdot 1^2 \right) \text{m} \Rightarrow \Delta x = 5 \cdot 10^{-3} \text{m}.$$

Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι :

$$W_F = F(\Delta x) \cos 180^\circ = -E|q|(\Delta x) \Rightarrow W_F = -10 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{J} \Rightarrow W_F = -5 \cdot 10^{-8} \text{J}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη μετακίνηση του σωματιδίου από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 1\text{ s}$:

$$W_F = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m (v^2 - v_o^2) \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot (0 - 10^{-4}) \text{ J} \Rightarrow W_F = -5 \cdot 10^{-8} \text{ J}.$$

4.4

1ος τρόπος

Το σωματίδιο κινείται αντίρροπα από τις δυναμικές γραμμές, από το σημείο Α προς το σημείο Β που έχει υψηλότερο δυναμικό ($V_B > V_A$).

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Β και Α υπολογίζεται από τη σχέση :

$$V_B - V_A = E(\Delta x) = 10 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ V} \Rightarrow V_B - V_A = 5 \cdot 10^{-2} \text{ V} \quad \text{ή} \quad V_{AB} = -5 \cdot 10^{-2} \text{ V}.$$

2ος τρόπος

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α, Β μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση ορισμού της :

$$V_{AB} = \frac{W_{F(A \rightarrow B)}}{q} = \frac{-5 \cdot 10^{-8} \text{ J}}{10^{-6} \text{ C}} \Rightarrow V_{AB} = -5 \cdot 10^{-2} \text{ V}.$$

26. (18608) Ηλεκτρόνιο επιταχύνεται από την ηρεμία, από σταθερή τάση V και αποκτά κινητική ενέργεια $K = 45,5 \text{ eV}$.

4.1. Να υπολογίσετε τη σταθερή τάση V .

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας που αποκτά το ηλεκτρόνιο.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε το μέτρο της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου που επιταχύνει το ηλεκτρόνιο, αν αυτό θεωρηθεί ομογενές και η μετατόπιση του ηλεκτρονίου, κατά την επιτάχυνσή του, έχει μέτρο $\Delta x = 10 \text{ cm}$.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το μέσο ρυθμό αύξησης της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου, κατά την επιτάχυνσή του.

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε ότι στο ηλεκτρόνιο ασκείται μόνο η ηλεκτρική δύναμη που το επιταχύνει. Δίνονται η μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ και η απόλυτη τιμή του φορτίου του $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Απάντηση

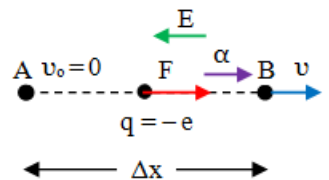
4.1

Με την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης, το ηλεκτρόνιο κινείται κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής (αντίθετα από τη φορά της), από σημείο A προς σημείο B, με $V_A < V_B$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του ηλεκτρονίου από το A στο B :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ηλ}} \Leftrightarrow K - 0 = -e \cdot V_{AB} \Leftrightarrow V_{AB} = -\frac{K}{e} \Rightarrow V_{AB} = -\frac{45,5 \text{ eV}}{e} = -45,5 \text{ V}.$$

Άρα, η τάση είναι : $V = |V_{AB}| = 45,5 \text{ V}$.



4.2

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου στο S.I. είναι : $K = e \cdot V = (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (45,5 \text{ V}) = 72,8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Ισχύει :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{2K}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 72,8 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{16 \cdot 10^{12}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Τα σημεία A, B ανήκουν στην ίδια δυναμική γραμμή, άρα ισχύει : $E = \frac{V}{\Delta x} = \frac{45,5 \text{ V}}{10^{-1} \text{ m}} = 455 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$

4.4

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton (στη διεύθυνση της κίνησης) για να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια της κίνησης :

$$F_{\text{ηλ}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow E \cdot e = \frac{m v - 0}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{m v}{E e} \Rightarrow \Delta t = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^6}{455 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Ο μέσος ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου είναι :

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K}{\Delta t} \Rightarrow \bar{P} = \frac{72,8 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{5 \cdot 10^{-8} \text{ s}} \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 1,456 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο : Η μονάδα έργου – ενέργειας 1 eV (ηλεκτρονιοβόλτ) είναι εκτός διδακτέας ύλης.

27. (19491) Από σημείο Ο **κατακόρυφου** ομογενούς **ηλεκτρικού πεδίου** έντασης $\vec{E}$ που έχει μέτρο $E = 1000 \frac{V}{m}$ και φορά προς τα πάνω, εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, σε κατεύθυνση αντίθετη από τις δυναμικές γραμμές φορτισμένο σωματίδιο με ειδικό φορτίο $\frac{q}{m} = 1 \cdot 10^{11} \frac{C}{Kg}$, με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ που έχει μέτρο $v_0 = 5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$. Να θεωρήσετε ότι οι βαρυτικές δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν και οι πάσης φύσεως αντιστάσεις στην κίνηση του σωματιδίου είναι ασήμαντες.

4.1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση που αποκτά το σωματίδιο και να καθορίσετε το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει. **Μονάδες 6**

4.2. Να καθορίσετε τη χρονική στιγμή t_1 και τη θέση Α στην οποία μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του σωματιδίου. **Μονάδες 6**

4.3. Να καθορίσετε την ταχύτητα του σωματιδίου και τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία επιστρέφει στο σημείο Ο. Να δώσετε μια ενεργειακή εξήγηση για την τιμή της ταχύτητας επιστροφής στο Ο. **Μονάδες 8**

4.4. Να υπολογίσετε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Ο και Α. **Μονάδες 5**

Απάντηση

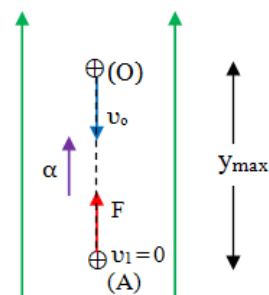
4.1

Υποθέτουμε ότι το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο q ($q > 0$).

Το σωματίδιο δέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο σταθερή δύναμη μέτρου $F = E|q|$, αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση, αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας, μέτρου :

$$\alpha = \frac{F}{m} = E \cdot \frac{|q|}{m} \Rightarrow \alpha = 10^3 \cdot 10^{11} \frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha = 10^{14} \frac{m}{s^2}.$$

Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση (προς τα κάτω) μέχρι να σταματήσει (στιγμιαία) στο σημείο Α και στη συνέχεια εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με φορά προς τα πάνω.



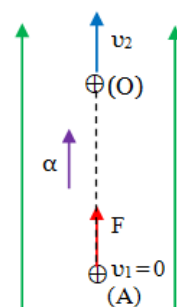
4.2

Από την εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, προκύπτει :

$$v = v_0 - \alpha t \xrightarrow{v_1=0, t=t_1} 0 = v_0 - \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{\alpha} \Rightarrow t_1 = \frac{5 \cdot 10^6}{10^{14}} s \Rightarrow t_1 = 5 \cdot 10^{-8} s.$$

Η απόσταση που θα διανύσει μέχρι να σταματήσει είναι:

$$y_{\max} = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \left(5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-8} - \frac{1}{2} \cdot 10^{14} \cdot 25 \cdot 10^{-16} \right) m \Rightarrow y_{\max} = 0,125 m.$$



4.3

Κατά τη διάρκεια της κίνησης $O \rightarrow A \rightarrow O$ το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Ισχύει : $y = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2$. (1)

Τη στιγμή που επιστρέφει στο Ο είναι :

$$y = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow t \left(v_0 - \frac{1}{2} \alpha t \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \text{ απορρίπτεται} \\ t = \frac{2v_0}{\alpha} = 10^{-7} s, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

Άρα, το σωματίδιο επιστρέφει στο Ο τη χρονική στιγμή $t_2 = 2t_1 = 10^{-7}$ s.

Η ταχύτητα του σωματιδίου τη στιγμή t_2 είναι :

$$v_2 = v_0 - at_2 = (5 \cdot 10^6 - 10^{14} \cdot 10^{-7}) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = -5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Παρατηρούμε ότι το σωματίδιο επιστρέφει στο Ο με ταχύτητα ίσου μέτρου $|v_2| = v_0 = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ενεργειακή ερμηνεία

Αφού η διαδρομή είναι κλειστή, το έργο της διατηρητικής ηλεκτρικής δύναμης είναι μηδενικό :

$$W_{O \rightarrow A \rightarrow O} = 0.$$

Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ ισχύει : $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{O \rightarrow A \rightarrow O} = 0 \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}}$.

Επομένως, η ταχύτητα του σωματιδίου όταν επιστρέφει στο Ο έχει το ίδιο μέτρο με την αρχική.

4.4

1ος τρόπος

Σύμφωνα με τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού, ισχύει :

$$V_O - V_A = \frac{W_{O \rightarrow A}}{q} = \frac{E|q|y_{\max} \cos 180^\circ}{q} \xrightarrow{q > 0} V_O - V_A = -E \cdot y_{\max} \Rightarrow V_O - V_A = -10^3 \cdot 0,125 \text{ V} = -125 \text{ V}.$$

(Δηλαδή, το δυναμικό του σημείου Α είναι μεγαλύτερο από του Ο, αφού το σωματίδιο κινείται αντίρροπα από τις δυναμικές γραμμές).

2ος τρόπος

Το σωματίδιο κινείται αντίρροπα από τις δυναμικές γραμμές, άρα : $V_A > V_O$.

Αφού τα σημεία Α, Ο βρίσκονται στην ίδια δυναμική γραμμή, ισχύει :

$$V_{AO} = E \cdot y_{\max} = 10^3 \cdot 0,125 \text{ V} \Rightarrow V_{AO} = 125 \text{ V}.$$

Επομένως : $V_O - V_A = -V_{AO} = -125 \text{ V}$.

Σχόλια :

1) Η έκφραση «κατακόρυφο ηλεκτρικό πεδίο» είναι λάθος. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κατακόρυφες.

2) Η εκφώνηση δεν διευκρινίζει ότι το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο. Το «ειδικό φορτίο» είναι το πηλίκο της απόλυτης τιμής του φορτίου προς τη μάζα του σωματιδίου.

28. (19535) Σημειακό φορτισμένο σωματίδιο, που έχει μάζα $m = 10^{-6} \text{ kg}$ και φορτίο $q = +1 \mu\text{C}$, εκτοξεύεται, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$, μέτρου $v_0 = 2 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, παράλληλα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτροστατικού πεδίου έντασης μέτρου $E = 10^2 \frac{\text{N}}{\text{C}}$. Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι οριζόντιες, με φορά ίδια με τη φορά της ταχύτητας $\vec{v}_0$.

4.1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της κίνησης του σημειακού φορτισμένου σωματιδίου.

Μονάδες 6

4.2. Πόση είναι η ταχύτητα του σημειακού φορτισμένου σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$;

Μονάδες 6

4.3. Πόσο είναι το έργο της ηλεκτρικής δύναμης, που ασκείται στο σημειακό φορτισμένο σωματίδιο, από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$;

Μονάδες 6

4.4. Πόση είναι η διαφορά δυναμικού των θέσεων του σημειακού φορτισμένου σωματιδίου τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t_1 = 1 \text{ s}$;

Μονάδες 7

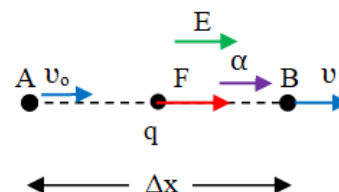
Να θεωρήσετε ότι στο φορτισμένο σωματίδιο ασκείται μόνο η ηλεκτρική δύναμη από το ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο.

Απάντηση

4.1

Το σωματίδιο δέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο σταθερή δύναμη μέτρου $F = E|q|$, ομόρροπη της αρχικής ταχύτητας. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{E|q|}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{10^{-6} \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.2

Αφού η επιτάχυνση έχει την ίδια κατεύθυνση με την αρχική ταχύτητα, το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Η τιμή της ταχύτητας μετά από χρόνο t_1 είναι :

$$v = v_0 + \alpha t_1 = (2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 1) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

1ος τρόπος

Η μετατόπιση του σωματιδίου μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 έχει μέτρο :

$$\Delta x = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \left(2 \cdot 10^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \Delta x = 250 \text{ m}.$$

Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι :

$$W_F = F(\Delta x) \cos 0^\circ = E|q|(\Delta x) \Rightarrow W_F = 10^2 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \text{ J} \Rightarrow W_F = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη μετακίνηση του σωματιδίου από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 :

$$W_F = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot (9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4) \text{ J} \Rightarrow W_F = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}.$$

4.4

1ος τρόπος

Το σωματίδιο κινείται κατά τη φορά των δυναμικών γραμμών, από το σημείο Α προς το σημείο Β που έχει μικρότερο δυναμικό ($V_A > V_B$).

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α και Β υπολογίζεται από τη σχέση :

$$V_A - V_B = E(\Delta x) = 10^2 \cdot 250 \text{ V} \Rightarrow V_A - V_B = 2,5 \cdot 10^4 \text{ V} \quad \text{ή} \quad V_{AB} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ V}.$$

2ος τρόπος

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α, Β μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση ορισμού της :

$$V_{AB} = \frac{W_{F(A \rightarrow B)}}{q} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}}{10^{-6} \text{ C}} \Rightarrow V_{AB} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ V}.$$

29. (19536) Πρωτόνιο επιταχύνεται από την ηρεμία, από σταθερή τάση V και αποκτά κινητική ενέργεια $K = 200 \text{ eV}$.

4.1. Να υπολογίσετε τη σταθερή τάση V .

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας που αποκτά το πρωτόνιο.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε το μέτρο της έντασης του ηλεκτροστατικού πεδίου που επιταχύνει το πρωτόνιο, αν αυτό θεωρηθεί ομογενές και η μετατόπιση του πρωτονίου, από την αρχική του θέση, μέχρι να γίνει μέγιστη η ταχύτητά του, έχει μέτρο $\Delta x = 10 \text{ cm}$.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το μέσο ρυθμό αύξησης της κινητικής ενέργειας του πρωτονίου, κατά την επιταχυνόμενη κίνησή του.

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε ότι στο πρωτόνιο ασκείται μόνο η ηλεκτρική δύναμη που το επιταχύνει. Δίνονται η μάζα του πρωτονίου $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ και το φορτίο του $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

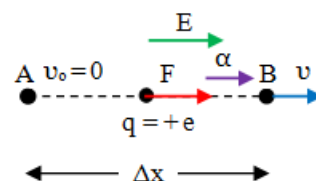
Απάντηση

4.1

Με την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης, το πρωτόνιο κινείται κατά τη φορά μιας δυναμικής γραμμής, από σημείο A προς σημείο B, με $V_A > V_B$. Άρα : $V_{AB} = V$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του πρωτονίου από την ηρεμία :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\eta\lambda} \Leftrightarrow K - 0 = e \cdot V \Leftrightarrow V = \frac{K}{e} \Rightarrow V = \frac{200 \text{ eV}}{e} \Rightarrow V = 200 \text{ V}.$$



4.2

Η κινητική ενέργεια του πρωτονίου στο S.I. είναι : $K = e \cdot V = (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (200 \text{ V}) = 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}$.

Ισχύει :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v^2 = \frac{2K}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-17}}{1,6 \cdot 10^{-27}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{4 \cdot 10^{10}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Τα σημεία A, B ανήκουν στην ίδια δυναμική γραμμή, άρα ισχύει :

$$E = \frac{V_{AB}}{\Delta x} = \frac{200 \text{ V}}{10^{-1} \text{ m}} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton (στη διεύθυνση της κίνησης) για να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια της κίνησης :

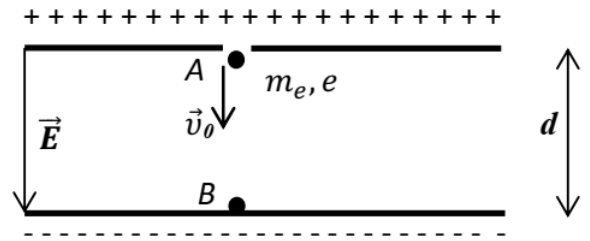
$$F_{\eta\lambda} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Leftrightarrow E \cdot e = \frac{m v - 0}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{m v}{E e} \Rightarrow \Delta t = \frac{1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 10^{-6} \text{ s}.$$

Ο μέσος ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργειας του πρωτονίου είναι :

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K}{\Delta t} = \frac{3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{10^{-6} \text{ s}} \Rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = 3,2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο : Η μονάδα έργου – ενέργειας 1 eV (ηλεκτρονιοβόλτ) είναι εκτός διδακτέας ύλης.

30. (20716) Δύο οριζόντιοι μεταλλικοί οπλισμοί είναι αντίθετα φορτισμένοι. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ του οπλισμού που είναι φορτισμένος θετικά και του οπλισμού που είναι φορτισμένος αρνητικά είναι V . Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται από μικρή οπή, που βρίσκεται στο θετικό οπλισμό (σημείο A), με ταχύτητα $\vec{v}_0$ μέτρου $7 \cdot 10^6$ m/s. Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι παράλληλη στις



δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των οπλισμών, έντασης $\vec{E}$, με κατεύθυνση προς τον αρνητικό οπλισμό. Η απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι $d = 10$ mm. Να υπολογίσετε:

4.1. την διαφορά δυναμικού V έτσι ώστε το ηλεκτρόνιο να ακινητοποιηθεί στιγμιαία ακριβώς πριν ακουμπήσει τον αρνητικό οπλισμό,

Μονάδες 6

4.2. την ταχύτητα κατά μέτρο και κατεύθυνση με την οποία το ηλεκτρόνιο θα επιστρέψει στο σημείο A,

Μονάδες 6

4.3. τη χρονική στιγμή που το ηλεκτρόνιο επιστρέφει στο σημείο A, εάν ως $t = 0$ s θεωρηθεί η χρονική στιγμή που το ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο.

Μονάδες 7

4.4. τη διαφορά δυναμικού μεταξύ ενός σημείου του οπλισμού που είναι φορτισμένος θετικά και σημείου που απέχει από αυτόν απόσταση $\frac{3 \cdot d}{4}$.

Μονάδες 6

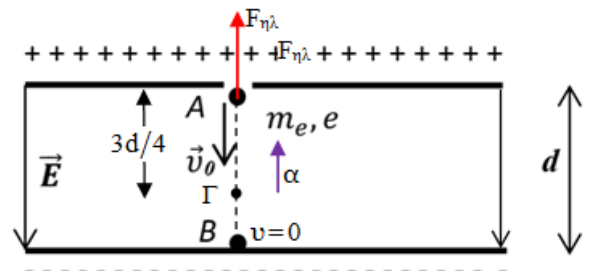
Δίνονται το πηλίκο της απόλυτης τιμής του φορτίου του ηλεκτρονίου (στοιχειώδες φορτίο) προς τη μάζα του, $\frac{e}{m_e} = 1,75 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ και το στοιχειώδες φορτίο $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις παραλείπονται και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Το ηλεκτρόνιο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda}$ αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας, η οποία το επιβραδύνει μέχρι να ακινητοποιηθεί (στιγμιαία) στο σημείο B της αρνητικής πλάκας.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το A στο B :



$$W_{\eta\lambda(A \rightarrow B)} = K_B - K_A \Leftrightarrow (-e) \cdot (V_{AB}) = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow e V_{AB} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow V_{AB} = \frac{m v_0^2}{2e} \Leftrightarrow V_{AB} = \frac{v_0^2}{2 \left(\frac{e}{m} \right)}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } V_{AB} = \frac{49 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 1,75 \cdot 10^{11}} \text{ V} \Rightarrow V_{AB} = 140 \text{ V}.$$

4.2

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κλειστή διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow A$:

$$K_A' - K_A = W_{\eta\lambda(A \rightarrow B \rightarrow A)} = 0 \Leftrightarrow K_A' = K_A \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_A'^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow v_A'^2 = v_0^2 \Rightarrow \begin{cases} v_A = v_0, & \text{απορρίπτεται} \\ v_A = -v_0, & \text{δεκτή} \end{cases}$$

Άρα το ηλεκτρόνιο επιστρέφει στο Α με ταχύτητα ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς από την αρχική, δηλαδή (αλγεβρικά) : $v_A = -7 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.3

Η ένταση του πεδίου έχει σταθερό μέτρο $E = \frac{V}{d} = \frac{140 \text{ V}}{10^{-2} \text{ m}} = 1,4 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ (ή $\frac{\text{N}}{\text{C}}$).

Η σταθερή ηλεκτρική δύναμη έχει μέτρο $F_{\eta\lambda} = Ee$ και προκαλεί στο ηλεκτρόνιο σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{F_{\eta\lambda}}{m} = \frac{Ee}{m} = E \cdot \frac{e}{m} \Rightarrow \alpha = 1,4 \cdot 10^4 \cdot 1,75 \cdot 10^{11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 2,45 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το ηλεκτρόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, με εξίσωση θέσης (ως προς το Α και θετική φορά προς τα κάτω) : $y = v_o t - \frac{1}{2} \alpha t^2$. (1)

Τη στιγμή που επιστρέφει στο Α είναι :

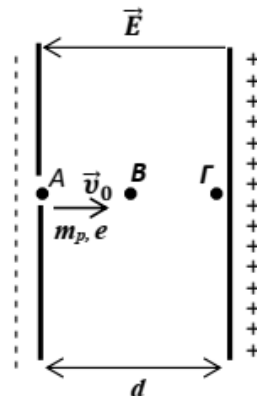
$$y=0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_o t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow t(v_o - \frac{1}{2} \alpha t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0, \text{ απορρίπτεται} \\ t = \frac{2v_o}{\alpha} = \frac{40}{7} \cdot 10^{-9} \text{ s, δεκτή} \end{cases}$$

4.4

Έστω Γ το σημείο της τροχιάς που απέχει $\frac{3d}{4}$ από τον θετικό οπλισμό. Ισχύει :

$$V_A - V_\Gamma = E \cdot \frac{3d}{4} = 1,4 \cdot 10^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^{-2} \text{ V} \Rightarrow V_A - V_\Gamma = 105 \text{ V}.$$

31. (20717) Δύο κατακόρυφοι μεταλλικοί οπλισμοί είναι φορτισμένοι με τάση V . Ένα πρωτόνιο εισέρχεται από μικρή οπή που βρίσκεται στον αρνητικό οπλισμό (σημείο Α), με ταχύτητα $\vec{v}_0$ μέτρου 10^5 m/s. Η ταχύτητα του πρωτονίου όπως φαίνεται στο σχήμα είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που επικρατεί μεταξύ των οπλισμών, με κατεύθυνση προς τον θετικό οπλισμό. Η απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι $d = 10$ mm και $(AB) = (B\Gamma)$. Να υπολογίσετε:



4.1. την τιμή της τάσης V έτσι ώστε το πρωτόνιο να ακινητοποιηθεί στιγμιαία ακριβώς πριν ακουμπήσει το θετικό οπλισμό,

Μονάδες 6

4.2. το λόγο $\frac{V_{BA}}{V_{\Gamma A}}$ μεταξύ των διαφορών δυναμικού μεταξύ των σημείων Β, Α και των σημείων Γ, Α ,

Μονάδες 6

4.3. το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να φτάσει το πρωτόνιο στη θετική πλάκα, καθώς και το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να επιστρέψει στο σημείο εκτόξευσης,

Μονάδες 6

4.4. την κινητική ενέργεια του πρωτονίου στο μέσο της απόστασης μεταξύ των δύο οπλισμών (σημείο Β).

Μονάδες 7

Δίνεται η μάζα του πρωτονίου $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$ kg και το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις παραλείπονται και η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση

4.1

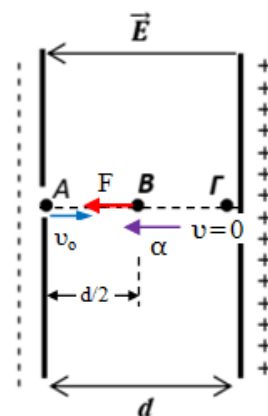
Το πρωτόνιο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}$ αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας, η οποία το επιβραδύνει μέχρι να ακινητοποιηθεί (στιγμιαία) στο σημείο Γ της αρνητικής πλάκας.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το Α στο Γ :

$$W_{F(A \rightarrow \Gamma)} = K_{\Gamma} - K_A \Leftrightarrow e \cdot V_{A\Gamma} = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow V_{A\Gamma} = - \frac{m v_0^2}{2e} \Rightarrow$$

$$V_{A\Gamma} = - \frac{1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{10}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ V} \Rightarrow V_{A\Gamma} = -50 \text{ V}.$$

Άρα, η τάση μεταξύ των πλακών είναι : $V = V_{\Gamma A} = -V_{A\Gamma} = 50 \text{ V}$.



4.2

Τα σημεία Α, Β, Γ βρίσκονται στην ίδια δυναμική γραμμή του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, άρα ισχύει :

$$\left. \begin{aligned} V_{BA} &= E \cdot \frac{d}{2} \\ V_{\Gamma A} &= E \cdot d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{V_{BA}}{V_{\Gamma A}} = \frac{1}{2}.$$

4.3

Η ένταση του πεδίου έχει σταθερό μέτρο $E = \frac{V}{d} = \frac{50 \text{ V}}{10^{-2} \text{ m}} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ (ή $\frac{\text{N}}{\text{C}}$).

Η σταθερή ηλεκτρική δύναμη έχει μέτρο $F_{\eta\lambda} = Ee$ και προκαλεί στο πρωτόνιο σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{F_{\eta\lambda}}{m} = \frac{Ee}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-27}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 5 \cdot 10^{11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Κατά τη διαδρομή από το Α στο Γ, το πρωτόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η ταχύτητά του υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_0 - \alpha t$. (1)

Τη χρονική στιγμή t_1 που φτάνει στο Γ ισχύει :

$$v=0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_0 - \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{\alpha} \Rightarrow t_1 = \frac{10^5}{5 \cdot 10^{11}} \text{s} \Rightarrow t_1 = 2 \cdot 10^{-7} \text{s}.$$

Κατά την επιστροφή από το Γ στο Α, το πρωτόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Ισχύει :

$$d = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t_2)^2 \Leftrightarrow (\Delta t_2)^2 = \frac{2d}{\alpha} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2d}{\alpha}} \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{11}}} \text{s} = \sqrt{4 \cdot 10^{-14}} \text{s} \Rightarrow \Delta t_2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{s}.$$

4.4

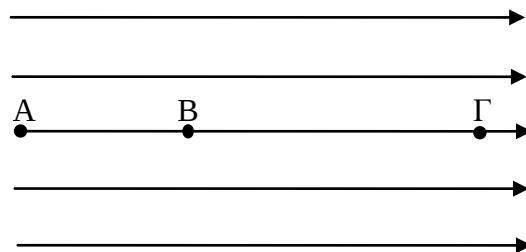
Η διαφορά δυναμικού μεταξύ Β, Α είναι : $V_{BA} = \frac{1}{2} V_{\Gamma A} = 25 \text{V}$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του πρωτονίου από το Α στο Β :

$$W_{F(A \rightarrow B)} = K_B - K_A \Leftrightarrow e \cdot V_{AB} = K_B - \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow e(-V_{BA}) = K_B - \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow K_B = \frac{1}{2} m v_0^2 - e V_{BA} \Rightarrow$$

$$K_B = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{10} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 25 \right) \text{J} \Rightarrow K_B = 4 \cdot 10^{-18} \text{J}.$$

32. (20719) Τρία σημεία A, B και Γ βρίσκονται κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και για τις μεταξύ τους αποστάσεις ισχύει: $(AG) = 3 \cdot (AB) = 18 \text{ cm}$. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B είναι ίση με 600 V. Πρωτόνιο διέρχεται τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ από το σημείο Γ, με ταχύτητα $\vec{v}_0$, η οποία έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της δυναμικής γραμμής. Να υπολογίσετε:



4.1. το μέτρο και την κατεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (Μονάδες 3) καθώς και την διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και Γ (Μονάδες 3),

Μονάδες 6

4.2. την επιτάχυνση (μέτρο και κατεύθυνση) του πρωτονίου,

Μονάδες 5

4.3. το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_0$ με την οποία πρέπει να διέλθει το πρωτόνιο από το σημείο Γ, έτσι ώστε να ακινητοποιηθεί στιγμιαία στο A,

Μονάδες 7

Στη συνέχεια το πρωτόνιο επιστρέφει στο σημείο Γ.

4.4. Βρείτε ποια χρονική στιγμή διέρχεται από το σημείο B κινούμενο προς το σημείο Γ.

Μονάδες 7

Δίνεται η μάζα του πρωτονίου $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ και το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις παραλείπονται και η επίδραση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Θεωρήστε για τις πράξεις $\sqrt{3} \cong 1,7$.

Απάντηση

4.1

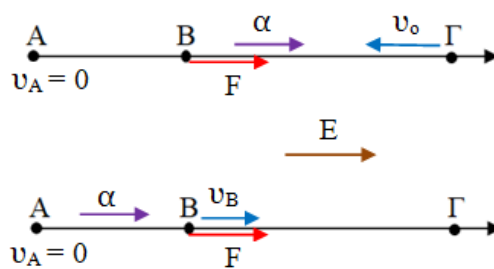
$$\text{Δίνεται : } (AB) = \frac{(AG)}{3} = 6 \text{ cm.}$$

Η ένταση $\vec{E}$ του πεδίου έχει την ίδια κατεύθυνση με τις δυναμικές γραμμές (από το A προς το Γ) και μέτρο :

$$E = \frac{V_{AB}}{(AB)} = \frac{600 \text{ V}}{6 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A, Γ είναι :

$$V_{AG} = E \cdot (AG) = \left(10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \cdot (18 \cdot 10^{-2} \text{ m}) = 1800 \text{ V}.$$



4.2

Το πρωτόνιο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}$ αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας, η οποία το επιβραδύνει μέχρι να ακινητοποιηθεί (στιγμιαία) στο σημείο A.

Η ηλεκτρική δύναμη έχει μέτρο $F = Ee$ και προκαλεί στο πρωτόνιο σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{Ee}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10^4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ N}}{1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \Rightarrow \alpha = 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\vec{F}$, δηλαδή από το A προς το Γ.

4.3

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το Γ στο Α :

$$K_A - K_\Gamma = W_{F(\Gamma \rightarrow A)} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_o^2 = -F_{\eta\lambda}(A\Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_o^2 = m\alpha(A\Gamma) \Leftrightarrow v_o = \sqrt{2\alpha(A\Gamma)} \Rightarrow$$

$$v_o = \sqrt{2 \cdot 10^{12} \cdot 18 \cdot 10^{-2}} \frac{m}{s} \Rightarrow v_o = 6 \cdot 10^5 \frac{m}{s}.$$

4.4

Κατά τη διαδρομή από το Γ στο Α, το πρωτόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

Η ταχύτητά του υπολογίζεται από τη σχέση : $v = v_o - \alpha t$. (1)

Τη χρονική στιγμή t_1 που φτάνει στο Α ισχύει :

$$v_A = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_o - \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_o}{\alpha} \Rightarrow t_1 = \frac{6 \cdot 10^5}{10^{12}} s = 6 \cdot 10^{-7} s.$$

Κατά την επιστροφή από το Α στο Β, το πρωτόνιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Ισχύει :

$$(AB) = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t_2)^2 \Leftrightarrow (\Delta t_2)^2 = \frac{2(AB)}{\alpha} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2(AB)}{\alpha}} \Rightarrow \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{10^{12}}} s = \sqrt{12 \cdot 10^{-14}} s \Rightarrow$$

$$\Delta t_2 = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-7} s \quad \text{ή} \quad \Delta t_2 \cong 3,4 \cdot 10^{-7} s.$$

Άρα, το πρωτόνιο διέρχεται από το Β (κινούμενο προς το Γ) τη χρονική στιγμή :

$$t_2 = t_1 + \Delta t_2 \Rightarrow t_2 \cong 9,4 \cdot 10^{-7} s.$$

33. (20896) Στο χώρο μεταξύ δύο παράλληλων αντίθετα φορτισμένων μεταλλικών πλακών που απέχουν μεταξύ τους $d = 80\text{cm}$ αφήνεται ένα σωματίο το οποίο έχει φορτίο $q = +160\mu\text{C}$ και μάζα $m = 3,2 \cdot 10^{-5}\text{kg}$. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχει μέτρο $E = 2 \cdot 10^4 \text{ V/m}$.

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτά το σωματίο.

Μονάδες 6

4.2. Να βρείτε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σωματίου.

Μονάδες 6

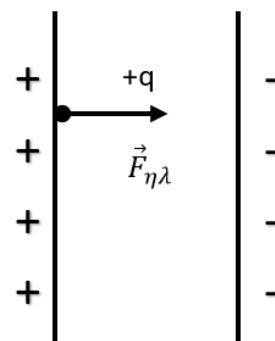
4.3. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία θα φτάσει στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα το σωματίο, αν αφεθεί κοντά στη θετικά φορτισμένη πλάκα.

Μονάδες 6

4.4. Να βρείτε τη μεταβολή της ορμής του σωματίου κατά την μετακίνησή του από τη θετική στην αρνητική πλάκα.

Μονάδες 7

Το πεδίο βαρύτητας παραλείπεται.



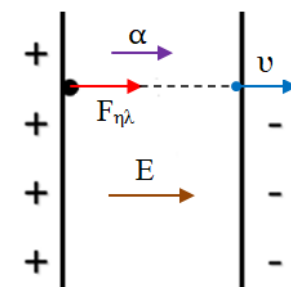
Απάντηση

4.1

Το σωματίο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}_{\eta\lambda}$ η οποία έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση, δηλαδή από τη θετική προς την αρνητική πλάκα. Η ηλεκτρική δύναμη έχει μέτρο $F_{\eta\lambda} = E|q|$ και προκαλεί στο σωματίο σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{F_{\eta\lambda}}{m} = \frac{E|q|}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-4}}{3,2 \cdot 10^{-5}} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\vec{F}_{\eta\lambda}$, δηλαδή από την θετική προς την αρνητική πλάκα.



4.2

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ισχύει : $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F}$.

Άρα, το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής είναι :

$$\frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \Sigma F = F_{\eta\lambda} = E|q| \Rightarrow \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 3,2 \text{ N}.$$

4.3

1ος τρόπος (με τις εξισώσεις κίνησης)

Το σωματίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($v_0 = 0$).

Για τη χρονική διάρκεια t_1 της κίνησης από τη θετική στην αρνητική πλάκα, ισχύει :

$$d = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2d}{\alpha} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{\alpha}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10^5}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή t_1 είναι : $v = \alpha t_1 = 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σωματίου από τη θετική στην αρνητική πλάκα :

$$K_B - K_A = W_{\eta\lambda(A \rightarrow B)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = F_{\eta\lambda} \cdot d \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mad \Leftrightarrow v = \sqrt{2ad} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^{-1}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 400 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

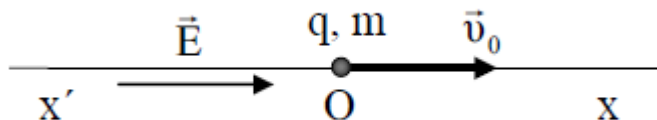
4.4

Η μεταβολή της ορμής του σωματίου είναι : $\Delta \vec{p} = m\vec{v} - 0 = m\vec{v}$ και έχει κατεύθυνση προς την αρνητική πλάκα.

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής, κατά την κίνηση από την θετική μέχρι την αρνητική πλάκα, είναι :

$$|\Delta p| = mv = (3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Kg}) \cdot \left(4 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \Rightarrow |\Delta p| = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

34. (21398) Σε μία περιοχή υπάρχει ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο έντασης $\vec{E}$ με μέτρο $E = 10^5 \frac{N}{C}$. Θεωρούμε άξονα $x'x$ που έχει θετική κατεύθυνση εκείνη των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου $\vec{E}$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύεται σωματίδιο μάζας $m = 10^{-3} \text{ kg}$ και αρνητικού φορτίου $q = -10^{-2} \text{ C}$ από την αρχή του άξονα O και κατά την θετική φορά με ταχύτητα $v_0 = 4 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Να θεωρήσετε πως η μοναδική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι η ηλεκτροστατική και να υπολογίσετε



4.1. την επιτάχυνση που αποκτά το σωματίδιο.

Μονάδες 6

4.2. τη διαφορά δυναμικού μεταξύ της αρχής O και του σημείου που θα σταματήσει το σωματίδιο στιγμιαία.

Μονάδες 6

4.3. ποια χρονική στιγμή θα επιστρέψει το σωματίδιο στην αρχή O .

Μονάδες 6

4.4. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματιδίου κατά την κίνησή του από την αρχή O μέχρι να βρεθεί πάλι στην θέση αυτή.

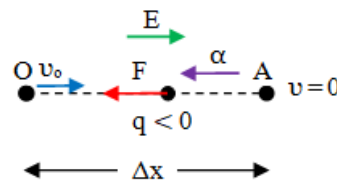
Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Το σωματίδιο δέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο σταθερή δύναμη μέτρου $F = E|q|$, αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας. Σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση, αντίρροπη της αρχικής ταχύτητας, μέτρου :

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{E|q|}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}} \frac{m}{s^2} \Rightarrow \alpha = 10^6 \frac{m}{s^2}.$$



4.2

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το O μέχρι το σημείο A που μηδενίζεται η ταχύτητα :

$$W_{F(O \rightarrow A)} = K_A - K_O \Leftrightarrow q \cdot V_{OA} = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Leftrightarrow V_{OA} = -\frac{m v_0^2}{2q}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } V_{OA} = -\frac{10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^6}{2 \cdot (-10^{-2})} V \Rightarrow V_{OA} = 8 \cdot 10^5 V.$$

4.3

Το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, με $v_0 > 0$ και $\alpha < 0$.

$$\text{Η εξίσωση της μετατόπισης είναι : } \Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (1)$$

Τη στιγμή που επιστρέφει στο O είναι :

$$\Delta x = 0 \xrightarrow{(1)} 0 = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow t(v_0 - \frac{1}{2} \alpha t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0, \text{ απορρίπτεται} \\ t = \frac{2v_0}{\alpha} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3}{10^6} s = 8 \cdot 10^{-3} s, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

Άρα, το σωματίδιο θα επιστρέψει στο Ο τη χρονική στιγμή $t = 8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

4.4

Τη στιγμή που επιστρέφει στο Ο το σωματίδιο, έχει ταχύτητα :

$$v = v_0 - at = v_0 - a \frac{2v_0}{a} = v_0 - 2v_0 \Rightarrow v = -v_0 = -4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η μεταβολή της ορμής του σωματιδίου είναι (αλγεβρικά) :

$$\Delta p = mv - mv_0 = m(-v_0 - v_0) = -2mv_0 \Rightarrow \Delta p = -2 \cdot (10^{-3} \text{ Kg}) \left(4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow \Delta p = -8 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σωματιδίου είναι : $|\Delta p| = 8 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Σχόλιο : Στο ερώτημα 4.1 η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητείται μόνο το μέτρο ή και η κατεύθυνση της επιτάχυνσης.

35. (21598) Δύο παράλληλες οριζόντιες μεταλλικές πλάκες (με την αρνητική πλάκα να βρίσκεται κάτω από την θετική) απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 10\text{cm}$ και είναι φορτισμένες με τάση $V = 1000\text{ V}$. Μεταξύ των πλακών αναπτύσσεται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Σώμα με φορτίο $q = 2\text{ }\mu\text{C}$ και μάζας $m = 2\text{ g}$ αφήνεται στην θετική πλάκα, στο σημείο Α και μπορεί να μετακινείται μέσα στο πεδίο. Αντιστάσεις και βαρυτικές δυνάμεις αμελούνται. Να υπολογίσετε:

4.1. την ένταση του πεδίου και τη δύναμη που ασκεί το ηλεκτρικό πεδίο στο φορτίο.

Μονάδες 6

4.2. πόσο έργο παράγεται από το πεδίο όταν το φορτίο q μετακινείται κάθετα στις πλάκες, από την θετική προς την αρνητική, από το σημείο Α προς το Γ. Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει το φορτίο; Δίνεται η απόσταση: $x = (ΑΓ) = 5\text{ cm}$.

Μονάδες 6

4.3. το δυναμικό του σημείου Γ του προηγούμενου ερωτήματος, αν το σημείο Α έχει δυναμικό $V_A = 700\text{ V}$.

Μονάδες 6

4.4. το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το φορτίο q στο σημείο Γ.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Η ένταση $\vec{E}$ και οι δυναμικές γραμμές του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου έχουν φορά από τη θετική προς την αρνητική πλάκα.

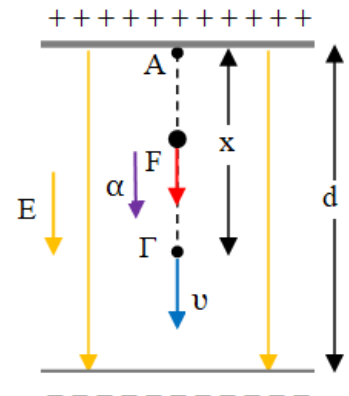
Το μέτρο της έντασης του πεδίου είναι :

$$E = \frac{V}{d} = \frac{10^3\text{ V}}{10^{-1}\text{ m}} \Rightarrow E = 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \left(\text{ή } \frac{\text{N}}{\text{C}} \right).$$

Το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο, άρα η ηλεκτρική δύναμη έχει φορά προς τα κάτω (ίδια φορά με τις δυναμικές γραμμές).

Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης που δέχεται το σωματίδιο είναι :

$$F = E|q| = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\text{ C} \Rightarrow F = 2 \cdot 10^{-2}\text{ N}.$$



4.2

Κατά τη διάρκεια της κίνησης από το Α στο Γ, η ηλεκτρική δύναμη παράγει έργο :

$$W_F = F \cdot x \cdot \sin 0^\circ = F \cdot x \Rightarrow W_F = (2 \cdot 10^{-2}\text{ N}) \cdot (5 \cdot 10^{-2}\text{ m}) \Rightarrow W_F = 10^{-3}\text{ J}.$$

Με την επίδραση της σταθερής δύναμης του πεδίου, το σωματίδιο θα αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$. Αφού ήταν ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

4.3

Για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων Α, Γ ισχύει :

$$V_{AG} = E \cdot x = \left(10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \cdot (5 \cdot 10^{-2}\text{ m}) = 500\text{ V}.$$

$$\text{Είναι : } V_{AG} = V_A - V_\Gamma \Leftrightarrow V_\Gamma = V_A - V_{AG} = 700\text{ V} - 500\text{ V} \Rightarrow V_\Gamma = 200\text{ V}.$$

4.4

1ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σωματιδίου από το Α στο Γ :

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_F \Leftrightarrow v^2 = \frac{2W_F}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2W_F}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ος τρόπος (με τις εξισώσεις κίνησης)

Με την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης το σωματίδιο αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου :

$$\alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ N}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Έστω ότι θα φτάσει στο Γ μετά από χρόνο t .

Ισχύει :

$$x = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2x}{\alpha} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{\alpha}}. \quad (1)$$

Το σωματίδιο φτάνει στο Γ με ταχύτητα μέτρου :

$$v = \alpha t \xrightarrow{(1)} v = \alpha \sqrt{\frac{2x}{\alpha}} \Leftrightarrow v = \sqrt{2\alpha x} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλια :

- 1) Στο ερώτημα 4.1 η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητείται μόνο το μέτρο ή και η κατεύθυνση της έντασης και της δύναμης.
- 2) Το βάρος του σωματιδίου έχει μέτρο $B = mg \cong 2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$, δηλαδή $B \cong F$.
Επομένως, **η βαρυτική δύναμη είναι σημαντική και θα έπρεπε να ληφθεί υπ' όψη.**

36. (21670) Οι δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου είναι οριζόντιες με φορά προς τα δεξιά. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων Α και Γ που απέχουν απόσταση $(ΑΓ) = 50 \text{ cm}$ και βρίσκονται πάνω στην ίδια δυναμική γραμμή είναι $V_{ΑΓ} = 50 \text{ V}$.

4.1. Να υπολογίσετε την διαφορά δυναμικού δύο άλλων σημείων Β και Δ που βρίσκονται πάνω στην ίδια δυναμική γραμμή, ανάμεσα στα Α και Γ και απέχουν το μεν Β απόσταση $x = 10 \text{ cm}$ από το Α, το δε Δ απόσταση $2 \cdot x$ από το Γ.

Μονάδες 6

4.2. Τοποθετούμε στο σημείο Α φορτίο $q = +2 \text{ C}$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Να προσδιορίσετε την κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθεί το φορτίο και την δύναμη που θα του ασκηθεί από το πεδίο.

Μονάδες 6

4.3. Δίνεται η μάζα του φορτίου $m = 1 \text{ g}$. Να υπολογίσετε την ταχύτητα που θα αποκτήσει το φορτίο αν κινηθεί από το σημείο Α σε ένα σημείο Ζ που απέχει $x_1 = 0,9 \text{ m}$ στην φορά κίνησής του. Η βαρυτική δύναμη θεωρείται αμελητέα.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του φορτίου και τον χρόνο κίνησής του από το Α στο Ζ.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης $\vec{E}$ του πεδίου είναι :

$$E = \frac{V_{ΑΓ}}{(ΑΓ)} = \frac{50 \text{ V}}{0,5 \text{ m}} \Rightarrow E = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Η απόσταση ΒΔ είναι : $(ΒΔ) = 50 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$.

$$\text{Επομένως : } V_{ΒΔ} = E \cdot (ΒΔ) = \left(100 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \cdot (0,2 \text{ m}) = 20 \text{ V}.$$

4.2

Το θετικό φορτίο q δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}$, μέτρου :

$$F = E|q| = \left(100 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \cdot (2 \text{ C}) = 200 \text{ N}.$$

Η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση του πεδίου, δηλαδή από το Α προς το Γ.

Αφού το σωματίδιο είναι ακίνητο αρχικά, θα κινηθεί πάνω στη δυναμική γραμμή με φορά από το Α προς το Γ.

4.3

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σωματιδίου από το Α στο Ζ :

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_F \Leftrightarrow v^2 = \frac{2W_F}{m} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot x_1}{m}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 0,9}{10^{-3}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

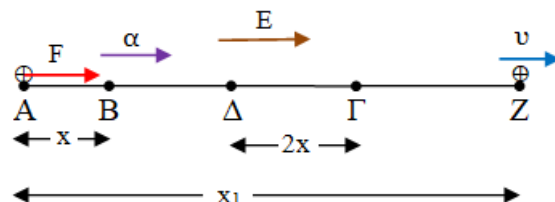
$$\text{Το σωματίδιο αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου : } \alpha = \frac{F}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 10^2 \text{ N}}{10^{-3} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Αφού είναι ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Έστω ότι θα φτάσει στο Ζ μετά από χρόνο t .

Ισχύει :

$$v = \alpha t \Leftrightarrow t = \frac{v}{\alpha} \Rightarrow t = \frac{6 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^5} \text{ s} \Rightarrow t = 3 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$



Σχόλια :

1) Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και δεν έχει μάζα ούτε ταχύτητα ή επιτάχυνση.

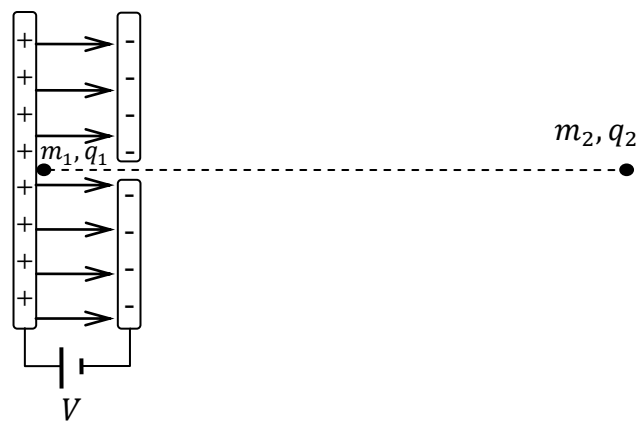
Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Τοποθετούμε στο σημείο Α ένα σωματίο με φορτίο q . . . », « . . . η μάζα του σωματίου είναι $m = 1 \text{ g}$ », « . . . την ταχύτητα που θα αποκτήσει το σωματίο . . . », « . . . την επιτάχυνση του σωματίου . . . ».

2) Το 1 C είναι πολύ μεγάλη ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου.

Είναι αδύνατο ένα σωματίο με μάζα 1 g να αποκτήσει φορτίο 2 C .

37. (21991) Σωματίδιο (Σ_1), με μάζα $m_1 = 4 \cdot 10^{-13} \text{ kg}$ και θετικό φορτίο $q_1 = 10^{-8} \text{ C}$, αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα πολύ κοντά στο θετικό οπλισμό φορτισμένου πυκνωτή και στο εσωτερικό του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που έχει δημιουργηθεί μεταξύ των οπλισμών του.

Η τάση φόρτισης του πυκνωτή είναι $V = 2.000 \text{ V}$ και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του $d = 8 \text{ cm}$. Η κίνηση του σωματιδίου (Σ_1) είναι ευθύγραμμη, παράλληλη με τις δυναμικές γραμμές του ομογενούς πεδίου του πυκνωτή και ακριβώς πάνω στην ευθεία της τροχιάς αυτής, υπάρχει μια τρύπα στον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή. Από το άνοιγμα αυτό, το



σωματίδιο εξέρχεται από το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή με την ταχύτητα $\vec{v}_0$ που απέκτησε στο τέλος της κίνησής του μέσα σε αυτό το πεδίο. Στην ευθεία της κίνησης του σωματιδίου (Σ_1) και σε μεγάλη απόσταση από το σημείο εξόδου του από τον πυκνωτή, υπάρχει άλλο σωματίδιο (Σ_2) της ίδιας μάζας ($m_1 = m_2$) αλλά διπλάσιου θετικού φορτίου ($q_2 = 2q_1$) από το (Σ_1). Το σωματίδιο (Σ_2) είναι αρχικά ακίνητο, αλλά είναι ελεύθερο να κινηθεί.

4.1. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σωματιδίου (Σ_1) κατά την κίνησή του στο ομογενές πεδίο του πυκνωτή.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το χρόνο κίνησης του σωματιδίου (Σ_1) στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή και το μέτρο v_0 της ταχύτητάς του καθώς εξέρχεται μέσω της τρύπας του αρνητικού οπλισμού από το πεδίο αυτό.

Μονάδες 6

4.3. Να εξηγήσετε, καθώς το σωματίδιο (Σ_1) κινείται προς το σωματίδιο (Σ_2), ποια είναι η συνθήκη ώστε να μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση, και να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου (Σ_1), όταν βρεθεί στην ελάχιστη απόσταση από το (Σ_2).

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων.

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή ομογενές και σημαντικό μόνο μεταξύ των οπλισμών του, δηλαδή να θεωρήσετε ασήμαντη τη δράση του στο σωματίδιο (Σ_1), μετά την έξοδό του από αυτό.

Να θεωρήσετε επίσης ότι οι βαρυτικές δυνάμεις μπορούν να αγνοηθούν και ότι οι πάσης φύσης αντιστάσεις στην κίνηση των σωματιδίων είναι ασήμαντες.

Δίνεται η σταθερά $k_c = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$.

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης $\vec{E}$ του πεδίου είναι :

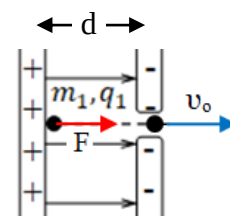
$$E = \frac{V}{d} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ V}}{8 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \Rightarrow E = 2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \left(\text{ή } \frac{\text{N}}{\text{C}} \right).$$

Το Σ_1 δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}$, μέτρου :

$$F = E|q_1| = \left(2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \cdot (10^{-8} \text{ C}) = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

Η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση του πεδίου (προς τα δεξιά).

$$\text{Το } \Sigma_1 \text{ αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου : } a = \frac{F}{m_1} \Rightarrow a = \frac{2,5 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{4 \cdot 10^{-13} \text{ Kg}} \Rightarrow a = \frac{5}{8} \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



4.2

Αφού το Σ_1 είναι ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση μέχρι να βγει από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Έστω t ο χρόνος κίνησης στο πεδίο. Ισχύει :

$$d = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2d}{a} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{\frac{5}{8} \cdot 10^9}} \text{ s} = \sqrt{2,56 \cdot 10^{-10}} \Rightarrow t = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

$$\text{Το } \Sigma_1 \text{ φτάνει στο } \Gamma \text{ με ταχύτητα μέτρου : } v_o = at \Rightarrow v_o = \frac{5}{8} \cdot 10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_o = 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Αφού βγει το Σ_1 από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, θα πλησιάζει το Σ_2 και τα δύο σωματίδια θα αλληλεπιδρούν.

Η δύναμη που δέχεται το Σ_1 είναι αντίρροπη από την ταχύτητα με αποτέλεσμα να το επιβραδύνει, ενώ η δύναμη που δέχεται το Σ_2 το επιταχύνει.

Αρχικά το Σ_1 έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Σ_2 ($v_1 > v_2$), με αποτέλεσμα να μειώνεται η μεταξύ τους απόσταση.

Αφού το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 μειώνεται ενώ του Σ_2 αυξάνεται, κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους θα αποκτήσουν ίσα μέτρα ($v_1' = v_2' = v$).

Στη συνέχεια η ταχύτητα του Σ_2 είναι μεγαλύτερη από του Σ_1 , με αποτέλεσμα η μεταξύ τους απόσταση να αυξάνεται.

Επομένως, **η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη τη στιγμή που έχουν ίσες ταχύτητες.**

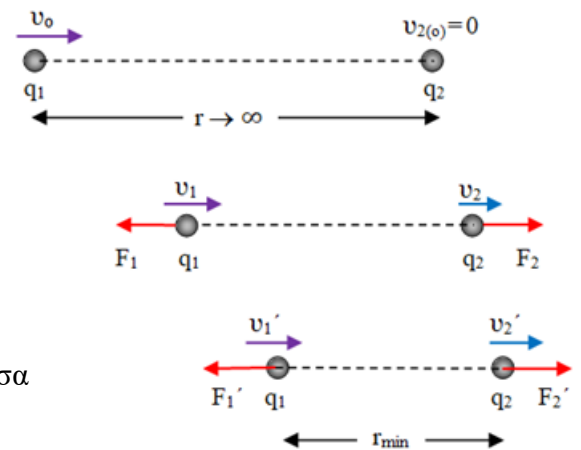
Το σύστημα είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική κατάσταση όταν το 1ο βρίσκεται σε «άπειρη» απόσταση και τελική όταν έχουν ίσες ταχύτητες :

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow m_1 v_o = m_1 v + m_2 v \xrightarrow{m_2 = m_1} m_1 v_o = 2m_1 v \Leftrightarrow v = \frac{v_o}{2} \Rightarrow v = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι ελάχιστη, οι ταχύτητες έχουν μέτρα :

$$v_1' = v_2' = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.4

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τη στιγμή που το Σ_1 βρίσκεται σε «άπειρη» απόσταση από το Σ_2 και τη στιγμή που η απόστασή τους είναι ελάχιστη :

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1 v_o^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} \xrightarrow{m_2 = m_1}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_o^2 = m_1 v^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{r_{\min}} \xrightarrow{q_2 = 2q_1, v = \frac{v_o}{2}} K_c \frac{2q_1^2}{r_{\min}} = m_1 \left(\frac{v_o^2}{2} - \frac{v_o^2}{4} \right) \Leftrightarrow K_c \frac{2q_1^2}{r_{\min}} = m_1 \frac{v_o^2}{4} \Leftrightarrow r_{\min} = \frac{8K_c q_1^2}{m_1 v_o^2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } r_{\min} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-16}}{4 \cdot 10^{-13} \cdot 10^8} \text{ m} \Rightarrow r_{\min} = 0,18 \text{ m}.$$

Σχόλιο : Η έννοια του πυκνωτή δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη.

38. (22166) Δύο φορτισμένες επίπεδες πλάκες (οπλισμοί) με αντίθετα φορτία δημιουργούν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι οριζόντιες με φορά προς τα δεξιά. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι $V = 2400\text{V}$ και η μεταξύ τους απόσταση $L = 1,2\text{m}$. Σε σημείο Α, που απέχει $x = 20\text{cm}$ από την θετικά φορτισμένη πλάκα αφήνεται σώμα με φορτίο $q = +2\text{C}$ και μάζα $m = 20\text{g}$. Αντιστάσεις και βαρυτικές δυνάμεις αμελούνται.

4.1. Να υπολογίσετε την ένταση του πεδίου και να μελετήσετε το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει το φορτίο.

Μονάδες 5

4.2. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του φορτίου σε ένα σημείο Γ, όταν θα έχει διανύσει απόσταση $(\text{ΑΓ}) = 0,625\text{m}$ μέσα στο πεδίο.

Μονάδες 7

4.3. Στο σημείο εκείνο τοποθετείται αφόρτιστο σώμα μάζας $M = 480\text{g}$, το οποίο συγκρούεται πλαστικά με το κινούμενο φορτίο. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία φθάνει το συσσωμάτωμα στην απέναντι πλάκα.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης $\vec{E}$ του πεδίου είναι :

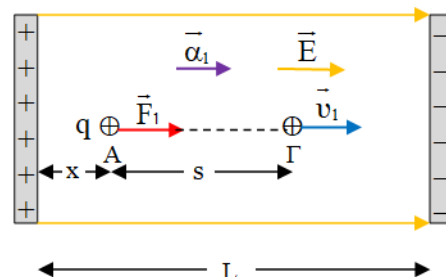
$$E = \frac{V}{L} = \frac{2,4 \cdot 10^3 \text{ V}}{1,2 \text{ m}} \Rightarrow E = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} \left(\text{ή } \frac{\text{N}}{\text{C}} \right).$$

Το σωματίο δέχεται από το πεδίο σταθερή δύναμη $\vec{F}_1$, μέτρου :

$$F_1 = E|q| = \left(2 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \cdot (2\text{C}) = 4 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με την ένταση του πεδίου (προς τα δεξιά).

Αφού το σωματίο είναι ακίνητο αρχικά, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ.



4.2

1ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σωματίου από το Α στο Γ :

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = W_F \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{2W_F}{m} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2F_1s}{m}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 0,625}{2 \cdot 10^{-2}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{25 \cdot 10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ος τρόπος

$$\text{Το σωματίο αποκτά σταθερή επιτάχυνση μέτρου : } \alpha_1 = \frac{F_1}{m} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{4 \cdot 10^3 \text{ N}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ Kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Έστω t_1 ο χρόνος κίνησης του σωματίου μέχρι να φτάσει στο Γ.

Ισχύει :

$$s = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2s}{\alpha} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2s}{\alpha}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,625}{2 \cdot 10^5}} \text{ s} = \sqrt{6,25 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow t_1 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

$$\text{Το σωματίο φτάνει στο Γ με ταχύτητα μέτρου : } v_1 = \alpha_1 t_1 \Rightarrow v_1 = 2 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

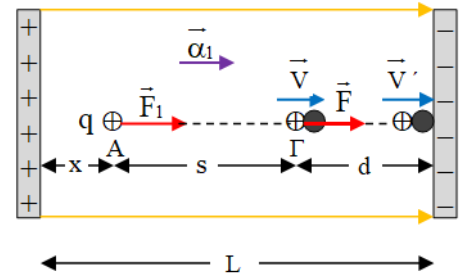
Έστω $\vec{V}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Το σύστημα των δύο σωματιών είναι μονωμένο, άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv_1 = (m+M)V \Leftrightarrow V = \frac{mv_1}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^2}{0,5} \frac{m}{s} \Rightarrow V = 20 \frac{m}{s}.$$



4.4

Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα απέχει από την αρνητική πλάκα, απόσταση :

$$d = L - (x + s) = 1,2 \text{ m} - 0,825 \text{ m} \Rightarrow d = 0,375 \text{ m}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του συσσωματώματος από το Γ μέχρι την αρνητική πλάκα :

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m+M)V'^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = F \cdot d \Leftrightarrow V'^2 = V^2 + \frac{2Fd}{m+M} \Leftrightarrow V' = \sqrt{V^2 + \frac{2E|q|d}{m+M}} \Rightarrow$$

$$V' = \sqrt{4 \cdot 10^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,375}{0,5}} \frac{m}{s} \Rightarrow V' = \sqrt{6400} \frac{m}{s} \Rightarrow V' = 80 \frac{m}{s}.$$

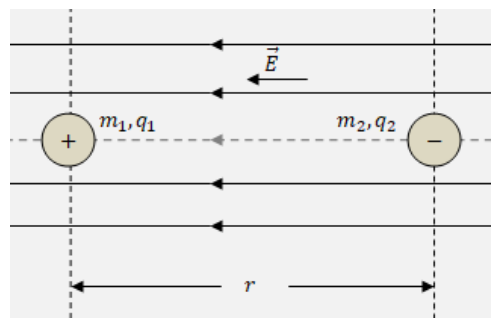
Σχόλια :

1) Το 1 C είναι πολύ μεγάλη ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου. Είναι αδύνατο ένα σωματίο με μάζα 20 g να αποκτήσει φορτίο 2 C.

2) Το ηλεκτρικό φορτίο είναι φυσικό μέγεθος και όχι σώμα.

Οι εκφράσεις «το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει το φορτίο . . . », «την ταχύτητα του φορτίου . . . ». «συγκρούεται πλαστικά με το κινούμενο φορτίο . . . » είναι λανθασμένες.

39. (22516) Δύο μικρά σφαιρίδια (1) και (2) με μάζες $m_1 = 240 \text{ mg}$ και $m_2 = 60 \text{ mg}$ αντίστοιχα, έχουν φορτιστεί κατάλληλα και έχουν αποκτήσει ηλεκτρικά φορτία $q_1 = 8 \text{ } \mu\text{C}$ και $q_2 = -8 \text{ } \mu\text{C}$ αντίστοιχα. Τα δύο σφαιρίδια βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο και λείο μονωτικό δάπεδο, μέσα σε ομογενές **οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο**, το μέτρο της έντασης του οποίου είναι $E = 8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$, με αποτέλεσμα να ισορροπούν ακίνητα σε απόσταση r μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



4.1. Να υπολογίσετε την απόσταση r μεταξύ των δύο σφαιριδίων.

Μονάδες 7

Κάποια στιγμή καταργείται το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, με αποτέλεσμα τα φορτισμένα σφαιρίδια να αρχίσουν να πλησιάζουν κινούμενα το ένα προς το άλλο, εξαιτίας της έλξης μεταξύ τους. Να υπολογίσετε:

4.2. Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιριδίων, τη στιγμή που η μεταξύ τους απόσταση έχει υποτριπλασιαστεί.

Μονάδες 7

4.3. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σφαιριδίου (1), τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σφαιριδίων έχει υποτριπλασιαστεί.

Μονάδες 5

4.4. Το έργο της δύναμης που δέχεται το σφαιρίδιο (1) από την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο φορτίων, από τη στιγμή που καταργήθηκε το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, μέχρι να υποτριπλασιαστεί η μεταξύ τους απόσταση.

Μονάδες 6

Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά στο κενό $K_{\eta\lambda} = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2}$, τα σωματίδια έχουν ασήμαντες διαστάσεις και οι δυνάμεις ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης είναι οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια κατά τη διάρκεια του πειράματος που περιγράψαμε.

Απάντηση

4.1

Για τα φορτία των σωματιδίων ισχύει: $|q_1| = |q_2| = |q|$.

Σε κάθε σωματίδιο ασκούνται δύο αντίρροπες δυνάμεις:

η ελκτική δύναμη Coulomb $\vec{F}_C$ από το άλλο σωματίδιο

και η δύναμη $\vec{F}_E$ από το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Αφού το σωματίδιο ισορροπεί, οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα.

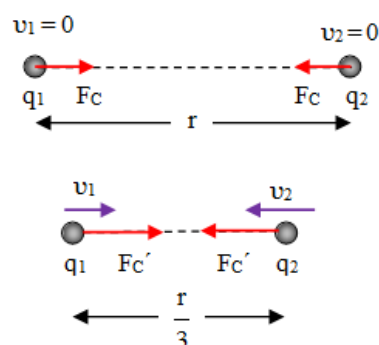
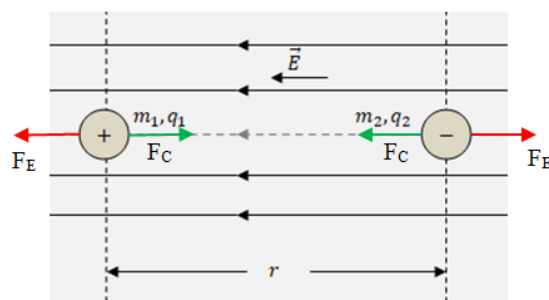
$$F_C = F_E \Leftrightarrow K_C \frac{|q|^2}{r^2} = E|q| \Leftrightarrow r^2 = \frac{K_C |q|}{E} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{K_C |q|}{E}} \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^5}} \text{ m} \Rightarrow r = \sqrt{9 \cdot 10^{-2}} \text{ m} \Rightarrow r = 0,3 \text{ m}.$$

4.2

Αφού καταργηθεί το ομογενές πεδίο, τα σωματίδια αρχίζουν να πλησιάζουν με την επίδραση των ελκτικών δυνάμεων Coulomb.

Το σύστημα είναι μονωμένο, άρα η ορμή του διατηρείται σταθερή.



Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ, με αρχική την ορμή του συστήματος τη στιγμή που καταργείται το ομογενές πεδίο και τελική τη στιγμή που η απόστασή τους υποτριπλασιάζεται :

$$\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \xrightarrow{m_1 = 4m_2} v_2 = 4v_1. \quad (1)$$

Η ηλεκτρική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή. Θεωρούμε σαν αρχική τη μηχανική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή που καταργείται το ομογενές πεδίο και τελική τη στιγμή που η απόστασή τους υποτριπλασιάζεται και εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ :

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Leftrightarrow 0 + K_c \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + K_c \frac{q_1 q_2}{\frac{r}{3}} \xrightarrow{m_1 = 4m_2, v_2 = 4v_1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4m_2 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot 16v_1^2 = K_c \frac{q_1 q_2}{r} - 3K_c \frac{q_1 q_2}{r} \Leftrightarrow 10m_2 v_1^2 = -2K_c \frac{q_1 q_2}{r} \Leftrightarrow v_1^2 = -\frac{K_c q_1 q_2}{5m_2 r} \Leftrightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{-\frac{K_c q_1 q_2}{5m_2 r}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_1 = \sqrt{-\frac{9 \cdot 10^9 \cdot (8 \cdot 10^{-6})(-8 \cdot 10^{-6})}{5 \cdot 6 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-1}}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{6400} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$(1) \Rightarrow v_2 = 320 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής κάθε σωματιδίου είναι ίσος με τη

$$\text{συνισταμένη δύναμη : } \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_c.$$

Τη στιγμή που η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι $\frac{r}{3}$ ισχύει :

$$\left| \frac{dp_1}{dt} \right| = F_c' = K_c \frac{|q_1| |q_2|}{\left(\frac{r}{3} \right)^2} = 9K_c \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow \left| \frac{dp_1}{dt} \right| = 9 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-2}} \text{ N} \Rightarrow \left| \frac{dp_1}{dt} \right| = 57,6 \text{ N}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για την κίνηση του 1ου σωματιδίου, από τη στιγμή που καταργείται το ηλεκτρικό πεδίο μέχρι να υποτριπλασιαστεί η απόσταση των σωματιδίων :

$$W_{F_1} = K_{1(τελ)} - K_{1(αρχ)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 \Rightarrow W_{F_1} = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 10^{-4} \cdot 80^2 \text{ J} \Rightarrow W_{F_1} = 0,768 \text{ J}.$$

Σχόλιο : Η διατύπωση «οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο» είναι λάθος.

Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου είναι οριζόντιες.

40. (22521) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών **επίπεδου πυκνωτή** είναι $V = 100 \text{ V}$.

Ο πυκνωτής αποτελείται από δυο κατακόρυφες μεταλλικές πλάκες, του ίδιου εμβαδού και σχήματος, οι οποίες είναι παράλληλες και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 10 \text{ cm}$. Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται στο εσωτερικό του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ παράλληλα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Το σημείο εισόδου στον πυκνωτή είναι μια οπή στη θετικά φορτισμένη πλάκα. Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται από αυτή την οπή με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 και με κατεύθυνση την αρνητικά φορτισμένη πλάκα. Στο ηλεκτρόνιο ασκείται δύναμη μόνο λόγω του ηλεκτρικού πεδίου και το μέτρο της ταχύτητας του μηδενίζεται, στιγμιαία, τη στιγμή που φτάνει στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα.

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της έντασης του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.

Μονάδες 5

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του ηλεκτρονίου κατά την κίνησή του μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε την αρχική κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου σε **ηλεκτρονιοβόλτ (eV)**.

Μονάδες 7

4.4. Αν το ηλεκτρόνιο εισέρχονταν με την ίδια αρχική ταχύτητα v_0 από μια οπή της αρνητικά φορτισμένης πλάκας θα έφτανε στη θετικά φορτισμένη πλάκα με ταχύτητα μέτρου v_1 . Να υπολογίσετε το πηλίκο των μέτρων των ταχυτήτων $\frac{v_1}{v_0}$.

Μονάδες 7

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, και οι βαρυτικές δυνάμεις δεν λαμβάνονται υπόψη.

Το στοιχειώδες φορτίο που μετακινείται είναι: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης $\vec{E}$ του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου είναι :

$$E = \frac{V}{d} = \frac{10^2 \text{ V}}{10^{-1} \text{ m}} \Rightarrow E = 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} \left(\text{ή } \frac{\text{N}}{\text{C}} \right).$$

4.2

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της

ορμής του ηλεκτρονίου είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} = \vec{F}_{\eta\lambda}.$

Επομένως :

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = F_{\eta\lambda} = Ee = \left(10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ N}.$$

4.3

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του ηλεκτρονίου από το σημείο Α της θετικής πλάκας μέχρι το σημείο Β της αρνητικής πλάκας :

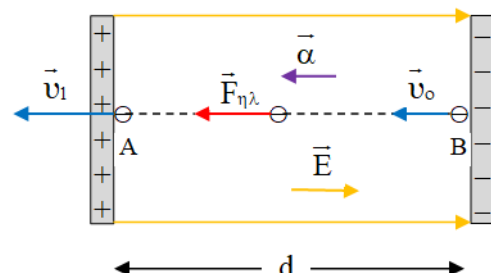
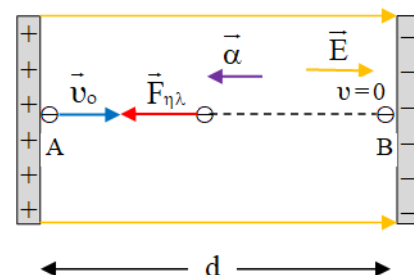
$$K_B - K_A = W_{F(A \rightarrow B)} \Leftrightarrow 0 - K_A = -eV_{AB} \Leftrightarrow K_A = eV_{AB}. \quad (1)$$

Με αντικατάσταση : $K_A = 100 \text{ eV}$.

4.4

Αφού το ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται από το Β με αρχική ταχύτητα ίδιου μέτρου v_0 , έχει την ίδια αρχική κινητική ενέργεια :

$$K_B' = K_A = eV_{AB}. \quad (2)$$



Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του ηλεκτρονίου από το σημείο Β της αρνητικής πλάκας μέχρι το σημείο Α της θετικής πλάκας :

$$K_A' - K_B' = W_{F(B \rightarrow A)} \xrightarrow{(2)} K_A' - eV_{AB} = (-e)V_{BA} \Leftrightarrow K_A' - eV_{AB} = -e(-V_{AB}) \Leftrightarrow K_A' = 2eV_{AB}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει :

$$K_A' = 2K_A \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow v_1^2 = 2v_0^2 \Leftrightarrow \frac{v_1^2}{v_0^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{2}.$$

Σχόλια :

1) Οι έννοιες «πυκνωτής», «επίπεδος πυκνωτής», «ηλεκτρονιοβόλτ» είναι εκτός διδακτέας ύλης.

2) Η διατύπωση «το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο που μετακινείται» δεν είναι σωστή.

Η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου (στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο) είναι $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Βαρυτικό πεδίο

1. (15893)

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής ενός σώματος από το βαρυτικό πεδίο της Γης, όταν αυτό εκτοξεύεται από ύψος $h = R_{\Gamma}$.

Μονάδες 6

4.2. Σώμα Σ εκτοξεύεται προς το διάστημα, από ύψος $h = R_{\Gamma}$ από την επιφάνεια της Γης. Τη στιγμή της εκτόξευσης, η κινητική ενέργεια του σώματος Σ είναι δεκαέξι φορές μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώμα Σ – Γη. Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ θα διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του σώματος Σ, τη στιγμή που διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης, αν εκτοξεύτηκε από το ύψος h προς το διάστημα, με την ταχύτητα που προσδιορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Η μάζα του σώματος Σ είναι $m = 4 \text{ kg}$.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το έργο της βαρυτικής δύναμης που δέχεται το σώμα Σ από τη στιγμή της εκτόξευσης, μέχρι τη διαφυγή του από το πεδίο βαρύτητας της Γης, αν η μάζα του είναι $m = 4 \text{ kg}$.

Μονάδες 7

Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_{\Gamma} = 6400 \text{ km}$ και το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

Να θεωρήσετε ότι στο σώμα, μετά την εκτόξευσή του ασκείται μόνο η βαρυτική έλξη από τη Γη.

Απάντηση

4.1

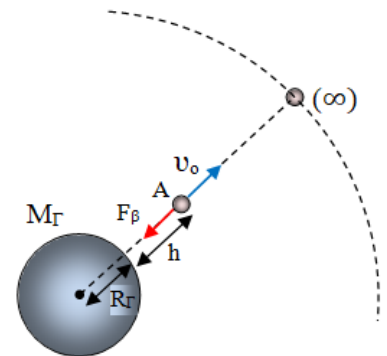
Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην

επιφάνειά της, ισχύει : $g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2$. (1)

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής v_{δ} ενός σώματος που

εκτοξεύεται από ύψος h από την επιφάνεια της Γης, είναι :

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}} \xrightarrow[h=R_{\Gamma}]{(1)} v_{\delta} = \sqrt{\frac{2g_0 R_{\Gamma}^2}{2R_{\Gamma}}} \Leftrightarrow v_{\delta} = \sqrt{g_0 R_{\Gamma}} \Rightarrow$$
$$v_{\delta} = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\delta} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Ισχύει :

$$K_A = 16|U_A| \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = 16 \cdot G \frac{M_{\Gamma}m}{R_{\Gamma} + h} \Leftrightarrow v_0^2 = 16 \cdot G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{16 \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}}. \quad (2)$$

$$\text{Όμως : } v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h}}. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) συμπεραίνουμε ότι : $v_0 > v_{\delta}$, άρα το σώμα θα διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας.

4.3

Η βαρυτική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για τη θέση Α (αμέσως μετά την εκτόξευση) και για ένα σημείο εκτός πεδίου βαρύτητας (στο «άπειρο») :

$$K_A + U_A = K_\infty + U_\infty \xrightarrow{K_A=16|U_A|} 16|U_A| - |U_A| = K_\infty \Leftrightarrow 15|U_A| = K_\infty \Leftrightarrow 15 \frac{GM_\Gamma m}{2R_\Gamma} = K_\infty \xrightarrow{(1)}$$

$$K_\infty = 15 \frac{mg_o R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Rightarrow K_\infty = \frac{15}{2} mg_o R_\Gamma \Rightarrow K_\infty = 1,92 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

4.4

Ισχύει :

$$W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = U_A - U_\infty = -G \frac{M_\Gamma m}{2R_\Gamma} - 0 \xrightarrow{(1)} W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = -\frac{mg_o R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = -\frac{mg_o R_\Gamma}{2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = -\frac{4 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{2} \text{ J} \Rightarrow W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = -1,28 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Σχόλιο : Δεχόμαστε ότι η Γη είναι ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

2. (15894)

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από το βαρυτικό πεδίο της Γης ενός σώματος που εκτοξεύεται από την επιφάνειά της.

Μονάδες 6

4.2. Σώμα Σ εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης προς το διάστημα, με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα διαφυγής. Ποια είναι η σχέση της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα Σ – Γη τη στιγμή της εκτόξευσης;

Μονάδες 6

4.3. Πόση είναι η μηχανική ενέργεια του σώματος Σ τη στιγμή που διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το έργο της βαρυτικής δύναμης που δέχεται το σώμα Σ από τη στιγμή της εκτόξευσης, μέχρι τη διαφυγή του από το πεδίο βαρύτητας της Γης, αν η μάζα του σώματος Σ είναι $m = 4 \text{ kg}$.

Μονάδες 7

Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_{\Gamma} = 6400 \text{ km}$ και το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$. Να θεωρήσετε ότι δρουν μόνο οι βαρυτικές δυνάμεις.

Απάντηση

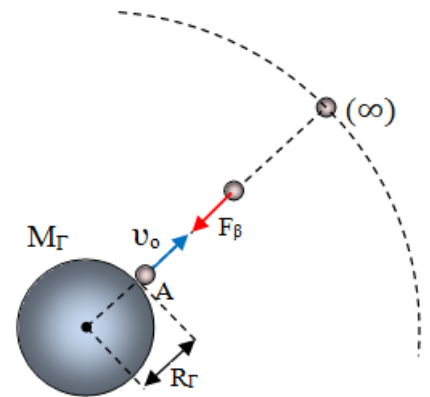
4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην

επιφάνειά της, ισχύει : $g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2$. (1)

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής v_{δ} ενός σώματος που εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης, είναι :

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}}} \xrightarrow{(1)} v_{\delta} = \sqrt{\frac{2g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma}}} \Leftrightarrow v_{\delta} = \sqrt{2g_0 R_{\Gamma}} \Rightarrow$$
$$v_{\delta} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\delta} = 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Τη στιγμή της εκτόξευσης ισχύουν οι σχέσεις :

$$K_A = \frac{1}{2} m v_{\delta}^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2g_0 R_{\Gamma} \Leftrightarrow K_A = m g_0 R_{\Gamma}. \quad (2)$$

$$U_A = -\frac{GM_{\Gamma} m}{R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)} U_A = -\frac{g_0 R_{\Gamma}^2 m}{R_{\Gamma}} \Leftrightarrow U_A = -m g_0 R_{\Gamma}. \quad (3)$$

$$\text{Από (2), (3)} \Rightarrow U_A = -K_A. \quad (4)$$

4.3

Η βαρυτική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζω το Θ.Δ.Μ.Ε. για το σημείο Α (αμέσως μετά την εκτόξευση) και για ένα σημείο εκτός πεδίου

$$\text{βαρύτητας (στο «άπειρο») : } K_A + U_A = E_{\mu\eta\chi(\infty)} \xrightarrow{(4)} E_{\mu\eta\chi(\infty)} = 0.$$

4.4

1ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή από το σημείο εκτόξευσης Α μέχρι το «άπειρο» :

$$W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = K_{\infty} - K_A = 0 - \frac{1}{2} m v_{\delta}^2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 128 \cdot 10^6 \text{ J} \Rightarrow W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = -2,56 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

2ος τρόπος

Ισχύει :

$$W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = U_A - U_{\infty} \xrightarrow{(3)} W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = -m g_o R_{\Gamma} \Rightarrow W_{\beta(A \rightarrow \infty)} = -4 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ J} = -2,56 \cdot 10^8 \text{ J}.$$

Σχόλιο : Δεχόμαστε ότι η Γη είναι ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .

Οι βαρυτικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

3. (16076)

Ένα σώμα μάζας $m = 34 \text{ Kg}$ εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα v_0 .

Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται τη στιγμή που βρίσκεται σε ύψος $h = 7R_\Gamma$, οπότε διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες $m_1 = 10 \text{ Kg}$ και $m_2 = 24 \text{ Kg}$ αντίστοιχα. Το κομμάτι μάζας m_1 κατευθύνεται προς την επιφάνεια της Γης κινούμενο στην ευθεία που περνά από το κέντρο της, ενώ το κομμάτι μάζας m_2 φτάνει στο άπειρο με ταχύτητα που έχει μέτρο $v_\infty = 3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ Km}$ και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$. Να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα v_0 .

Μονάδες 6

β. Την ταχύτητα v_2 του κομματιού μάζας m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση του σώματος.

Μονάδες 6

γ. Την ταχύτητα v_1 του κομματιού μάζας m_1 αμέσως μετά τη διάσπαση του σώματος και την ταχύτητα v_3 με την οποία φτάνει στην επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 8

δ. Το ρυθμό μεταβολής της ορμής του κομματιού μάζας m_1 τη στιγμή που βρίσκεται σε ύψος $h_1 = R_\Gamma$.

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην

$$\text{επιφάνειά της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Η βαρυτική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το σημείο εκτόξευσης Α και το σημείο Γ μηδενισμού της ταχύτητας :

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} = 0 - \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma + h} \xrightarrow{h=7R_\Gamma} \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$v_0^2 = \frac{7GM_\Gamma}{4R_\Gamma} \xrightarrow{(1)} v_0^2 = \frac{7g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{7g_0 R_\Gamma}{4}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{7 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = 4\sqrt{7} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

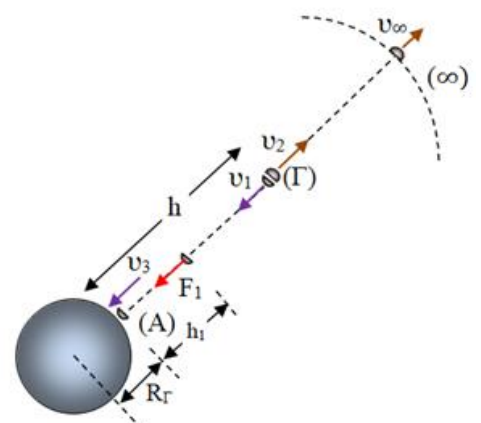
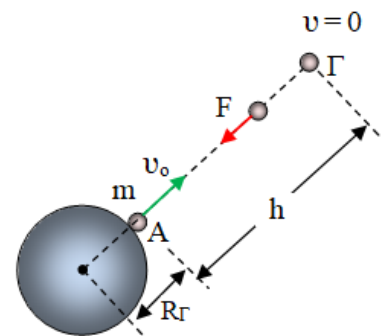
Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το 2ο κομμάτι στο σημείο Γ και το «άπειρο» :

$$K_{\Gamma(2)} + U_{\Gamma(2)} = K_{\infty(2)} + U_{\infty(2)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{GM_\Gamma m_2}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2}m_2 v_\infty^2 + 0$$

$$\xrightarrow{h=7R_\Gamma} \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{GM_\Gamma}{8R_\Gamma} + \frac{1}{2}v_\infty^2 \Leftrightarrow v_2^2 = \frac{GM_\Gamma}{4R_\Gamma} + v_\infty^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$v_2^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} + v_\infty^2 \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{4} + v_\infty^2} \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4} + 9 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_2 = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Η διάρκεια της διάσπασης είναι πολύ μικρή, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι μονωμένο (κατά προσέγγιση). Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ :

$$\vec{P}_{ολ(μετά)} = \vec{P}_{ολ(πριν)} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Δηλαδή, οι ορμές των δύο κομματιών αμέσως μετά τη διάσπαση είναι αντίθετες.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων, ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \Leftrightarrow v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} \Rightarrow v_1 = 12 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το 1ο κομμάτι στο σημείο Γ και το σημείο Α της επιφάνειας της Γης :

$$K_{A(1)} + U_{A(1)} = K_{\Gamma(1)} + U_{\Gamma(1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_3^2 - \frac{GM_{\Gamma} m_1}{R_{\Gamma}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{GM_{\Gamma} m_1}{R_{\Gamma} + h} \xrightarrow{h=7R_{\Gamma}}$$

$$\frac{1}{2} v_3^2 = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{GM_{\Gamma}}{8R_{\Gamma}} + \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} \Leftrightarrow v_3^2 = v_1^2 + \frac{7GM_{\Gamma}}{4R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)} v_3^2 = v_1^2 + \frac{7g_0 R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}} \Leftrightarrow v_3 = \sqrt{v_1^2 + \frac{7g_0 R_{\Gamma}}{4}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_3 = \sqrt{144 \cdot 10^6 + \frac{7 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4}} \frac{m}{s} = \sqrt{256 \cdot 10^6} \frac{m}{s} \Rightarrow v_3 = 16 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

4.4

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος είναι ίσος με τη

$$\text{συνισταμένη δύναμη : } \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}.$$

Η μοναδική δύναμη που δέχεται το 1ο κομμάτι είναι η βαρυτική έλξη της Γης, η οποία έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης. Σε ύψος $h_1 = R_{\Gamma}$, η βαρυτική δύναμη έχει μέτρο :

$$F_1 = G \frac{M_{\Gamma} m_1}{(R_{\Gamma} + h_1)^2} \xrightarrow{h_1=R_{\Gamma}} F_1 = \frac{m_1 g_0 R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow F_1 = \frac{m_1 g_0}{4} \Rightarrow F_1 = \frac{10 \cdot 10}{4} N \Rightarrow F_1 = 25 N.$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του 1ου κομματιού σε ύψος $h_1 = R_{\Gamma}$ έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης και μέτρο :

$$\left| \frac{dp_1}{dt} \right| = F_1 = 25 N.$$

Σχόλιο : Δεχόμαστε ότι η Γη είναι ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .

Οι βαρυτικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

4. (16077)

Δύο σφαιρικοί πλανήτες Π_1 και Π_2 με μάζες M_1 και $M_2 = 9M_1$ έχουν ακτίνες $R_1 = 10^5 \text{ m}$ και $R_2 = 10R_1$ αντίστοιχα. Τα κέντρα των δύο πλανητών απέχουν απόσταση $\ell = 40R_1$. Η ένταση του βαρυτικού πεδίου του πλανήτη Π_1 στην επιφάνειά του έχει μέτρο $g_{o,1} = 6 \text{ m/s}^2$. Να υπολογίσετε:

4.1. Την απόσταση X , από το κέντρο του πλανήτη Π_1 , του σημείου Σ της διακέντρου των δύο πλανητών στο οποίο η συνολική ένταση του βαρυτικού τους πεδίου είναι μηδέν.

Μονάδες 6

4.2. Το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών στο σημείο Σ .

Μονάδες 6

4.3. Την ελάχιστη ταχύτητα v_δ με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε ένα σώμα μάζας $m = 3 \text{ Kg}$ από την επιφάνεια του πλανήτη Π_2 για να φτάσει στον πλανήτη Π_1 .

Μονάδες 8

4.4. Το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m αμέσως μετά την εκτόξευσή του από τον πλανήτη Π_2 .

Μονάδες 5

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης $\vec{g}_1$ του πεδίου βαρύτητας του Π_1 στο σημείο Σ δίνεται από τη σχέση :

$$g_1 = G \frac{M_1}{x^2}. \quad (1)$$

Το μέτρο της έντασης $\vec{g}_2$ του πεδίου βαρύτητας του Π_2 στο σημείο Σ δίνεται από τη σχέση :

$$g_2 = G \frac{M_2}{(\ell - x)^2}. \quad (2)$$

Στο σημείο Σ οι εντάσεις $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ είναι αντίρροπες. Αφού η συνολική ένταση είναι μηδενική, άρα οι εντάσεις $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ έχουν ίσα μέτρα :

$$g_1 = g_2 \xrightarrow{(1),(2)} G \frac{M_1}{x^2} = G \frac{M_2}{(\ell - x)^2} \xrightarrow{M_2 = 9M_1} \frac{M_1}{x^2} = \frac{9M_1}{(\ell - x)^2} \Leftrightarrow (\ell - x)^2 = 9x^2 \xrightarrow{\ell - x > 0, x > 0}$$

$$\ell - x = 3x \Leftrightarrow 4x = \ell \Leftrightarrow x = \frac{\ell}{4} = \frac{40R_1}{4} \Rightarrow x = 10R_1 \Rightarrow x = 10^6 \text{ m}.$$

4.2

Για το μέτρο της έντασης $\vec{g}_{o,1}$ του πεδίου βαρύτητας του Π_1 στην επιφάνειά του, ισχύει :

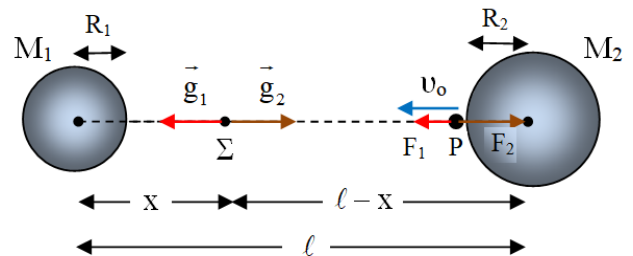
$$g_{o,1} = G \frac{M_1}{R_1^2} \Leftrightarrow GM_1 = g_{o,1} R_1^2. \quad (3)$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας των δύο πλανητών στο σημείο Σ είναι :

$$V_\Sigma = V_{1,\Sigma} + V_{2,\Sigma} = -G \frac{M_1}{x} - G \frac{M_2}{\ell - x} \xrightarrow{x = 10R_1, \ell = 40R_1} V_\Sigma = -G \frac{M_1}{10R_1} - G \frac{9M_1}{30R_1} \Leftrightarrow V_\Sigma = -\frac{4GM_1}{10R_1}$$

$$\xrightarrow{(3)} V_\Sigma = -\frac{2g_{o,1}R_1^2}{5R_1} \Leftrightarrow V_\Sigma = -\frac{2}{5}g_{o,1}R_1.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } V_\Sigma = -\frac{2}{5} \cdot \left(6 \frac{\text{N}}{\text{Kg}} \right) \cdot (10^5 \text{ m}) \Rightarrow V_\Sigma = -2,4 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$



4.3

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας των δύο πλανητών στο σημείο P της επιφάνειας του Π_2 είναι :

$$V_P = V_{1,P} + V_{2,P} = -G \frac{M_1}{\ell - R_2} - G \frac{M_2}{R_2} \xrightarrow{R_2=10R_1, \ell=40R_1} V_P = -G \frac{M_1}{30R_1} - G \frac{9M_1}{10R_1} \Leftrightarrow V_P = -\frac{28GM_1}{30R_1}$$

$$\xrightarrow{(3)} V_P = -\frac{14g_{o,1}R_1^2}{15R_1} \Leftrightarrow V_P = -\frac{14}{15}g_{o,1}R_1 \Rightarrow V_P = -\frac{14}{15} \cdot \left(6 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}\right) \cdot (10^5 \text{ m}) \Rightarrow V_P = -5,6 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

Έστω ότι εκτοξεύσαμε το σώμα από την επιφάνεια του Π_2 με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ προς τον Π_1 , πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους. Αν φτάσει το σώμα στο σημείο Σ με ταχύτητα $v_\Sigma \neq 0$, στη συνέχεια θα επιταχυνθεί προς την επιφάνεια του Π_1 λόγω της ισχυρότερης βαρυτικής έλξης από αυτόν. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του σώματος από το P στο Σ :

$$K_\Sigma - K_P = W_{P \rightarrow \Sigma} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_\Sigma^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = m(V_P - V_\Sigma) \Leftrightarrow v_0^2 = v_\Sigma^2 - 2(V_P - V_\Sigma) \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{v_\Sigma^2 - 2(V_P - V_\Sigma)}.$$

Η ελάχιστη ταχύτητα εκτόξευσης $\vec{v}_{o(\min)}$ για να φτάσει το σώμα στο Σ, έχει τέτοια τιμή ώστε τη στιγμή που φτάνει στο Σ να μηδενιστεί η ταχύτητα ($v_\Sigma = 0$). Επομένως :

$$v_{o(\min)} = \sqrt{-2(V_P - V_\Sigma)} = \sqrt{-2(-5,6 \cdot 10^5 + 2,4 \cdot 10^5)} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{64 \cdot 10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{o(\min)} = 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Όμως, για να φτάσει το σώμα στην επιφάνεια του Π_1 πρέπει στο Σ να έχει ταχύτητα $v_\Sigma \neq 0$, άρα πρέπει να εκτοξευτεί με ταχύτητα μέτρου : $v_o > v_{o(\min)} \Rightarrow v_o > 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

4.4

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι ίσος με τη

$$\text{συνισταμένη δύναμη : } \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}.$$

Υπολογίζουμε τα μέτρα των βαρυτικών δυνάμεων που δέχεται το σώμα από τους δύο πλανήτες στο σημείο P :

$$F_1 = G \frac{M_1 m}{(30R_1)^2} = \frac{g_{o,1} R_1^2 m}{900R_1^2} = \frac{mg_{o,1}}{900} \Rightarrow F_1 = \frac{3 \cdot 6}{900} \text{ N} \Rightarrow F_1 = 0,02 \text{ N}.$$

$$F_2 = G \frac{M_2 m}{(10R_1)^2} = G \frac{9M_1 m}{(10R_1)^2} = \frac{9g_{o,1} R_1^2 m}{100R_1^2} = \frac{9mg_{o,1}}{100} \Rightarrow F_2 = \frac{9 \cdot 3 \cdot 6}{100} \text{ N} \Rightarrow F_2 = 1,62 \text{ N}.$$

Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα στη θέση P έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του Π_2 και μέτρο : $\Sigma F = F_2 - F_1 = 1,6 \text{ N}.$

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος στη θέση P έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του Π_2 και

$$\text{μέτρο : } \frac{|dp|}{dt} = \Sigma F \Rightarrow \frac{|dp|}{dt} = 1,6 \text{ N}.$$

Σχόλια :

1) Δεχόμαστε ότι οι δύο πλανήτες είναι ακίνητοι και ομογενείς.

2) Η $v_{o(\min)} = 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ είναι η ελάχιστη ταχύτητα ώστε να φτάσει το σώμα στο σημείο Σ και όχι στην

επιφάνεια του Π_1 . Αν το σώμα εκτοξευτεί με ταχύτητα $v_o = 800 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ τότε τη στιγμή που φτάνει στο Σ

θα μηδενιστεί η ταχύτητά του. Αφού η ένταση του πεδίου βαρύτητας στο Σ είναι μηδενική, το σώμα θα παραμείνει ακίνητο στο σημείο Σ και δεν θα φτάσει στην επιφάνεια του Π_1 .

3) Η ελάχιστη ταχύτητα εκτόξευσης δεν είναι η ταχύτητα διαφυγής $\vec{v}_\delta$ από την επιφάνεια του Π_2 .

5. (16201)

Διαστημικό όχημα, μάζας $m = 300 \text{ kg}$, εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης, κατακόρυφα. Η αρχική του ταχύτητα είναι μηδενική, ενώ ο προωθητικός του μηχανισμός το αναγκάζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση α . Όταν το όχημα φτάνει σε ύψος ίσο με την ακτίνα της Γης ($h = R_\Gamma$) από την επιφάνειά της, ο προωθητικός μηχανισμός σταματάει να λειτουργεί και το όχημα κινείται πλέον ελεύθερα, λόγω της ταχύτητας που απέκτησε ως τότε. Αν το διαστημικό όχημα δε δέχεται αντιστάσεις και καταφέρνει μόλις να διαφύγει για πάντα από την έλξη της Γης, να υπολογίσετε:

4.1. Το μέτρο της ταχύτητας που είχε το διαστημικό όχημα, τη στιγμή που έπαψε να λειτουργεί ο προωθητικός μηχανισμός, δηλαδή την ταχύτητα διαφυγής από το συγκεκριμένο ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 6

4.2. Το μέτρο της σταθερής επιτάχυνσης του διαστημικού οχήματος, όσο λειτουργούσε ο προωθητικός του μηχανισμός.

Μονάδες 6

4.3. Τη χρονική διάρκεια λειτουργίας του προωθητικού μηχανισμού.

Μονάδες 6

4.4. Τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του οχήματος μετά από χρονική διάρκεια $\Delta t = 800\sqrt{2} \text{ s}$ από την εκκίνησή του.

Μονάδες 7

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$ και η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$.

Απάντηση

4.1

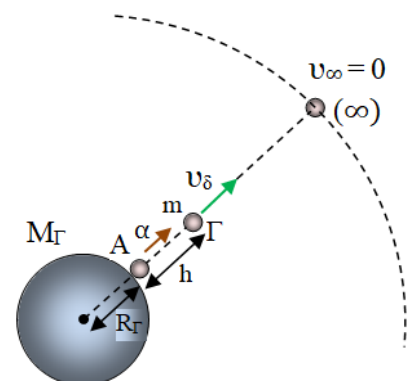
Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην

$$\text{επιφάνειά της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής του οχήματος από ύψος $h = R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης είναι:

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \xrightarrow{(1)} v_\delta = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}} \Leftrightarrow v_\delta = \sqrt{g_0 R_\Gamma} \Rightarrow$$

$$v_\delta = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\delta = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

1ος τρόπος (με τις εξισώσεις κίνησης)

Από τη στιγμή της εκκίνησης μέχρι να φτάσει σε ύψος h , το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου α ($v_0 = 0$). Επομένως:

$$v_\delta = \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_\delta}{\alpha}. \quad (2)$$

$$h = \frac{1}{2} \alpha t_1^2 \xrightarrow{(2)} h = \frac{1}{2} \alpha \frac{v_\delta^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow h = \frac{v_\delta^2}{2\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{v_\delta^2}{2h} \Rightarrow \alpha = \frac{64 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη διαδρομή του σώματος από την επιφάνεια της Γης μέχρι το ύψος h :

$$W_{F(A \rightarrow \Gamma)} = K_\Gamma - K_A \Leftrightarrow (\Sigma F) \cdot h = \frac{1}{2} m v_\delta^2 - 0 \Leftrightarrow m \alpha h = \frac{1}{2} m v_\delta^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{v_\delta^2}{2h} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{64 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.3

Από την εξίσωση της ταχύτητας στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, προκύπτει :

$$v_{\delta} = \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_{\delta}}{\alpha} \Rightarrow t_1 = \frac{8 \cdot 10^3}{5} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

4.4

Αφού $\Delta t < t_1$, άρα στη χρονική διάρκεια Δt το όχημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου α .

Μετά από χρονική διάρκεια Δt από τη στιγμή της εκκίνησης, το όχημα βρίσκεται σε ύψος

$$h' = \frac{1}{2} \alpha (\Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 800^2 \cdot 2 \text{ m} \Rightarrow h' = 3,2 \cdot 10^6 \text{ m} \quad \text{ή} \quad h' = \frac{R_{\Gamma}}{2}. \quad (3)$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος όχημα – Γη στη θέση αυτή, είναι :

$$U = -G \frac{M_{\Gamma} m}{R_{\Gamma} + h} \xrightarrow{(1),(3)} U = -\frac{mg_o R_{\Gamma}^2}{\frac{3R_{\Gamma}}{2}} \Leftrightarrow U = -\frac{2}{3} mg_o R_{\Gamma} \Rightarrow U = -\frac{2}{3} \cdot 300 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ J} \Rightarrow$$

$$U = -1,28 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

Σχόλιο : Δεχόμαστε ότι η Γη είναι ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .

Οι βαρυτικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

6. (16202) Θεωρούμε τη Γη μια σφαίρα ακίνητη και ομογενή, ακτίνας $R_{\Gamma} = 6400 \text{ km}$ και το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειά της $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$. Ένας μετεωρίτης μάζας $m = 100 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα προς τη Γη, σε διεύθυνση που διέρχεται από το κέντρο της και εισέρχεται από το διάστημα στο Γήινο βαρυτικό πεδίο με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 8\sqrt{2} \text{ km/s}$.

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία ο μετεωρίτης θα έφτανε στην επιφάνεια της Γης, αν δεν υπήρχε η ατμόσφαιρα.

Μονάδες 6

Αν υποθέσουμε ότι η ατμόσφαιρα της Γης φτάνει σε ύψος $h = \frac{R_{\Gamma}}{4}$ από την επιφάνειά της:

4.2. να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία ο μετεωρίτης εισέρχεται στην ατμόσφαιρα της Γης.

Μονάδες 6

4.3. να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του μετεωρίτη τη στιγμή που εισέρχεται στην ατμόσφαιρα της Γης.

Μονάδες 6

4.4. Αν τελικά ο μετεωρίτης εξαιτίας των αντιστάσεων της ατμόσφαιρας έφτασε στην επιφάνεια της Γης με ταχύτητα ίσου μέτρου με αυτή που εισήλθε στο πεδίο βαρύτητας της Γης, να υπολογίσετε τη θερμική ενέργεια που παράχθηκε εξαιτίας τριβών μεταξύ του μετεωρίτη και της ατμόσφαιρας της Γης.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην

επιφάνειά της, ισχύει: $g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2$. (1)

Αν δεν υπήρχε ατμόσφαιρα, ο μετεωρίτης θα δεχόταν μόνο τη βαρυτική δύναμη από τη Γη, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος θα ήταν σταθερή.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τον μετεωρίτη στο σημείο εισόδου στο πεδίο βαρύτητας και στο σημείο Γ της επιφάνειας της Γης:

$$K_{\Gamma} + U_{\Gamma} = K_{\infty} + U_{\infty} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 - G \frac{M_{\Gamma}m}{R_{\Gamma}} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \Leftrightarrow$$

$$v_{\Gamma}^2 = v_0^2 + 2 \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)} v_{\Gamma}^2 = v_0^2 + 2 \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma}} \Leftrightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{v_0^2 + 2g_0 R_{\Gamma}}$$

$$\Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{128 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\Gamma} = 16 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

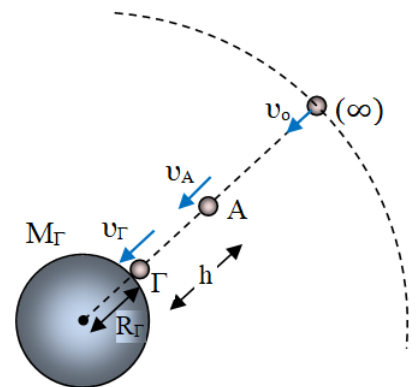
4.2

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τον μετεωρίτη στο σημείο εισόδου στο πεδίο βαρύτητας και στο σημείο Α εισόδου στην ατμόσφαιρα της Γης:

$$K_A + U_A = K_{\infty} + U_{\infty} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - G \frac{M_{\Gamma}m}{R_{\Gamma} + h} = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \xrightarrow{h = \frac{R_{\Gamma}}{4}} v_A^2 = v_0^2 + 2 \frac{GM_{\Gamma}}{5R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)}$$

$$v_A^2 = v_0^2 + \frac{8g_0 R_{\Gamma}^2}{5R_{\Gamma}} \Leftrightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 + \frac{8}{5}g_0 R_{\Gamma}} \Rightarrow v_A = \sqrt{128 \cdot 10^6 + \frac{8}{5} \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{\left(2 + \frac{8}{5}\right) \cdot 64 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 9}{5} \cdot 64 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 24 \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_A = \frac{24\sqrt{10}}{5} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad v_A = 4800\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Τη στιγμή που εισέρχεται ο μετεωρίτης στην ατμόσφαιρα της Γης, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος μετεωρίτης – Γη είναι :

$$U_A = -G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma + h} = -\frac{mg_o R_\Gamma^2}{\frac{5}{4} R_\Gamma} = -\frac{4}{5} mg_o R_\Gamma \Rightarrow U_A = -\frac{4}{5} \cdot 100 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ J} \Rightarrow U_A = -5,12 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

4.4

Σύμφωνα με την εκφώνηση, ισχύει : $v_\Gamma' = v_o$.

Από το σημείο εισόδου στο πεδίο βαρύτητας μέχρι το σημείο εισόδου Α στην ατμόσφαιρα, η μηχανική ενέργεια διατηρείται, άρα : $E_A = E_\infty$.

Η θερμική ενέργεια εξαιτίας των τριβών με την ατμόσφαιρα, είναι ίση με την ελάττωση της μηχανικής ενέργειας κατά την κίνηση του μετεωρίτη από το σημείο εισόδου Α στην ατμόσφαιρα μέχρι το σημείο Γ της επιφάνειας της Γης :

$$Q = E_A - E_\Gamma' = E_\infty - E_\Gamma' = \frac{1}{2} m v_o^2 - \left(\frac{1}{2} m v_o^2 - G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \right) = G \frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \xrightarrow{(1)} Q = \frac{mg_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma} = mg_o R_\Gamma.$$

Με αντικατάσταση : $Q = 100 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ J} \Rightarrow Q = 6,4 \cdot 10^9 \text{ J}.$

7. (16203)

Ένα σώμα εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα v_0 , στη διεύθυνση της ακτίνας της Γης που περνάει από το σημείο εκτόξευσης και φορά τέτοια ώστε να απομακρύνεται από την επιφάνειά της. Το σώμα καταφέρνει να φτάσει σε ύψος h ίσο με την ακτίνα της Γης ($h = R_\Gamma$).

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο v_0 της αρχικής ταχύτητας με την οποία εκτοξεύθηκε το σώμα.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής ενός σώματος από σημείο που βρίσκεται σε ύψος $h = R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 6

Τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του σώματος στο ύψος $h = R_\Gamma$, μια ξαφνική έκρηξη διασπά το σώμα σε δύο άλλα σώματα ίσων μαζών ($m_1 = m_2$), τα οποία κινούνται στην αρχική διεύθυνση κίνησης του σώματος. Το σώμα μάζας m_1 αμέσως μετά την έκρηξη κινείται προς τη Γη και φτάνει στην επιφάνειά της με ταχύτητα v_1' μέτρου $v_1' = 16 \text{ km/s}$.

4.3. Να αποδείξετε ότι το σώμα μάζας m_2 θα διαφύγει από την έλξη της Γης προς το διάστημα.

Μονάδες 7

4.4. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 με την οποία διαφεύγει στο διάστημα.

Μονάδες 6

Η Γη θεωρείται σφαίρα ακίνητη και ομογενής ακτίνας $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$ και το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειά της είναι $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

Θεωρούμε επίσης ότι οι αντιστάσεις από την ατμόσφαιρα της Γης μπορούν να αγνοηθούν.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά

$$\text{της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Η βαρυτική δύναμη είναι διατηρητική, άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη διατηρείται σταθερή.

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το σημείο εκτόξευσης Α και το σημείο Γ μηδενισμού της ταχύτητας :

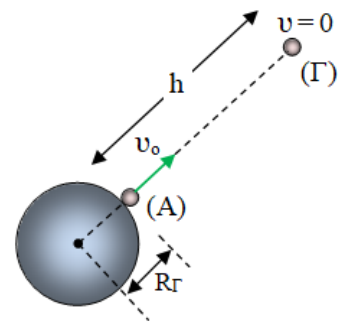
$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} = 0 - \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma + h} \xrightarrow{h=R_\Gamma} \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$v_0^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \xrightarrow{(1)} v_0^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{g_0 R_\Gamma} \Rightarrow v_0 = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_0 = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής v_δ ενός σώματος που εκτοξεύεται από ύψος h από την επιφάνεια της Γης, είναι :

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \xrightarrow[h=R_\Gamma]{(1)} v_\delta = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}} \Leftrightarrow v_\delta = \sqrt{g_0 R_\Gamma} \Rightarrow v_\delta = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\delta = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Έστω v_1 το μέτρο της ταχύτητας του 1ου κομματιού αμέσως μετά τη διάσπαση.

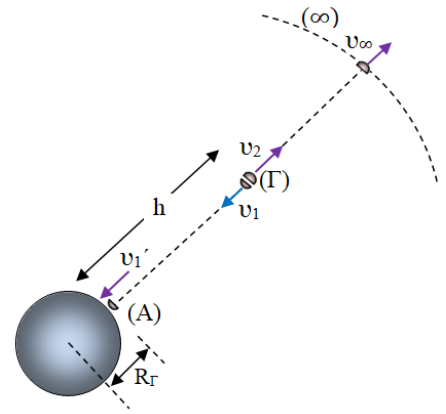
Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το σημείο Γ της διάσπασης και το σημείο Α της επιφάνειας της Γης :

$$K_{\Gamma(1)} + U_{\Gamma(1)} = K_{A(1)} + U_{A(1)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{GM_\Gamma m_1}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 - \frac{GM_\Gamma m_1}{R_\Gamma}$$

$$\xrightarrow{h=R_\Gamma} \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_1'^2 - \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow v_1^2 = v_1'^2 - \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \quad (1)$$

$$v_1^2 = v_1'^2 - \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{v_1'^2 - g_0 R_\Gamma} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{256 \cdot 10^6 - 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{192 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 8\sqrt{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Η διάρκεια της διάσπασης είναι πολύ μικρή, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι μονωμένο (κατά προσέγγιση). Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ :

$$\vec{p}_{\text{ολ(μετά)}} = \vec{p}_{\text{ολ(πριν)}} \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Δηλαδή, οι ορμές των δύο κομματιών αμέσως μετά τη διάσπαση είναι αντίθετες.

Έστω v_2 το μέτρο της ταχύτητας του 2ου κομματιού αμέσως μετά τη διάσπαση.

Για τα μέτρα των ορμών και των ταχυτήτων των δύο κομματιών, ισχύει :

$$p_1 = p_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \xrightarrow{m_1 = m_2} v_2 = v_1 = 8\sqrt{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Αφού $v_2 > v_\delta$, το 2ο κομμάτι θα διαφύγει στο διάστημα.

4.4

2ο κομμάτι

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το σημείο Γ και το σημείο εξόδου από το πεδίο βαρύτητας της Γης (στο «άπειρο») :

$$K_{\Gamma(2)} + U_{\Gamma(2)} = K_{\infty(2)} + U_{\infty(2)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{GM_\Gamma m_2}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2}m_2 v_\infty^2 + 0 \xrightarrow{h=R_\Gamma} \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} = \frac{1}{2}v_\infty^2 \Leftrightarrow$$

$$v_\infty^2 = v_2^2 - \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \xrightarrow{(1)} v_\infty^2 = v_2^2 - \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Leftrightarrow v_\infty = \sqrt{v_2^2 - g_0 R_\Gamma}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_\infty = \sqrt{192 \cdot 10^6 - 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{128 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\infty = 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο : Οι βαρυτικές δυνάμεις από τα υπόλοιπα ουράνια σώματα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

8. (16327)

Από την επιφάνεια της Γης εκτοξεύεται ένας πύραυλος κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_1 , μέτρου $v_1 = \frac{3}{4}v_\delta$, όπου v_δ το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από την επιφάνεια της Γης. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ Km}$ και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειά της $g_o = 10 \text{ m/s}^2$. Να προσδιορίσετε:

4.1. την ταχύτητα διαφυγής του σώματος από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 6

4.2. το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης και το δυναμικό του πεδίου στο ύψος $h = R_\Gamma$.

Μονάδες 6

4.3. το μέτρο της ταχύτητας του πυραύλου σε ύψος $h = R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης, όταν εκτοξεύεται με την αρχική ταχύτητα v_1 .

Μονάδες 6

4.4. τη μέγιστη απόσταση από την επιφάνεια της Γης, στην οποία μπορεί να φθάσει ο πύραυλος, όταν εκτοξεύεται με την αρχική ταχύτητα v_1 από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

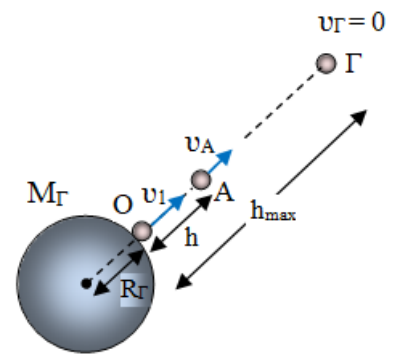
Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_o = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_o R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Γης είναι :

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}} \xrightarrow{(1)} v_\delta = \sqrt{\frac{2g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma}} \Leftrightarrow v_\delta = \sqrt{2g_o R_\Gamma} \Rightarrow$$

$$v_\delta = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_\delta = 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.2

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας στο σημείο O της επιφάνειας της Γης είναι :

$$V_o = -G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma} \xrightarrow{(1)} V_o = -\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Leftrightarrow V_o = -g_o R_\Gamma \Rightarrow V_o = -6,4 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας στο σημείο A σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης είναι :

$$V_A = -G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} \xrightarrow{(1)} V_A = -\frac{g_o R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow V_A = -\frac{g_o R_\Gamma}{2} \Rightarrow V_A = -3,2 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

4.3

Το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης του πυραύλου είναι : $v_1 = \frac{3}{4}v_\delta$. (2)

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_1 = \frac{3}{4} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του πυραύλου από το σημείο O της επιφάνειας της Γης μέχρι το σημείο A σε ύψος h :

$$K_A - K_O = W_{\beta(O \rightarrow A)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = m(V_o - V_A) \Leftrightarrow v_A^2 = v_1^2 + 2(V_o - V_A) \Leftrightarrow v_A = \sqrt{v_1^2 + 2(V_o - V_A)}$$

$$\Rightarrow v_A = \sqrt{72 \cdot 10^6 - 2 \cdot 32 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_A = 2\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

1ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του πυραύλου από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ που μηδενίζεται η ταχύτητα σε ύψος $h_{\max}$:

$$K_{\Gamma} - K_A = W_{\beta(A \rightarrow \Gamma)} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_A^2 = m(V_A - V_{\Gamma}) \Leftrightarrow -\frac{v_A^2}{2} = V_A - V_{\Gamma} \Leftrightarrow V_{\Gamma} = V_A + \frac{v_A^2}{2} \Rightarrow$$
$$V_{\Gamma} = \left(-3,2 \cdot 10^7 + \frac{8}{2} \cdot 10^6 \right) \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \Rightarrow V_{\Gamma} = -2,8 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

Ισχύει :

$$V_{\Gamma} = -G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma} + h_{\max}} \xrightarrow{(1)} V_{\Gamma} = -\frac{g_o R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h_{\max}} \Leftrightarrow R_{\Gamma} + h_{\max} = -\frac{g_o R_{\Gamma}^2}{V_{\Gamma}} \Leftrightarrow h_{\max} = -\left(\frac{g_o R_{\Gamma}}{V_{\Gamma}} + 1 \right) R_{\Gamma} \Rightarrow$$
$$h_{\max} = -\left(\frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{-2,8 \cdot 10^7} + 1 \right) \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cong 1,29 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} \Rightarrow h_{\max} \cong 8,23 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

2ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του πυραύλου από το σημείο Ο της επιφάνειας της Γης μέχρι το σημείο Γ που μηδενίζεται η ταχύτητα σε ύψος $h_{\max}$:

$$K_{\Gamma} - K_O = W_{\beta(O \rightarrow \Gamma)} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_1^2 = m(V_O - V_{\Gamma}) \xrightarrow{(2)} -\frac{1}{2} \cdot \frac{9v_o^2}{16} = -g_o R_{\Gamma} + \frac{g_o R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h_{\max}} \Leftrightarrow$$
$$g_o R_{\Gamma} - \frac{9 \cdot 2g_o R_{\Gamma}}{32} = \frac{g_o R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h_{\max}} \Leftrightarrow \frac{7g_o R_{\Gamma}}{16} = \frac{g_o R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h_{\max}} \Leftrightarrow 7(R_{\Gamma} + h_{\max}) = 16R_{\Gamma} \Leftrightarrow 7h_{\max} = 9R_{\Gamma} \Leftrightarrow$$
$$h_{\max} = \frac{9R_{\Gamma}}{7}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } h_{\max} = \frac{9}{7} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cong 8,23 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Παρατήρηση

Ο 2ος τρόπος λύσης είναι πιο δύσκολος γιατί απαιτεί συνδυασμούς σχέσεων, αλλά οδηγεί σε πιο «κομψή» απάντηση, με λιγότερους υπολογισμούς.

Σχόλιο : Η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .

Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

9. (16461)

Δύο μικρά ομογενή σφαιρικά σώματα αμελητέων διαστάσεων έχουν μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και m_2 και βρίσκονται ακίνητα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Απέχουν μεταξύ τους $d = 1 \text{ m}$ και έλκονται με βαρυτική δύναμη μέτρου $F = \frac{40}{3} \cdot 10^{-11} \text{ N}$. Αν η σταθερά της παγκόσμιας έλξης είναι $G = \frac{20}{3} \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ Kg}^{-2}$ και η βαρυτική δυναμική ενέργεια στο άπειρο θεωρείται μηδέν.

4.1. Ποια είναι η μάζα του σώματος m_2 ;

Μονάδες 6

4.2. Να βρεθεί το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου που δημιουργείται από τις δύο μάζες στο μέσο M της μεταξύ τους απόστασης.

Μονάδες 6

4.3. Στο σημείο M τοποθετούμε μία μάζα $m_3 = 0,5 \text{ kg}$. Να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών μαζών και να βρεθεί το έργο της βαρυτικής δύναμης όταν το σώμα μάζας m_3 μεταφερθεί έξω από το βαρυτικό πεδίο των άλλων δύο μαζών.

Μονάδες 7

4.4. Αν οι μάζες m_1 και m_2 αφεθούν ελεύθερες να κινηθούν, να υπολογιστεί ο λόγος των ταχυτήτων τους

$\frac{v_1}{v_2}$ οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν συγκρουστούν.

Μονάδες 6

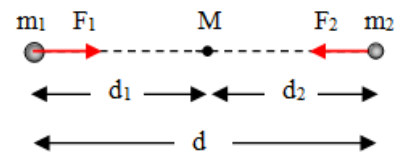
Απάντηση

4.1

Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των δύο σφαιρών έχουν ίσα μέτρα : $F_1 = F_2 = F$.

Εφαρμόζουμε το νόμο της βαρύτητας :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \Leftrightarrow m_2 = \frac{F d^2}{G m_1} \Leftrightarrow m_2 = \frac{\frac{40}{3} \cdot 10^{-11} \cdot 1^2}{\frac{20}{3} \cdot 10^{-11} \cdot 2} \text{ Kg} \Rightarrow m_2 = 1 \text{ Kg}.$$



4.2

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας των μαζών m_1, m_2 στο μέσο M της απόστασής τους είναι :

$$V_M = -G \frac{m_1}{d_1} - G \frac{m_2}{d_2} = -\frac{20}{3} \cdot 10^{-11} \left(\frac{2}{0,5} + \frac{1}{0,5} \right) \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \Rightarrow V_M = -4 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

4.3

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος, όταν τοποθετηθεί στο M το σώμα μάζας m_3 , είναι :

$$U = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = -G \frac{m_1 m_2}{d} - G \frac{m_1 m_3}{d_1} - G \frac{m_2 m_3}{d_2} = -\frac{20}{3} \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{2 \cdot 1}{1} + \frac{2 \cdot 0,5}{0,5} + \frac{1 \cdot 0,5}{0,5} \right) \frac{\text{J}}{\text{Kg}} = -\frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

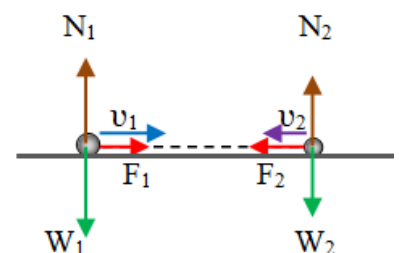
Κατά τη μεταφορά του σώματος μάζας m_3 από το M στο «άπειρο», το πεδίο βαρύτητας των μαζών m_1, m_2 παράγει έργο :

$$W_{M \rightarrow \infty} = m_3 V_M = 0,5 \cdot (-4 \cdot 10^{-10}) \text{ J} = -2 \cdot 10^{-10} \text{ J}.$$

4.4

Οι ελκτικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ είναι εσωτερικές για το σύστημα των σφαιρών. Αφού οι σφαίρες κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική άρα η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Οι δύο σφαίρες κινούνται στην ευθεία που τις συνδέει και πλησιάζουν μεταξύ τους.



Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης της 1ης και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(αρχ)} = p_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}.$$

Σχόλια :

1) Οι διατυπώσεις «τοποθετούμε μια μάζα», «αν οι μάζες αφεθούν ελεύθερες» δεν είναι σωστές.

Η μάζα είναι φυσικό μέγεθος και όχι σώμα.

2) Στο ερώτημα 4.3 ζητείται το έργο του πεδίου βαρύτητας των δύο σφαιρών με μάζες m_1 , m_2 .

3) Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων είναι εξαιρετικά ασθενείς ($F \sim 10^{-10}$ N), οι επιταχύνσεις και οι τελικές ταχύτητες εξαιτίας αυτών των δυνάμεων ασήμαντες ($a \sim 10^{-10}$ m/s², $v \sim 10^{-5}$ m/s).

Για να μετακινηθούν τα σώματα από τις αρχικές στις τελικές θέσεις θα χρειαζονταν τουλάχιστον δύο ημέρες, έστω και αν το δάπεδο ήταν εντελώς λείο.

10. (16493)

Μία σεληνάκατος μάζας $m_{\Delta} = 5000 \text{ kg}$ κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα $u = 10 \text{ m/s}$ για να προσεληνωθεί. Σε ύψος $h = 120 \text{ m}$ από την επιφάνεια αποκολλάται ένα εξάρτημα μικρής μάζας από το σύστημα προσεληνήωσης και πέφτει στην Σελήνη. Αν η μάζα της Σελήνης είναι $M_{\Sigma} = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, η ακτίνα της $R_{\Sigma} = 1750 \text{ km}$ και δίνεται $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, να υπολογίσετε :

4.1. Την ένταση του βαρυντικού πεδίου στην επιφάνεια της Σελήνης.

Μονάδες 5

4.2. Τη δύναμη που ασκεί η σεληνάκατος στη Σελήνη και τη δυναμική ενέργειά της όταν βρίσκεται σε ύψος $h = 1250 \text{ km}$ και αρχίζει η διαδικασία καθόδου.

Μονάδες 6

4.3. Με ποια ταχύτητα θα φθάσει στην επιφάνεια της Σελήνης το εξάρτημα που αποκολλήθηκε.

Μονάδες 7

4.4. Ποιο από τα δύο σώματα (σεληνάκατος – εξάρτημα) θα φθάσει πρώτο στην επιφάνεια και με ποια χρονική διαφορά.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης είναι :

$$g_{\Sigma} = G \frac{M_{\Sigma}}{R_{\Sigma}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7,4 \cdot 10^{22}}{(175 \cdot 10^4)^2 \text{ Kg}} \Rightarrow g_{\Sigma} \cong 1,612 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}.$$

Με ακρίβεια δεκάτου (1 δεκαδικού) : $g_{\Sigma} \cong 1,6 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}.$

4.2

Το μέτρο της δύναμης που ασκεί η σεληνάκατος στη Σελήνη σε ύψος h υπολογίζεται με το νόμο της βαρύτητας :

$$F = G \frac{M_{\Sigma} m_{\Delta}}{(R_{\Sigma} + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7,4 \cdot 10^{22} \cdot 5 \cdot 10^3}{(3 \cdot 10^6)^2} \text{ N} \Rightarrow F \cong 2742 \text{ N}.$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν η σεληνάκατος βρίσκεται σε ύψος h είναι :

$$U = -G \frac{M_{\Sigma} m_{\Delta}}{R_{\Sigma} + h} = -F(R_{\Sigma} + h) \Rightarrow U \cong -(2742 \text{ N}) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ m}) \Rightarrow U \cong -8,23 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

4.3

Τη στιγμή που αποκολλάται το εξάρτημα έχει αρχική ταχύτητα ίση με την ταχύτητα της σεληνακάτου,

$$\text{μέτρου : } v_0 = u = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Δεχόμαστε ότι το εξάρτημα έχει σταθερή επιτάχυνση, μέτρου $a = g_{\Sigma} \cong 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική ταχύτητα.

1ος τρόπος

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή του εξαρτήματος (μάζας m) από τη στιγμή που αποκολλάται μέχρι να φτάσει στην επιφάνεια της Σελήνης :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m g_{\Sigma} h \Leftrightarrow v_1^2 = v_0^2 + 2 g_{\Sigma} h \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 g_{\Sigma} h} \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{100 + 2 \cdot 1,6 \cdot 120} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{484} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1 = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2ος τρόπος

Το εξάρτημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Ισχύει :

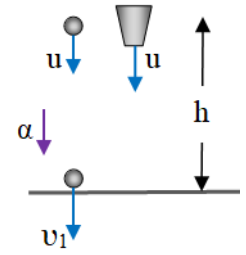
$$h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 120 = 10t + 0,8t^2 \Leftrightarrow 0,8t^2 + 10t - 120 = 0.$$

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 0,8 \cdot (-120) = 100 + 384 = 484.$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{2 \cdot 0,8} = \frac{-10 \pm 22}{1,6} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-10 + 22}{1,6} \text{ s} = 7,5 \text{ s}, \\ t_1' = \frac{-10 - 22}{1,6} \text{ s} = -13,75 \text{ s}, \text{ απορρίπτεται.} \end{cases}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του εξαρτήματος, τη στιγμή που φτάνει στην επιφάνεια της Σελήνης, είναι :

$$v_1 = v_0 + a t_1 = (10 + 1,6 \cdot 7,5) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.4

1ος τρόπος

Το εξάρτημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Το μέτρο της ταχύτητας του εξαρτήματος, τη στιγμή που φτάνει στην επιφάνεια της Σελήνης, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$v_1 = v_0 + a t_1.$$

Ο χρόνος που χρειάζεται το εξάρτημα για να φτάσει στην επιφάνεια είναι :

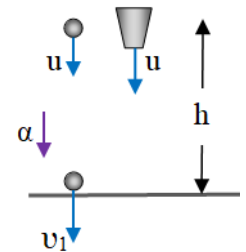
$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} \Rightarrow t_1 = \frac{22 - 10}{1,6} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 7,5 \text{ s}.$$

Η σεληνάκατος κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, άρα χρειάζεται

$$\text{χρόνο } t_2 = \frac{h}{u} = \frac{120}{10} \text{ s} = 12 \text{ s} \text{ για να φτάσει στην επιφάνεια της Σελήνης.}$$

Επομένως το εξάρτημα θα φτάσει 1ο στην επιφάνεια της Σελήνης, με χρονική διαφορά

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 12 \text{ s} - 7,5 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 4,5 \text{ s}.$$



2ος τρόπος

Το εξάρτημα θα φτάσει στην επιφάνεια της Σελήνης μετά από χρόνο $t_1 = 7,5 \text{ s}$. (υπολογίστηκε στο 4.3)

Η σεληνάκατος κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, άρα χρειάζεται χρόνο

$$t_2 = \frac{h}{u} = \frac{120}{10} \text{ s} = 12 \text{ s} \text{ για να φτάσει στην επιφάνεια της Σελήνης.}$$

Επομένως το εξάρτημα θα φτάσει 1ο στην επιφάνεια της Σελήνης, με χρονική διαφορά

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 12 \text{ s} - 7,5 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 4,5 \text{ s}.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση

α) χρησιμοποιεί το ίδιο σύμβολο h για δύο διαφορετικά ύψη.

β) δεν αναφέρει ότι η Σελήνη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα και ότι οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

2) Η άσκηση απαιτεί πολύπλοκους υπολογισμούς και δεν είναι κατάλληλη για θέμα εξετάσεων.

11. (17063)

Διαστημικό όχημα μάζας $M = 6 \text{ tn}$ κατευθύνεται προς τη Γη μεταφέροντας σεληνάκατο μάζας $m = 1 \text{ tn}$. Σε απόσταση $r_1 = 4R_\Gamma$ από το κέντρο της, η ταχύτητα του οχήματος είναι $u_1 = 6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

4.1. Να βρείτε την ταχύτητα του οχήματος όταν βρεθεί σε απόσταση $r_2 = R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης, χωρίς τη χρήση πυραύλων.

Μονάδες 6

Στην παραπάνω θέση απόστασης r_2 από την επιφάνεια της Γης, απελευθερώνεται η σεληνάκατος (με μηδενική ταχύτητα) και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα προς τη Γη χωρίς τη βοήθεια ανασχετικών πυραύλων.

4.2. Ποια η ταχύτητα του διαστημικού οχήματος μετά την απελευθέρωση της σεληνακάτου;

Μονάδες 6

4.3. Με ποια ταχύτητα η σεληνάκατος θα προσκρούσει στην επιφάνεια της Γης;

Μονάδες 6

4.4. Αν κατά τη διάρκεια της κατακόρυφης κίνησης του διαστημικού οχήματος προς τη Γη λειτουργούν οι ανασχετικοί πύραυλοι, να υπολογίσετε το έργο της δύναμης των ανασχετικών πυραύλων ώστε να φτάσει στην επιφάνεια της Γης με μηδενική ταχύτητα.

Μονάδες 7

Θεωρείστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα και την ελκτική δύναμη μεταξύ διαστημικού οχήματος και σεληνακάτου. Δίνονται: η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$, η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$, $\sqrt{68} = 8,25$.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην

$$\text{επιφάνειά της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το σύστημα όχημα – σεληνάκατος στο σημείο Α σε απόσταση r_1 και το σημείο Β σε απόσταση $r_2 = 2R_\Gamma$

από το κέντρο της Γης :

$$K_B + U_B = K_A + U_A \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(M+m)u_2^2 - \frac{GM_\Gamma(M+m)}{2R_\Gamma} = \frac{1}{2}(M+m)u_1^2 - \frac{GM_\Gamma(M+m)}{4R_\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}u_2^2 = \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{GM_\Gamma}{4R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow u_2^2 = u_1^2 + \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} \xrightarrow{(1)}$$

$$u_2^2 = u_1^2 + \frac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{u_1^2 + \frac{g_0 R_\Gamma}{2}}.$$

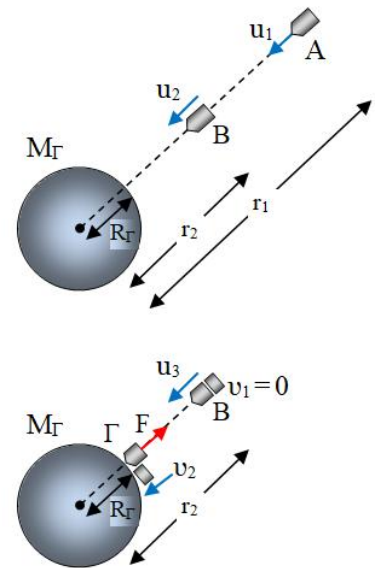
$$\text{Με αντικατάσταση: } u_2 = \sqrt{36 \cdot 10^6 + \frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{68 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u_2 = 8,25 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Αφού η διάρκεια της διάσπασης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος είναι (περίπου) σταθερή. Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{u}_2$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow (M+m)u_2 = Mu_3 + 0 \Leftrightarrow u_3 = \frac{M+m}{M}u_2 \Rightarrow u_3 = \frac{7}{6} \cdot 8,25 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$u_3 = 9,625 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για τη σεληνάκατο στο σημείο Β (αμέσως μετά τη διάσπαση) και το σημείο Γ της επιφάνειας της Γης :

$$K_{\Gamma(\sigma)} + U_{\Gamma(\sigma)} = K_{B(\sigma)} + U_{B(\sigma)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma} = 0 - \frac{GM_\Gamma m}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow$$
$$v_2^2 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} \xrightarrow{(1)} v_2^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma} \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{g_0 R_\Gamma} \Rightarrow v_2 = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{m}{s} \Rightarrow v_2 = 8 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

4.4

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του οχήματος από το Β μέχρι το Γ, εκτός από τη βαρυτική έλξη της Γης ασκείται σ' αυτό και η δύναμη $\vec{F}$ από τους ανασχετικούς πυραύλους.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. :

$$W_F + W_W = K_\Gamma - K_B' \Leftrightarrow W_F + M(V_B - V_\Gamma) = 0 - \frac{1}{2}Mu_3^2 \Leftrightarrow W_F + M\left(-\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}\right) = -\frac{1}{2}Mu_3^2 \Leftrightarrow$$
$$W_F + M\frac{GM_\Gamma}{2R_\Gamma} = -\frac{1}{2}Mu_3^2 \xrightarrow{(1)} W_F = -\frac{1}{2}Mu_3^2 - M\frac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow W_F = -\frac{M}{2}(u_3^2 + g_0 R_\Gamma) \Rightarrow$$
$$W_F = -\frac{6 \cdot 10^3}{2}(9,625^2 \cdot 10^6 + 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6)J \Rightarrow W_F = -4,6992 \cdot 10^{11}J \quad \text{ή} \quad W_F \cong -4,7 \cdot 10^{11}J.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

2) Η απόσταση από την επιφάνεια της Γης (ύψος) συμβολίζεται με h . Με r συμβολίζεται η απόσταση από το κέντρο της Γης.

Το δεδομένο $r_2 = R_\Gamma$ είναι παραπλανητικό. Το σωστό είναι : $h_2 = R_\Gamma$ ή $r_2 = 2R_\Gamma$.

3) Η εκφώνηση αναφέρει : «απελευθερώνεται η σεληνάκατος (με μηδενική ταχύτητα)».

Η διατύπωση δεν είναι ακριβής.

Αρχικά η σεληνάκατος έχει την ταχύτητα $\vec{u}_2$ του οχήματος. Για να έχει μηδενική ταχύτητα (ως προς τη Γη) πρέπει να εκτοξευτεί με ταχύτητα $-\vec{u}_2$ ως προς το όχημα.

Η ταχύτητα της σεληνάκατος αναφέρεται ως προς τη Γη.

12. (17066)

Διαστημικό όχημα μάζας M εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 . Όταν το όχημα βρεθεί σε ύψος $h = 2R_\Gamma$, ένας εκρηκτικός μηχανισμός το διαχωρίζει ακαριαία σε δύο επιμέρους σώματα με μάζες $m_1 = \frac{2M}{3}$ και $m_2 = \frac{M}{3}$ αντίστοιχα. Αμέσως μετά την έκρηξη, το σώμα μάζας m_2 κινείται κατακόρυφα προς τη Γη χωρίς αρχική ταχύτητα και φτάνει στην επιφάνειά της με ταχύτητα μέτρου u_2 . Ενώ, το σώμα μάζας m_1 αποκτά την ελάχιστη ταχύτητα που χρειάζεται ώστε να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

4.1. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας u_1 που αποκτά το σώμα m_1 μετά την έκρηξη.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το διαστημικό όχημα στο ύψος $h = 2R_\Gamma$, λίγο πριν την έκρηξη.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας u_2 με την οποία φτάνει το σώμα m_2 στην επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας u_0 με την οποία εκτοξεύτηκε το όχημα από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 7

Δίνονται: η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$, η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$, $\sqrt{42,66} = 6,53$, $\sqrt{85,33} = 9,24$, $\sqrt{104,25} = 10,21$.

Απάντηση

4.1

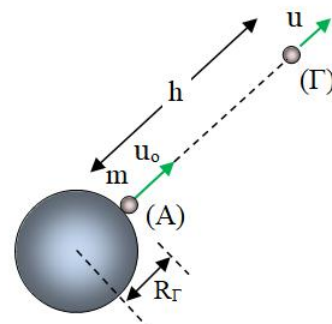
Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά

$$\text{της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Το μέτρο της ταχύτητας u_1 που αποκτά το σώμα m_1 αμέσως μετά την έκρηξη είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από ύψος $h = 2R_\Gamma$. Επομένως:

$$u_1 = v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \xrightarrow{(1)} u_1 = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{3R_\Gamma}} \Leftrightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2}{3} g_0 R_\Gamma} \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \sqrt{42,67 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \Rightarrow u_1 = 6,53 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



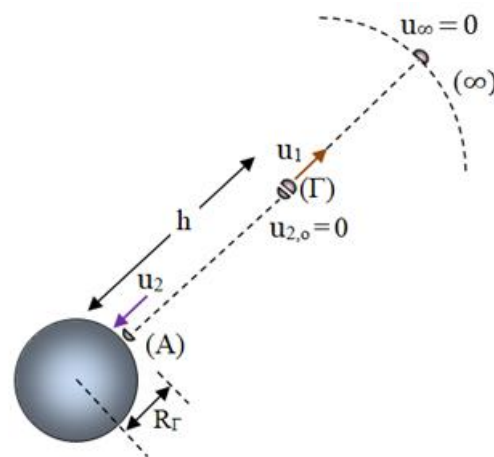
4.2

Αφού η διάρκεια της έκρηξης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος είναι (περίπου)

σταθερή. Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{u}_1$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά:

$$p_{\text{ολ(πριν)}} = p_{\text{ολ(μετά)}} \Leftrightarrow Mu = \frac{2M}{3} u_1 + 0 \Leftrightarrow u = \frac{2}{3} u_1 \Rightarrow$$

$$u = \frac{2}{3} \cdot 6,53 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow u \cong 4,35 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το 2ο κομμάτι στο σημείο Γ (αμέσως μετά τη διάσπαση) και το σημείο Α της επιφάνειας της Γης:

$$K_{\Gamma(2)} + U_{\Gamma(2)} = K_{A(2)} + U_{A(2)} \Leftrightarrow 0 - \frac{GM_{\Gamma}m_2}{R_{\Gamma}+h} = \frac{1}{2}m_2u_2^2 - \frac{GM_{\Gamma}m_2}{R_{\Gamma}} \xrightarrow{h=2R_{\Gamma}} \frac{1}{2}u_2^2 = \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} - \frac{GM_{\Gamma}}{3R_{\Gamma}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}u_2^2 = \frac{2GM_{\Gamma}}{3R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)} u_2^2 = \frac{4g_0R_{\Gamma}^2}{3R_{\Gamma}} \Leftrightarrow u_2 = \sqrt{\frac{4}{3}g_0R_{\Gamma}} \Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{4}{3}10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{m}{s} = \sqrt{85,33 \cdot 10^6} \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$u_2 = 9,24 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

4.4

Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το όχημα στο σημείο Α της επιφάνειας της Γης και το σημείο Γ σε ύψος $h = 2R_{\Gamma}$:

$$K_A + U_A = K_{\Gamma} + U_{\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mu_0^2 - \frac{GM_{\Gamma}M}{R_{\Gamma}} = \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{GM_{\Gamma}M}{R_{\Gamma}+h} \xrightarrow{h=2R_{\Gamma}} \frac{1}{2}u_0^2 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{GM_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} - \frac{GM_{\Gamma}}{3R_{\Gamma}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}u_0^2 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{2GM_{\Gamma}}{3R_{\Gamma}} \Leftrightarrow u_0^2 = u^2 + \frac{4GM_{\Gamma}}{3R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)} u_0^2 = u^2 + \frac{4g_0R_{\Gamma}^2}{3R_{\Gamma}} \Leftrightarrow u_0 = \sqrt{u^2 + \frac{4}{3}g_0R_{\Gamma}} \Rightarrow$$

$$u_0 = \sqrt{4,35^2 \cdot 10^6 + \frac{4}{3}10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{m}{s} = \sqrt{104,26 \cdot 10^6} \frac{m}{s} \Rightarrow u_0 = 10,21 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

Παρατήρηση

Οι υπολογισμοί στο ερώτημα 4.4 γίνονται πιο απλοί αν αντικαταστήσουμε το μέτρο της u από τη σχέση :

$$u = \frac{2}{3}u_1 \Rightarrow u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}g_0R_{\Gamma}}. \quad (2)$$

Τότε προκύπτει :

$$u_0 = \sqrt{u^2 + \frac{4}{3}g_0R_{\Gamma}} \xrightarrow{(2)} u_0 = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}g_0R_{\Gamma} + \frac{4}{3}g_0R_{\Gamma}} = \sqrt{\frac{44}{27}g_0R_{\Gamma}} \Rightarrow u_0 \cong \sqrt{104,3 \cdot 10^6} \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$u_0 \cong 10,21 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .

Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων και η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

13. (20656) Δύο σώματα Α και Β με μάζες $m_1 = 10^4 \text{ Kg}$ και $m_2 = 9 \cdot 10^4 \text{ Kg}$ αντίστοιχα, που θεωρούνται σημειακά, κρατιούνται ακίνητα σε απόσταση $r = 10 \text{ Km}$.

Να υπολογίσετε:

4.1. το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου των δύο σωμάτων Α και Β στο μέσο Μ της απόστασής τους.

Μονάδες 6

4.2. την απόσταση από το σώμα Α, του σημείου στο οποίο η ένταση του βαρυτικού πεδίου των δύο σωμάτων Α και Β είναι μηδέν.

Μονάδες 6

Κάποια στιγμή τα δύο σώματα Α και Β αφήνονται ελεύθερα, οπότε εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης που ασκεί το ένα στο άλλο αρχίζουν να κινούνται πλησιάζοντας μεταξύ τους σε απόσταση $r' = 2 \text{ Km}$.

Αν κατά τη διάρκεια της κίνησης των δύο σωμάτων Α και Β δεν ασκείται σε αυτά καμία άλλη δύναμη, να υπολογίσετε:

4.3. τον λόγο των κινητικών ενεργειών K_1/K_2 , των δύο σωμάτων Α και Β, όπου K_1 είναι η κινητική ενέργεια του σώματος Α και K_2 είναι η κινητική ενέργεια του σώματος Β.

Μονάδες 7

4.4. τον λόγο των δυναμικών ενεργειών U_1/U_2 , όπου U_1, U_2 είναι οι δυναμικές ενέργειες του βαρυτικού πεδίου των δύο σωμάτων Α και Β στην αρχική τους απόσταση r και στην απόστασή τους r' , αντίστοιχα.

Μονάδες 6

Δίνεται η σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$.

Απάντηση

4.1

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας των μαζών m_1, m_2 στο μέσο Μ της απόστασής τους είναι :

$$V_M = -G \frac{m_1}{r_1} - G \frac{m_2}{r_2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \left(\frac{10^4}{5 \cdot 10^3} + \frac{9 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3} \right) \frac{\text{J}}{\text{Kg}} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \Rightarrow V_M = -13,34 \cdot 10^{-10} \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

4.2

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας μηδενίζεται στο σημείο Α της ευθείας των δύο σωμάτων που βρίσκεται ανάμεσά τους και απέχει απόσταση x από το Ιο.

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας κάθε σώματος στο σημείο Α δίνεται από τις σχέσεις :

$$g_1 = G \frac{m_1}{x^2} \quad (1)$$

$$g_2 = G \frac{m_2}{(r-x)^2} \quad (2)$$

Ισχύει :

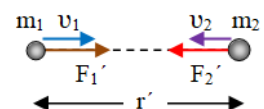
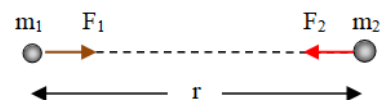
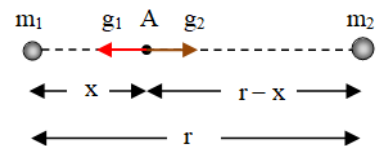
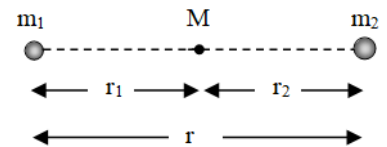
$$g_1 = g_2 \xrightarrow{(1),(2)} G \frac{m_1}{x^2} = G \frac{m_2}{(r-x)^2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{x^2} = \frac{m_2}{(r-x)^2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{x^2} = \frac{9m_1}{(r-x)^2} \Leftrightarrow (r-x)^2 = 9x^2.$$

Αφού $x > 0, r-x > 0$, προκύπτει :

$$r-x = 3x \Leftrightarrow r = 4x \Leftrightarrow x = \frac{r}{4} \Rightarrow x = 2,5 \text{ Km}.$$

4.3

Οι ελκτικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ είναι εσωτερικές για το σύστημα των σωμάτων. Αφού η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική, η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.



Τα δύο σώματα κινούνται στην ευθεία που τα συνδέει και πλησιάζουν μεταξύ τους.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά κίνησης του 1ου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{ολ(αρχ)} = p_{ολ(τελ)} \Leftrightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3)$$

Αφού αρχίζουν να κινούνται τα σώματα, σε κάθε χρονική στιγμή το πηλίκο των κινητικών ενεργειών τους είναι :

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 \xrightarrow{(3)} \frac{K_1}{K_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2^2}{m_1^2} \Leftrightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = 9.$$

4.4

Το πηλίκο των δυναμικών ενεργειών του συστήματος όταν οι αποστάσεις μεταξύ των σωμάτων είναι r , r' αντίστοιχα, είναι :

$$\frac{U}{U'} = \frac{-G \frac{m_1 m_2}{r}}{-G \frac{m_1 m_2}{r'}} \Leftrightarrow \frac{U}{U'} = \frac{r'}{r} \Rightarrow \frac{U}{U'} = \frac{1}{5}.$$

Σχόλια

- 1) Δύο σώματα με μάζες 10 tn και 90 tn δεν μπορούν να θεωρηθούν σημειακά, έστω και αν η απόστασή τους είναι 2 Km ή περισσότερο.
Έπρεπε η εκφώνηση να αναφέρεται σε δύο ομογενείς σφαίρες, με r την απόσταση μεταξύ των κέντρων τους.
- 2) Οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των σωμάτων είναι εξαιρετικά ασθενείς ($F \sim 10^{-9}$ N), οι επιταχύνσεις και οι τελικές ταχύτητες εξαιτίας αυτών των δυνάμεων ασήμαντες ($a \sim 10^{-14}$ m/s², $v \sim 10^{-10}$ m/s).
Για να μετακινηθούν τα σώματα από τις αρχικές στις τελικές θέσεις θα χρειαζονταν τουλάχιστον 20 χρόνια!
- 3) Οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκεί η Γη στα σώματα είναι (περίπου) 10^{14} φορές μεγαλύτερη από τις μεταξύ τους δυνάμεις, άρα δεν είναι ρεαλιστικό να θεωρούμε ότι οι μοναδικές δυνάμεις είναι οι μεταξύ τους βαρυτικές δυνάμεις.

14. (21387) Ένας αστροναύτης βρίσκεται στη Σελήνη και εκτοξεύει ένα σώμα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ οριζόντια, με ταχύτητα $v_0 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ από ύψος $h = 7,2 \text{ m}$. Το σώμα φτάνει στο έδαφος μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 3 \text{ s}$.

4.1. Να βρεθεί η μέγιστη οριζόντια απόσταση στην οποία φτάνει το σώμα.

Μονάδες 6

4.2. Να βρεθεί η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης.

Μονάδες 6

4.3. Να βρεθεί το μέτρο της ορμής του σώματος μετά από χρόνο $t = 2,5 \text{ s}$ από την στιγμή που εκτοξεύτηκε.

Μονάδες 6

4.4. Αν ο αστροναύτης γνωρίζει ότι η Σελήνη έχει ακτίνα $R = 1,7 \cdot 10^6 \text{ m}$ ποια τιμή υπολογίζει για το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου της Σελήνης στην επιφάνειά της;

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h .
Στον οριζόντιο άξονα x η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή. Ισχύει :

$$x_{\max} = v_0(\Delta t) = \left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (3\text{s}) = 36\text{m}.$$

4.2

Στον κατακόρυφο άξονα y το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση. Ισχύει :

$$h = \frac{1}{2}g_0(\Delta t)^2 \Leftrightarrow g_0 = \frac{2h}{(\Delta t)^2} \Rightarrow g_0 = \frac{2 \cdot 7,2\text{m}}{9\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$g_0 = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.3

Τη χρονική στιγμή $t = 2,5 \text{ s}$ η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας έχει μέτρο

$$v_y = g_0 t = \left(1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (2,5\text{s}) \Rightarrow v_y = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της συνισταμένης ταχύτητας την ίδια στιγμή είναι :

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{160} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 4\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ορμής του σώματος την ίδια στιγμή είναι :

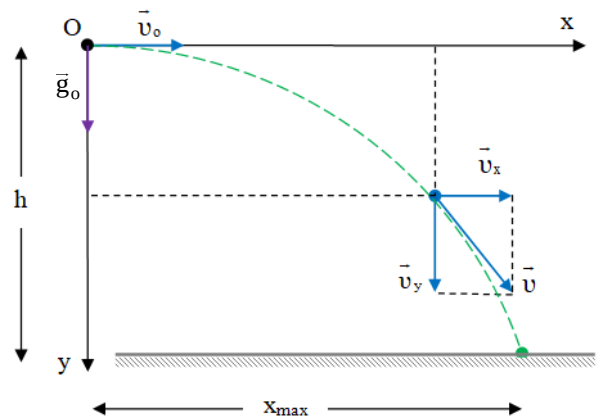
$$p = mv = (0,5\text{Kg}) \cdot \left(4\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \Rightarrow p = 2\sqrt{10} \text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Σελήνης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} \Leftrightarrow GM = g_0 R^2. \quad (1)$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Σελήνης στην επιφάνειά της είναι :



$$V_o = -G \frac{M}{R} \xrightarrow{(1)} V_o = -\frac{g_o R^2}{R} \Leftrightarrow V_o = -g_o R.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } V_o = -\left(1,6 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}\right) \cdot (1,7 \cdot 10^6 \text{ m}) = -2,72 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Σελήνη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα.
Οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

Δορυφόροι

15. (16074)

Ένα σώμα μάζας m_1 περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά σε ύψος $h = \frac{7}{9} R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης υπό την επίδραση μόνο της βαρυτικής έλξης της Γης. Ένα άλλο σώμα μάζας $m_2 = 2m_1$ που περιστρέφεται κατά την αντίθετη φορά στην ίδια κυκλική τροχιά υπό την επίδραση μόνο της βαρυτικής έλξης της Γης, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας m_1 . Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ Km}$ και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1. Να υπολογίσετε την ταχύτητα περιστροφής κάθε σώματος πριν συγκρουστούν.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε την περίοδο περιστροφής κάθε σώματος πριν συγκρουστούν.

Δίνεται ότι: $\frac{1024\pi}{27} = 119,15$.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη δημιουργία του.

Μονάδες 6

4.4. Να ελέγξετε αν το συσσωμάτωμα διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Κάθε δορυφόρος διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας

$$r = R_\Gamma + h = R_\Gamma + \frac{7}{9} R_\Gamma = \frac{16}{9} R_\Gamma.$$

Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F = F_k \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{\frac{16}{9} R_\Gamma} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{9}{16} g_0 R_\Gamma} \Leftrightarrow v = \frac{3}{4} \sqrt{g_0 R_\Gamma}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \frac{3}{4} \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Επομένως, οι δορυφόροι έχουν ταχύτητες ίσων μέτρων : } v_1 = v_2 = 6 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

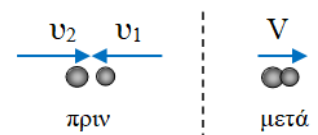
Κάθε δορυφόρος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα μέτρου v .

Η περίοδος της κίνησης είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot \frac{16}{9} R_\Gamma}{v} \Rightarrow T = \frac{32\pi \cdot 6,4 \cdot 10^6}{9 \cdot 6 \cdot 10^3} \text{ s} = \frac{1024\pi}{27} \cdot 10^2 \text{ s} \Rightarrow T = 11915 \text{ s}.$$

4.3

Τη στιγμή της σύγκρουσης οι ορμές των δορυφόρων είναι αντίρροπες.



Αφού η χρονική διάρκεια της σύγκρουσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι το σύστημα είναι μονωμένο κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_2$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow 2m_1v - m_1v = 3m_1V \Leftrightarrow 3m_1V = m_1v \Leftrightarrow V = \frac{v}{3} \Rightarrow V = 2 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

4.4

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής v_δ ενός σώματος που εκτοξεύεται από ύψος $h = \frac{7}{9}R_\Gamma$ από την επιφάνεια της Γης, είναι :

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \xrightarrow{(1)} v_\delta = \sqrt{\frac{2g_o R_\Gamma^2}{\frac{16}{9}R_\Gamma}} \Leftrightarrow v_\delta = \frac{3}{4}\sqrt{2g_o R_\Gamma} \Rightarrow v_\delta = \frac{3}{4}\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$v_\delta = 6\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

Διαπιστώνουμε ότι $V < v_\delta$, άρα το συσσωμάτωμα δεν μπορεί να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

16. (16091)

Δύο όμοιοι δορυφόροι μάζας $m = 100 \text{ kg}$ κινούνται σε ύψος $h = 3R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, στην ίδια κυκλική τροχιά, με αντίθετες ταχύτητες. Αν **οι δύο δορυφόροι ξεκινούν** τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το ίδιο σημείο.

4.1. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων τους.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογίσετε τις περιόδους τους.

Μονάδες 6

4.3. Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο θα συγκρουστούν.

Μονάδες 6

4.4. Εάν οι δορυφόροι συγκρουσθούν κεντρικά και πλαστικά να υπολογίσετε την απώλεια στην κινητική ενέργεια του συστήματος λόγω της κρούσης.

Μονάδες 7

Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ Km}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

Προσεγγιστικά να θεωρηθούν οι συγκρουόμενοι δορυφόροι ως συγκρουόμενες σφαίρες.

Απάντηση**4.1**

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Κάθε δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 4R_\Gamma$.

Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F = F_k \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{4}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \sqrt{\frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Κάθε δορυφόρος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα μέτρου v .

Η περίοδος της κίνησης είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4R_\Gamma}{v} \Rightarrow T = \frac{8\pi \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^3} \text{ s} \Rightarrow T = 1,28\pi \cdot 10^4 \text{ s}.$$

4.3

Οι δορυφόροι «ξεκινούν» από το ίδιο σημείο τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με ταχύτητες ίσου μέτρου v .

Όταν ξανασυναντηθούν θα έχουν διανύσει ίσα διαστήματα $s_1 = s_2 = vt$. (2)

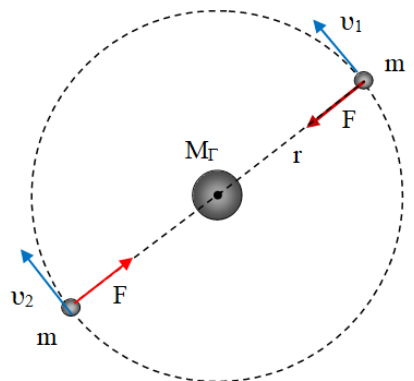
$$\text{Ισχύει : } s_1 + s_2 = 2\pi r \xrightarrow{(2)} 2vt = 2\pi r \Leftrightarrow 2t = \frac{2\pi r}{v} \Leftrightarrow 2t = T \Leftrightarrow t = \frac{T}{2} \Rightarrow t = 6,4\pi \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Εναλλακτικός τρόπος

Σε χρονική διάρκεια μιας περιόδου ($\Delta t = T$) κάθε δορυφόρος εκτελεί μία περιστροφή.

Αφού συναντήθηκαν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, όταν ξανασυναντηθούν κάθε δορυφόρος θα έχει διανύσει

$$\text{ημικύκλιο, άρα το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε είναι : } \Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = 6,4\pi \cdot 10^3 \text{ s}.$$



4.4

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την σύγκρουση είναι :

$$K_{ολ(πριν)} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m v^2.$$

Με αντικατάσταση : $K_{ολ(πριν)} = 10^2 \cdot 16 \cdot 10^6 \text{ J} = 1,6 \cdot 10^9 \text{ J}.$

Τη στιγμή της σύγκρουσης οι ταχύτητες των δορυφόρων είναι αντίρροπες.

Αφού η χρονική διάρκεια της σύγκρουσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{v}_2$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow m v - m v = 2 m V \Leftrightarrow V = 0.$$

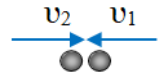
Άρα, αμέσως μετά τη σύγκρουση το συσσωμάτωμα είναι (στιγμιαία) ακίνητο.

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά τη σύγκρουση, είναι :

$$K_{ολ(μετά)} = 0.$$

Η ελάττωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της σύγκρουσης, είναι :

$$|\Delta E| = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)} = 1,6 \cdot 10^9 \text{ J}.$$



Σχόλια :

- 1) Η διατύπωση «Αν οι δύο δορυφόροι ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το ίδιο σημείο» δεν είναι σωστή, αφού οι δορυφόροι κινούνται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητες σταθερού μέτρου.
Η εκφώνηση έπρεπε να αναφέρει : «Οι δύο δορυφόροι **εκτοξεύτηκαν** τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το ίδιο σημείο με αντίθετες ταχύτητες».
- 2) Οι ταχύτητες των δορυφόρων είναι αντίθετες μόνο τις χρονικές στιγμές που διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- 3) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα.
Οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

17. (16092)

Ένας τεχνητός δορυφόρος της Γης εκτελεί κυκλική κίνηση με κέντρο το κέντρο της Γης, σε ύψος $h = 3R_{\Gamma}$ από την επιφάνειά της.

4.1. Να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ύψος $h = 3R_{\Gamma}$ από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 6

4.2. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του δορυφόρου.

Μονάδες 6

4.3. Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια ενός σώματος Σ μάζας $m = 4 \text{ kg}$ μέσα στο δορυφόρο, με δεδομένο ότι η δυναμική του ενέργεια είναι μηδέν στο άπειρο.

Μονάδες 6

4.4. Πόση είναι η ελάχιστη ενέργεια η οποία πρέπει να δοθεί στο παραπάνω σώμα Σ , προκειμένου να εγκαταλείψει τον δορυφόρο και να φτάσει σε άπειρη απόσταση από τη Γη.

Μονάδες 7

Η Γη θεωρείται το μοναδικό σώμα στο διάστημα, η επίδραση της ατμόσφαιρας είναι αμελητέα, ενώ $R_{\Gamma} = 6400 \text{ km}$ και $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2. \quad (1)$$

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης σε απόσταση $r = 4R_{\Gamma}$ από το κέντρο της, είναι :

$$g = \frac{GM_{\Gamma}}{r^2} \xrightarrow{(1)} g = \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{(4R_{\Gamma})^2} = \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{16R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow g = \frac{g_0}{16}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } g = \frac{10 \text{ m}}{16 \text{ s}^2} = 0,625 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2

Ο δορυφόρος διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 4R_{\Gamma}$.

Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Gamma} m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M_{\Gamma}}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}} \Leftrightarrow v = \frac{1}{2} \sqrt{g_0 R_{\Gamma}}. \quad (2)$$

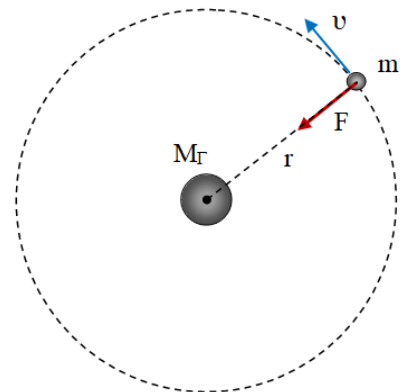
$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \frac{1}{2} \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Το σώμα μάζας m που βρίσκεται μέσα στο δορυφόρο έχει ταχύτητα μέτρου $v = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$\text{Η κινητική του ενέργεια είναι : } K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot (4 \text{ Kg}) \cdot \left(16 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right) = 3,2 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα – Γη είναι :



$$U = -G \frac{M_{\Gamma} m}{r} \xrightarrow{(1)} U = -\frac{mg_o R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}} \Leftrightarrow U = -\frac{1}{4} mg_o R_{\Gamma}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } U = -\frac{4 \cdot 10^6 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4} \text{ J} = -6,4 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Η μηχανική ενέργεια του σώματος είναι :

$$E_{\mu\chi} = K + U = (3,2 \cdot 10^7 - 6,4 \cdot 10^7) \text{ J} = -3,2 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Εναλλακτικός τρόπος

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι :

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \xrightarrow{(2)} K = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{4} g_o R_{\Gamma} \Leftrightarrow K = \frac{1}{8} mg_o R_{\Gamma}.$$

Η δυναμική ενέργεια είναι :

$$U = -G \frac{M_{\Gamma} m}{r} \xrightarrow{(1)} U = -\frac{mg_o R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}} \Leftrightarrow U = -\frac{1}{4} mg_o R_{\Gamma}.$$

Η μηχανική ενέργεια του σώματος είναι :

$$E_{\mu\chi} = K + U = \frac{1}{8} mg_o R_{\Gamma} - \frac{1}{4} mg_o R_{\Gamma} = -\frac{1}{8} mg_o R_{\Gamma}.$$

$$\text{Δηλαδή : } E_{\mu\chi} = -K = -3,2 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

4.4

Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί στο σώμα ώστε να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης είναι τόση ώστε τη στιγμή που βγαίνει από το πεδίο βαρύτητας να έχει μηδενική κινητική ενέργεια.

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΕ) :

$$E_{\text{προσφ}(\min)} = E_{\mu\chi(\infty)} - E_{\mu\chi(\text{αρχ})} = 0 - (-3,2 \cdot 10^7 \text{ J}) = 3,2 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .

18. (16112) Οι εξωπλανήτες είναι πλανήτες οι οποίοι περιφέρονται γύρω από μακρινούς αστέρες, όπως η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο. Μια βασική προϋπόθεση ώστε να μπορούσαν κάποτε άνθρωποι να επισκεφθούν κάποιον εξωπλανήτη και να μπορεί αυτός να συντηρήσει ζωή όπως την γνωρίζουμε, είναι να έχει βαρύτητα συγκρίσιμη με αυτήν της Γης. Ένας υποθετικός εξωπλανήτης έχει ακτίνα $R = 6 \cdot 10^6 \text{ m}$ και μάζα τέτοια ώστε $GM = 3,6 \cdot 10^{14} \text{ Nm}^2/\text{kg}$.

4.1. Να υπολογίσετε την ένταση g_0 του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του εξωπλανήτη και να επιβεβαιώσετε έτσι πως η βαρύτητά του είναι παρόμοια με αυτήν της Γης.

Μονάδες 6

Για να μελετηθεί καλά ο υποθετικός εξωπλανήτης από μελλοντικούς επισκέπτες, οι τελευταίοι θα τοποθετούσαν τεχνητούς δορυφόρους σε τροχιά γύρω από αυτόν.

4.2. Υπολογίστε την γραμμική ταχύτητα περιφοράς δορυφόρου ο οποίος εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από το κέντρο του πλανήτη σε ύψος R από την επιφάνειά του.

Μονάδες 7

4.3. Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται ο ίδιος δορυφόρος για να εκτελέσει μία πλήρη περιφορά γύρω από τον εξωπλανήτη.

Μονάδες 6

Μία ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία δορυφόρων είναι οι γεωσύγχρονοι δορυφόροι. Στον συγκεκριμένο εξωπλανήτη ένας τέτοιος δορυφόρος πρέπει να τοποθετηθεί σε κυκλική τροχιά με κέντρο το κέντρο του εξωπλανήτη και ακτίνα $r' = 2,4 \times 10^7 \text{ m}$.

4.4. Υπολογίστε την ενέργεια που πρέπει να δοθεί σε έναν πύραυλο μάζας $m = 1000 \text{ kg}$, ώστε να φτάσει σε ύψος ίδιο με αυτό του γεωσύγχρονου δορυφόρου, ξεκινώντας από την επιφάνεια του πλανήτη.

Μονάδες 6

Μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες προσεγγίσεις: $\sqrt{0,3} \cong 0,55$, $\frac{24\pi}{55} \cong 1,4$.

Υπενθυμίζεται πως στην επιφάνεια της Γης η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

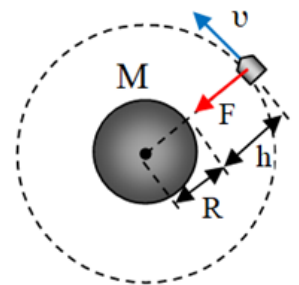
Απάντηση

4.1

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη είναι :

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} = \frac{3,6 \cdot 10^{14} \text{ N}}{36 \cdot 10^{12} \text{ Kg}} \Rightarrow g_0 = 10 \frac{\text{N}}{\text{Kg}}.$$

Επομένως, η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη έχει την ίδια τιμή με την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης.



4.2

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 2R$ γύρω από το κέντρο του πλανήτη.

Η ελκτική δύναμη βαρύτητας που ασκεί ο πλανήτης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F = F_k \Leftrightarrow G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M}{r} = \frac{GM}{2R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{2R}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3,6 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 6 \cdot 10^6}} = \sqrt{0,3 \cdot 10^8} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$v \cong 0,55 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad v \cong 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.3

Η περίοδος T της ομαλής κυκλικής κίνησης του δορυφόρου είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 2R}{v} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^6}{5,5 \cdot 10^3} \text{ s} = \frac{24\pi}{55} \cdot 10^4 \text{ s} \Rightarrow T \cong 1,4 \cdot 10^4 \text{ s}.$$

4.4

Η ζητούμενη ενέργεια είναι η κινητική ενέργεια εκτόξευσης του πυραύλου από την επιφάνεια του πλανήτη. Τη στιγμή που φτάνει ο πύραυλος σε απόσταση r' από το κέντρο του πλανήτη, μηδενίζεται η κινητική του ενέργεια.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας για τη διαδρομή του πυραύλου από την επιφάνεια του πλανήτη μέχρι το σημείο που απέχει απόσταση r' από το κέντρο του πλανήτη :

$$K + U = K' + U' \Leftrightarrow K - G \frac{Mm}{R} = 0 - G \frac{Mm}{r'} \Leftrightarrow K = G \frac{Mm}{R} - G \frac{Mm}{r'}. \quad (1)$$

Με αντικατάσταση :

$$K = \frac{3,6 \cdot 10^{14} \cdot 10^3}{6 \cdot 10^6} \text{ J} - \frac{3,6 \cdot 10^{14} \cdot 10^3}{2,4 \cdot 10^7} \text{ J} = 6 \cdot 10^{10} \text{ J} - 1,5 \cdot 10^{10} \text{ J} \Leftrightarrow K = 4,5 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

Παρατήρηση

Ο υπολογισμός της αρχικής κινητικής ενέργειας είναι πιο απλός, αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (1) όπου $r' = 4R$:

$$K = G \frac{Mm}{R} - G \frac{Mm}{4R} = 3 \frac{GMm}{4R} \Rightarrow K = 3 \cdot \frac{3,6 \cdot 10^{14} \cdot 10^3}{4 \cdot 6 \cdot 10^6} \text{ J} = 4,5 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

Σχόλια

1) Η διατύπωση «να επιβεβαιώσετε έτσι πως η βαρύτητά του είναι παρόμοια με αυτήν της Γης» είναι ασαφής.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Να συγκρίνετε το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια του πλανήτη με το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης».

2) Γεωσύγχρονοι ονομάζονται οι δορυφόροι που περιφέρονται γύρω από τη Γη με περίοδο περιφοράς ίση με την περίοδο περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της ($T_s \cong 24 \text{ h}$).

Δεν έχει νόημα ο όρος «γεωσύγχρονος» για ένα δορυφόρο άλλου πλανήτη εκτός από τη Γη.

3) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι ο πλανήτης θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα και βρίσκεται πολύ μακριά από άλλα ουράνια σώματα.

19. (16124) Δορυφόρος μάζας $m = 300\text{Kg}$ διαγράφει κυκλική τροχιά σε ύψος $h = R_\Gamma$ πάνω από την επιφάνεια της Γης. Κάποια στιγμή λόγω εσωτερικής έκρηξης διασπάται σε δύο τμήματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. Το Σ_2 αμέσως μετά την έκρηξη αποκτά την απαραίτητη ταχύτητα για να διαφύγει οριακά από την έλξη της Γης, ενώ το Σ_1 συνεχίζει να εκτελεί κίνηση στην ίδια κυκλική τροχιά με αυτή που ήταν πριν την έκρηξη, αλλάζοντας κατεύθυνση κίνησης. Να υπολογίσετε:

4.1. το μέτρο της ορμής του δορυφόρου στο ύψος αυτό.

Μονάδες 6

4.2. το μέτρο της ταχύτητας του τμήματος Σ_2 μετά την έκρηξη.

Μονάδες 6

4.3. τον λόγο των μαζών m_1/m_2 .

Μονάδες 7

4.4. την ενέργεια που ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη.

Μονάδες 6

Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$ και η επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_o = 10 \text{ m/s}^2$. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς δίνεται $\sqrt{2} = 1,4$.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της,

ισχύει :

$$g_o = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_o R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_\Gamma + h = 2R_\Gamma$.

Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F_\beta = F_\kappa \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_o R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g_o R_\Gamma}{2}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \sqrt{\frac{10 \cdot 64 \cdot 10^5}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{32 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ορμής του δορυφόρου είναι :

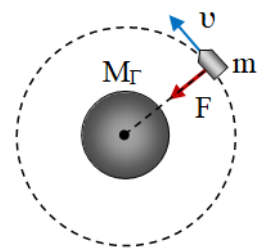
$$p = mv = (300 \text{ Kg}) \cdot \left(4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 12\sqrt{2} \cdot 10^5 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad p \cong 1,68 \cdot 10^6 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Το μέτρο της ταχύτητας του 2ου κομματιού αμέσως μετά τη διάσπαση είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από ύψος $h = R_\Gamma$:

$$v_2 = v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \xrightarrow{(1)} v_2 = \sqrt{\frac{2g_o R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}} \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{g_o R_\Gamma}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_2 = \sqrt{10 \cdot 64 \cdot 10^5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{64 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



4.3

Το 1ο κομμάτι κινείται στην ίδια τροχιά, άρα έχει ταχύτητα ίσου μέτρου με την ταχύτητα του δορυφόρου : $v_1 = v = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Αφού η χρονική διάρκεια της διάσπασης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Γράφουμε την ΑΔΟ διανυσματικά :

$$\vec{p}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{p}_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

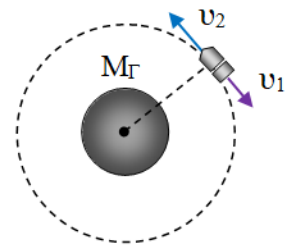
Η ορμή $\vec{p}_1$ έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική ορμή $\vec{p}$, άρα και η $\vec{p}_2$ έχει την ίδια διεύθυνση.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ}(\text{πριν})} = p_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow mv = m_2 v_2 - m_1 v_1 \xrightarrow{v_1=v} (m_1 + m_2) v_1 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Leftrightarrow$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_1 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Leftrightarrow 2m_1 v_1 = m_2 (v_2 - v_1) \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2 - v_1}{2v_1} \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{2v_1} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \frac{m_1}{m_2} = \frac{8 \cdot 10^3}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10^3} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cong 0,7 - 0,5 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \cong 0,2 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} \cong \frac{1}{5}.$$



4.4

Για τις μάζες των δύο κομματιών ισχύει : $m_2 = 5m_1$ (προσεγγιστικά).

$$m_1 + m_2 = m \Rightarrow 6m_1 = m \Rightarrow m_1 = 50 \text{ Kg}, \quad m_2 = 250 \text{ Kg}.$$

Η αύξηση της Μηχανικής Ενέργειας του συστήματος λόγω της έκρηξης είναι :

$$\Delta E_{\text{μηχ}} = (K_{\text{ολ}(\text{μετά})} + U_{\text{μετά}}) - (K_{\text{ολ}(\text{πριν})} + U_{\text{πριν}}).$$

Οι θέσεις των σωμάτων ελάχιστα πριν και αμέσως μετά τη διάσπαση είναι (περίπου) ίδιες, άρα η δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μεταβάλλεται : $U_{\text{μετά}} = U_{\text{πριν}}$.

Επομένως :

$$\Delta E_{\text{μηχ}} = K_{\text{ολ}(\text{μετά})} - K_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{v_1=v} \Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} (m_1 - m) v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Με αντικατάσταση :

$$\Delta E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} [(50 - 300) \cdot 32 \cdot 10^6 + 250 \cdot 64 \cdot 10^6] \text{ J} = \frac{1}{2} [250 \cdot (64 - 32) \cdot 10^6] \text{ J} \Rightarrow \Delta E_{\text{μηχ}} = 4 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

2) Στο ερώτημα 4.3, για να προκύψει ο λόγος των μαζών $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{5}$ πρέπει η αντικατάσταση $\sqrt{2} = 1,4$ να

γίνει στο τέλος, μετά τη ρητοποίηση του παρονομαστή. Αν η αντικατάσταση $\sqrt{2} = 1,4$ γίνει από την

αρχή (αμέσως μετά την εφαρμογή της ΑΔΟ), τότε ο λόγος των μαζών προκύπτει $\frac{m_1}{m_2} \cong 0,214$.

Η προσέγγιση αυτή επηρεάζει φυσικά και την απάντηση στο επόμενο ερώτημα.

3) Η ενέργεια που ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί, αφού ένα σημαντικό ποσοστό της μετατρέπεται σε άλλες μορφές ενέργειας (θερμική, ηχητική, φωτεινή κ.λ.π.).

Η εκφώνηση έπρεπε να ζητά την αύξηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της έκρηξης.

20. (16205)

Ένας υποθετικός πλανήτης έχει μάζα $M_{\Pi} = \frac{M_{\Gamma}}{3}$, όπου M_{Γ} η μάζα της Γης και ακτίνα $R_{\Pi} = R_{\Gamma}$, όπου R_{Γ} η ακτίνα της Γης και δεν έχει ατμόσφαιρα. Ένα διαστημικό όχημα μάζας m , έχει τεθεί σε δορυφορική τροχιά γύρω από τον πλανήτη αυτό και σε ύψος $h = 2R_{\Pi}$ από την επιφάνειά του.

4.1. Να υπολογίσετε την περίοδο περιστροφής του οχήματος γύρω από τον πλανήτη.

Μονάδες 7

Κάποια στιγμή από το δορυφορικό όχημα εκτοξεύεται ένα σώμα μάζας $m_1 = \frac{m}{3}$, με τέτοιο τρόπο ώστε το σώμα αυτό, αμέσως μετά την εκτόξευσή του να έχει ταχύτητα μηδέν, ώστε να πέσει προς την επιφάνεια του πλανήτη, κινούμενο σε διεύθυνση που περνάει από το κέντρο του.

4.2. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του υπόλοιπου οχήματος μετά την εκτόξευση του σώματος.

Μονάδες 6

4.3. Αν η αρχική μάζα του δορυφορικού οχήματος πριν διασπαστεί ήταν $m = 900 \text{ kg}$, πόση μηχανική ενέργεια αποδόθηκε στο σύστημα εξαιτίας αυτής της εκτόξευσης του σώματος;

Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα που εκτοξεύτηκε φτάνει στην επιφάνεια του πλανήτη.

Μονάδες 6

Δίνεται η ακτίνα της Γης $R_{\Gamma} = 6400 \text{ km}$ και το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2. \quad (1)$$

Το όχημα κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_{\Pi} + h = 3R_{\Pi} = 3R_{\Gamma}$.

Η βαρυτική έλξη του πλανήτη είναι η κεντρομόλος δύναμη για το όχημα.

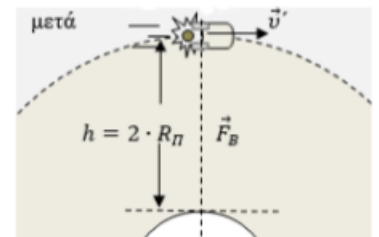
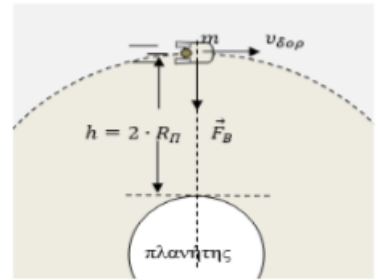
Ισχύει :

$$F_{\beta} = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Pi} m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \xrightarrow{M_{\Pi} = \frac{M_{\Gamma}}{3}} v^2 = G \frac{M_{\Gamma}}{3r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{3 \cdot 3R_{\Gamma}} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}}{9}} \Leftrightarrow v = \frac{1}{3} \sqrt{g_0 R_{\Gamma}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \frac{1}{3} \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{8}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η περίοδος της κίνησης είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 3R_{\Gamma}}{v} \Rightarrow T = \frac{6\pi \cdot 6,4 \cdot 10^6}{\frac{8}{3} \cdot 10^3} \text{s} = 14,4\pi \cdot 10^3 \text{s} \text{ ή } T = 14400\pi \text{s}.$$



4.2

Αφού η χρονική διάρκεια της διάσπασης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Το σώμα είναι ακίνητο αμέσως μετά τη διάσπαση, άρα η ορμή του οχήματος αμέσως μετά τη διάσπαση έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv = \frac{2m}{3}v' + 0 \Leftrightarrow v' = \frac{3}{2}v \Rightarrow v' = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 10^3 \frac{m}{s} = 4 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$

4.3

Η μηχανική ενέργεια που αποδόθηκε στο σύστημα εξαιτίας της εκτόξευσης είναι ίση με την αύξηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά τη διάρκεια της διάσπασης :

$$\Delta E_{μηχ} = \Delta K_{διασπ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2m}{3} v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 16 \cdot 10^6 - \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot \frac{64}{9} \cdot 10^6 \right) J = 1,6 \cdot 10^9 J.$$

4.4

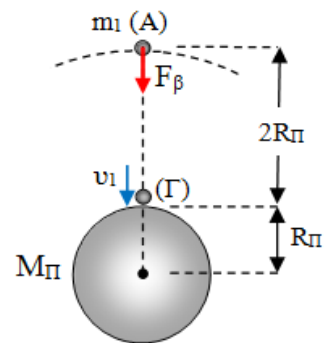
Εφαρμόζουμε το Θ.Δ.Μ.Ε. για το σώμα στο σημείο Α της διάσπασης και το σημείο Γ της επιφάνειας του πλανήτη :

$$K_{\Gamma(\sigma)} + U_{\Gamma(\sigma)} = K_{A(\sigma)} + U_{A(\sigma)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{GM_{\Pi} m_1}{R_{\Pi}} = 0 - \frac{GM_{\Pi} m_1}{3R_{\Pi}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 = \frac{GM_{\Pi}}{R_{\Pi}} - \frac{GM_{\Pi}}{3R_{\Pi}} \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{4GM_{\Pi}}{3R_{\Pi}} = \frac{4GM_{\Gamma}}{3 \cdot 3R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)} v_1^2 = \frac{4g_0 R_{\Gamma}^2}{9R_{\Gamma}} \Leftrightarrow$$

$$v_1 = \frac{2}{3} \sqrt{g_0 R_{\Gamma}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_1 = \frac{2}{3} \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \frac{m}{s}} \Rightarrow v_1 = \frac{16}{3} \cdot 10^3 \frac{m}{s}.$$



Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση έπρεπε να διευκρινίζει ότι η ταχύτητα του σώματος m_1 μετά την εκτόξευση αναφέρεται ως προς τον πλανήτη (και όχι ως προς το διαστημικό όχημα).
- 2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι ο πλανήτης θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα.
Οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

21. (16332) Ένας δορυφόρος με μάζα m κινείται κυκλικά γύρω από τη Γη σε ύψος h ίσο με την ακτίνα της Γης R_Γ . Εσωτερική διάταξη προκαλεί έκρηξη με αποτέλεσμα ο δορυφόρος να χωριστεί σε δύο μέρη, από το οποία το ένα, μάζας m_1 συνεχίζει να κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά που είχε ο δορυφόρος πριν την έκρηξη – σε αντίθετη, όμως, από την αρχική φορά της κίνησής του - ενώ το άλλο, μάζας m_2 , αποκτά την απαραίτητη ταχύτητα για να διαφύγει μόλις από την έλξη της Γης.

4.1. Αν γνωρίζετε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης έχει μέτρο ίσο με g_0 , να προσδιορίσετε το μέτρο της ταχύτητας v , με την οποία κινείται ο δορυφόρος στο ύψος $h = R_\Gamma$.

Μονάδες 5

4.2. Να προσδιορίσετε την περίοδο περιστροφής του κομματιού μάζας m_1 του δορυφόρου, που παραμένει στην κυκλική τροχιά.

Μονάδες 5

4.3. Να προσδιορίσετε το λόγο του μέτρου της ταχύτητας διαφυγής του κομματιού μάζας m_2 προς το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου, σε ύψος ίσο με την ακτίνα της Γης.

Μονάδες 7

4.4. Να προσδιορίσετε τον λόγο των μαζών των δύο κομματιών m_1 και m_2 .

Μονάδες 8

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της,

ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Το όχημα κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_\Gamma + h = 2R_\Gamma$.

Η βαρυτική έλξη του πλανήτη είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F_\beta = F_\kappa \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}. \quad (2)$$

4.2

Αφού το 1ο κομμάτι κινείται στην ίδια τροχιά, έχει ταχύτητα ίσου μέτρου με την ταχύτητα του

δορυφόρου : $v_1 = v \xrightarrow{(2)} v_1 = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}.$

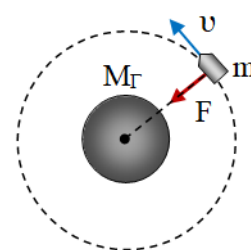
Η περίοδος περιστροφής είναι : $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 2R_\Gamma}{\sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}} \Leftrightarrow T = 4\pi \sqrt{\frac{2R_\Gamma}{g_0}}.$

4.3

Το μέτρο της ταχύτητας του 2ου κομματιού αμέσως μετά τη διάσπαση είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από ύψος $h = R_\Gamma$:

$$v_2 = v_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \xrightarrow{(1)} v_2 = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma}} \Leftrightarrow v_2 = \sqrt{g_0 R_\Gamma}.$$

$$\text{Επομένως : } \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{g_0 R_\Gamma}}{\sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}} \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}. \quad (3)$$



4.4

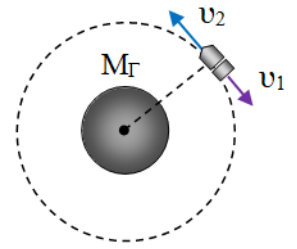
Αφού η χρονική διάρκεια της διάσπασης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της. Γράφουμε την ΑΔΟ διανυσματικά :

$$\vec{p}_{ολ(πριν)} = \vec{p}_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Αφού η ορμή $\vec{p}_1$ έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική, άρα και η $\vec{p}_2$ έχει την ίδια διεύθυνση.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας $\vec{v}$ και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$\begin{aligned} p_{ολ(πριν)} &= p_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow mv = m_2 v_2 - m_1 v_1 \xrightarrow{v=v_1} (m_1 + m_2) v_1 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Leftrightarrow \\ m_1 v_1 + m_2 v_1 &= m_2 v_2 - m_1 v_1 \Leftrightarrow 2m_1 v_1 = m_2 (v_2 - v_1) \xrightarrow{(3)} 2m_1 v_1 = m_2 (\sqrt{2} v_1 - v_1) \Leftrightarrow \\ 2m_1 &= m_2 (\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \end{aligned}$$



Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν έχει αριθμητικά δεδομένα.

2) Οι διατυπώσεις : «να προσδιορίσετε το μέτρο της ταχύτητας», «να προσδιορίσετε την περίοδο περιστροφής» είναι ασαφείς.

Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «να αποδείξετε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της ταχύτητας και την περίοδο περιστροφής του δορυφόρου με το μέτρο της έντασης g_0 και την ακτίνα της Γης R_Γ .

2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

Οι επιδράσεις των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνονται υπ' όψη.

22. (16460)

Ένας δορυφόρος έχει μάζα $m = 5.000 \text{ Kg}$ και περιστρέφεται γύρω από την Γη σε κυκλική τροχιά και σε απόσταση $h = 3R_{\Gamma}$ από την επιφάνεια της Γης. Η ακτίνα της Γης είναι $R_{\Gamma} = 6.400 \text{ km}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά της είναι $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$. Θεωρώντας την αντίσταση του αέρα αμελητέα και την βαρυτική δυναμική ενέργεια σε πολύ μεγάλη απόσταση ίση με μηδέν, να βρεθούν:

4.1. το μέτρο της έντασης του βαρυτικού πεδίου της Γης στο ύψος που βρίσκεται η τροχιά του δορυφόρου.

Μονάδες 5

4.2. το μέτρο της ταχύτητας περιστροφής του δορυφόρου καθώς και το χρονικό διάστημα στο οποίο ολοκληρώνει μία περιστροφή.

Μονάδες 6

4.3. το μέτρο της μεταβολής της ορμής του δορυφόρου σε χρονικό διάστημα μισής περιόδου.

Μονάδες 6

4.4. Με την βοήθεια ενσωματωμένων προωθητικών πυραύλων, ο δορυφόρος διπλασιάζει το μέτρο της ταχύτητάς του. Να αποδείξετε ότι ο δορυφόρος θα φύγει για πάντα από την βαρυτική έλξη της Γης και να βρεθεί η τελική του ταχύτητα.

Μονάδες 8

Απάντηση**4.1**

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow GM_{\Gamma} = g_0 R_{\Gamma}^2. \quad (1)$$

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_{\Gamma} + h = 4R_{\Gamma}$.

Το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας στα σημεία της τροχιάς του δορυφόρου, είναι :

$$g = G \frac{M_{\Gamma}}{r^2} \xrightarrow[r=4R_{\Gamma}]{(1)} g = \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{16R_{\Gamma}^2} \Leftrightarrow g = \frac{g_0}{16} \Rightarrow g = \frac{10 \text{ m}}{16 \text{ s}^2} \Rightarrow g = 0,625 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

4.2

Η βαρυτική έλξη της Γης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F_{\beta} = F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{M_{\Gamma} m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M_{\Gamma}}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}} \Leftrightarrow v = \frac{1}{2} \sqrt{g_0 R_{\Gamma}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v = \frac{1}{2} \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

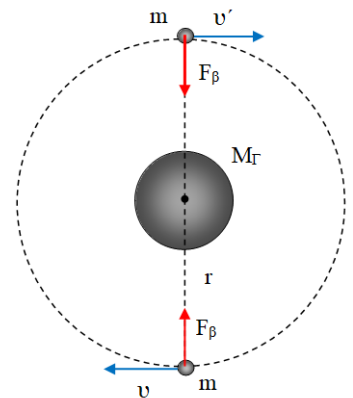
Η περίοδος T της ομαλής κυκλικής κίνησης του δορυφόρου είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^3} \text{ s} = 1,28\pi \cdot 10^4 \text{ s}.$$

4.3

Σε χρονική διάρκεια μισής περιόδου ο δορυφόρος διαγράφει ημικύκλιο, άρα η τελική και η αρχική ταχύτητα είναι αντίρροπες. Το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου είναι σταθερό : $v' = v = \text{σταθ}$.

Με θετική τη φορά της τελικής ταχύτητας, η αλγεβρική μεταβολή της ορμής είναι :



$$\Delta p = p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}} = mv - (-mv) = 2mv \Rightarrow \Delta p = 2 \cdot (5 \cdot 10^3 \text{ Kg}) \cdot \left(4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 4 \cdot 10^7 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής για ένα σημείο της τροχιάς του δορυφόρου, είναι :

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma}}{r}} \xrightarrow[r=4R_{\Gamma}]{(1)} v_{\delta} = \sqrt{\frac{2g_0 R_{\Gamma}^2}{4R_{\Gamma}}} \Leftrightarrow v_{\delta} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\Gamma}}{2}} \Rightarrow v_{\delta} = \sqrt{\frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου, μετά την χρήση των πυραύλων, είναι : $v' = 2v = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Αφού $v' > v_{\delta}$, ο δορυφόρος θα διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της Γης.

Εφαρμόζουμε το ΘΔΜΕ για τον δορυφόρο στην αρχική του θέση (αμέσως μετά τον διπλασιασμό της ταχύτητας) και τη στιγμή που βγαίνει από το πεδίο βαρύτητας της Γης :

$$K_{\infty} + U_{\infty} = K' + U \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 + 0 = \frac{1}{2}mv'^2 - G \frac{M_{\Gamma}m}{4R_{\Gamma}} \xrightarrow{(1)} v_{\infty}^2 = v'^2 - \frac{g_0 R_{\Gamma}}{4} \Leftrightarrow v_{\infty} = \sqrt{v'^2 - \frac{g_0 R_{\Gamma}}{4}}.$$

Με αντικατάσταση :

$$v_{\infty} = \sqrt{64 \cdot 10^6 - \frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{32 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .
Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

23. (16492)

Ένας δορυφόρος κινείται σε ύψος $h = 2600 \text{ km}$ από την επιφάνεια της Γης. Η μάζα της Γης έχει μετρηθεί $M_\Gamma = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, η ακτίνα της $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$, ενώ η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια αυτής είναι $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$. Δίνεται η παγκόσμια σταθερά $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, ενώ αμελούνται τριβές. Να υπολογίσετε:

4.1. Την ένταση και το δυναμικό σε ένα σημείο Σ της τροχιάς του δορυφόρου. Μονάδες 6

4.2. Την μηχανική ενέργεια του δορυφόρου στο ύψος αυτό, αν η μάζα του δορυφόρου είναι 450 kg . Μονάδες 6

Κάποια στιγμή πυροδοτούνται ανασχετικοί πύραυλοι του δορυφόρου με συνέπεια να μειωθεί η ολική ενέργειά του στο 80% της αρχικής του ενέργειας και την άνοδο του δορυφόρου σε μεγαλύτερο ύψος.

4.3. Να βρείτε το ύψος της νέας τροχιάς στο οποίο μεταπίπτει ο δορυφόρος. Μονάδες 6

4.4. Να υπολογίσετε τον λόγο των ταχυτήτων $\frac{u'}{u}$, όπου u' η ταχύτητα του δορυφόρου στην νέα θέση και u η ταχύτητά του στην αρχική του θέση. Δίνεται $\sqrt{0,8} = 0,9$. Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην

$$\text{επιφάνειά της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_\Gamma + h$.

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ένα σημείο της τροχιάς του δορυφόρου έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης και μέτρο :

$$g = G \frac{M_\Gamma}{r^2} \xrightarrow{(1)} g = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{(R_\Gamma + h)^2} \Leftrightarrow g = g_0 \left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + h} \right)^2.$$

$$\text{Με αντικατάσταση } g = 10 \cdot \left(\frac{6,4 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^6} \right)^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cong 10 \cdot 0,71^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow g \cong 5,06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ένα σημείο της τροχιάς του δορυφόρου είναι :

$$V = -G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} V = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}. \quad (2)$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } V = -\frac{10 \cdot (6,4 \cdot 10^6)^2}{9 \cdot 10^6} \frac{\text{J}}{\text{Kg}} = -\frac{40,96 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^5} \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \Rightarrow V \cong -4,55 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

4.2

Η βαρυτική έλξη της Γης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη. Ισχύει :

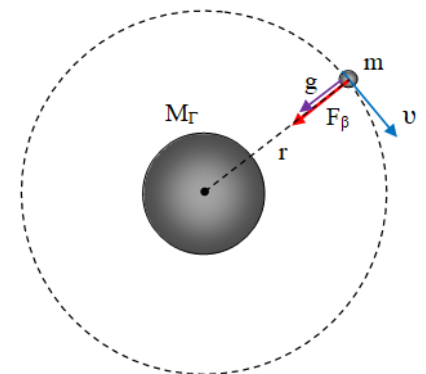
$$F = F_\kappa \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{u^2}{r} \Leftrightarrow u^2 = G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} u^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}. \quad (3)$$

Η αρχική μηχανική ενέργεια του δορυφόρου είναι :

$$E_\mu = U + K = m \left(V + \frac{1}{2} u^2 \right) \xrightarrow{(2),(3)} E_\mu = m \left(-\frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{g_0 R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h} \right) \Leftrightarrow E_\mu = -m \frac{g_0 R_\Gamma^2}{2(R_\Gamma + h)}. \quad (4)$$

$$(2),(4) \Rightarrow E_\mu = \frac{mV}{2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } E_\mu \cong -\frac{450 \cdot 4,55 \cdot 10^7}{2} \text{ J} \cong -1,024 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$



4.3

Η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου στη νέα τροχιά, είναι : $E_{\mu}' = -\frac{mg_o R_{\Gamma}^2}{2(R_{\Gamma} + h')}$. (5)

$$\text{Ισχύει : } E_{\mu}' = 80\% \cdot E_{\mu} \xrightarrow{(4),(5)} -\frac{mg_o R_{\Gamma}^2}{2(R_{\Gamma} + h')} = 0,8 \left(-\frac{mg_o R_{\Gamma}^2}{2(R_{\Gamma} + h)} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{R_{\Gamma} + h'} = \frac{0,8}{R_{\Gamma} + h} \Leftrightarrow 0,8(R_{\Gamma} + h) = R_{\Gamma} + h'. \quad (6)$$

$$\text{Επομένως : } 0,8h' = 0,2R_{\Gamma} + h \Leftrightarrow h' = \frac{0,2R_{\Gamma} + h}{0,8}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } h' = \frac{0,2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 + 2,6 \cdot 10^6}{0,8} \text{ m} = 4,85 \cdot 10^6 \text{ m} (=4850 \text{ Km}).$$

4.4

Με βάση τη σχέση (3), για το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου στη νέα τροχιά, ισχύει :

$$u'^2 = \frac{g_o R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h'}. \quad (7)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (7), (3) :

$$\frac{u'^2}{u^2} = \frac{\frac{g_o R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h'}}{\frac{g_o R_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma} + h}} \Leftrightarrow \left(\frac{u'}{u} \right)^2 = \frac{R_{\Gamma} + h}{R_{\Gamma} + h'} \xrightarrow{(6)} \left(\frac{u'}{u} \right)^2 = 0,8.$$

$$\text{Επομένως : } \frac{u'}{u} = \sqrt{0,8} \quad \text{ή} \quad \frac{u'}{u} \cong 0,9.$$

Σημείωση

Το δυναμικό στο ερώτημα 4.1 υπολογίζεται πιο εύκολα, χρησιμοποιώντας τη σχέση : $G \frac{M_{\Gamma}}{r} = g \cdot r$.

$$\text{Τότε : } V = -G \frac{M_{\Gamma}}{r} = -g \cdot r = -g(R_{\Gamma} + h) \Rightarrow V \cong -5,06 \cdot 9 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \cong -4,55 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

Σχόλια :

- 1) Η μάζα της Γης δεν είναι δυνατό να μετρηθεί, αλλά έχει υπολογιστεί από αστρονομικά δεδομένα.
- 2) Με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης, από τη σχέση $g_o = G \frac{M_{\Gamma}}{R_{\Gamma}^2}$ προκύπτει για την ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης η τιμή $g_o' = 9,77 \text{ m/s}^2$, ενώ η εκφώνηση δίνει ότι $g_o = 10 \text{ m/s}^2$. Άρα, **υπάρχει ασυμφωνία στα δεδομένα της εκφώνησης.**
Η εκφώνηση δεν έπρεπε να δίνει την τιμή της σταθεράς της βαρύτητας G.
Επομένως, αν χρησιμοποιηθεί η τιμή $g_o = 10 \text{ m/s}^2$ κατά τη λύση της άσκησης, δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί η τιμή της σταθεράς της βαρύτητας G.
- 3) Η εκφώνηση δεν αναφέρει σαφώς ότι το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη στο νέο ύψος.
- 4) Η διατύπωση «Να βρείτε το ύψος της νέας τροχιάς στο οποίο μεταπίπτει ο δορυφόρος» δεν είναι σωστή. Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «Να υπολογίσετε την απόσταση του δορυφόρου από την επιφάνεια της Γης όταν κινείται στη νέα κυκλική τροχιά».
- 5) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα.
Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

24. (16702)

Δορυφόρος μάζας $m = 2000 \text{ Kg}$, κινείται σε κυκλική τροχιά σε ύψος $h_1 = 192 \cdot 10^5 \text{ m}$ από την επιφάνεια της Γης. Να υπολογίσετε:

4.1. Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ύψος h_1 από την επιφάνεια της Γης, με δεδομένο ότι το δυναμικό είναι μηδέν σε άπειρη απόσταση από τη Γη.

Μονάδες 6

4.2. Την περίοδο περιφοράς T του δορυφόρου.

Μονάδες 7

4.3. Τη μεταβολή της ορμής του δορυφόρου σε χρονικό διάστημα $\Delta t = T/2$.

Μονάδες 6

Διαστημικό αντικείμενο μάζας $m_1 = 4000 \text{ Kg}$, έρχεται από το διάστημα και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το δορυφόρο με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 8000 \text{ m/s}$ και αντίθετης κατεύθυνσης από την κατεύθυνση της ταχύτητας του δορυφόρου.

4.4. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος που θα δημιουργηθεί μετά την σύγκρουση. Να εξηγήσετε αν μετά τη σύγκρουση το συσσωμάτωμα θα παραμείνει ή όχι σε τροχιά σε ύψος h_1 από την επιφάνεια της Γης.

Μονάδες 6

Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$ και η επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση**4.1**

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά

$$\text{της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_\Gamma + h_1 = 4R_\Gamma$.

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Γης σε ένα σημείο της τροχιάς του δορυφόρου είναι :

$$V = -G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} V = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} \Leftrightarrow V = -\frac{g_0 R_\Gamma}{4}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } V = -\frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4} \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \Rightarrow V = -1,6 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

4.2

Η βαρυτική έλξη της Γης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη.

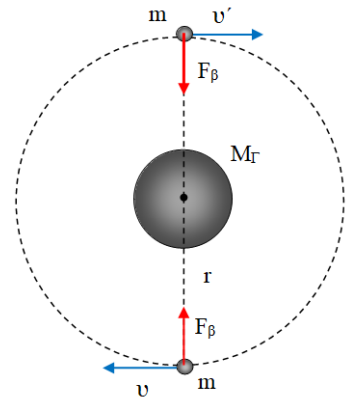
Ισχύει :

$$F_\beta = F_\kappa \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} = \frac{g_0 R_\Gamma}{4} \Leftrightarrow v = \frac{1}{2} \sqrt{g_0 R_\Gamma}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } v = \frac{1}{2} \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η περίοδος T της ομαλής κυκλικής κίνησης του δορυφόρου είναι :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^3} \text{ s} = 1,28\pi \cdot 10^4 \text{ s}.$$



4.3

Σε χρονική διάρκεια μισής περιόδου ο δορυφόρος διαγράφει ημικύκλιο, άρα η τελική και η αρχική ταχύτητα είναι αντίρροπες. Το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου είναι σταθερό : $u' = u = \text{σταθερό}$. Θεωρώντας θετική τη φορά της τελικής ταχύτητας, η αλγεβρική μεταβολή της ορμής είναι :

$$\Delta p = p' - p = mu - (-mu) = 2mu \Rightarrow \Delta p = 2 \cdot (2 \cdot 10^3 \text{ Kg}) \cdot \left(4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Άρα, η μεταβολή της ορμής $\vec{\Delta p}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την τελική ταχύτητα $\vec{u}'$ και μέτρο

$$|\Delta p| = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας $\vec{u}$ του δορυφόρου και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$p_{\text{ολ}(\text{πριν})} = p_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow mu - m_1 u_1 = (m + m_1)V \Leftrightarrow V = \frac{mu - m_1 u_1}{m + m_1}.$$

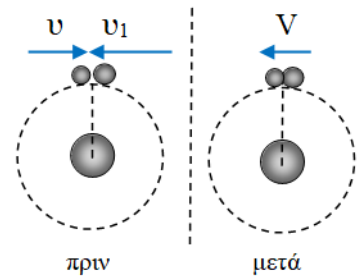
Με αντικατάσταση :

$$V = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = -\frac{24 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} = -4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Η ταχύτητα $\vec{V}$ του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι εφαπτόμενη στην τροχιά του δορυφόρου και το μέτρο της είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου $(|V| = u = 4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}})$, αλλά έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα $\vec{u}$ του δορυφόρου.

Σύμφωνα με τη σχέση $u = \sqrt{G \frac{M_\Gamma}{r}}$, το μέτρο της ταχύτητας ενός δορυφόρου εξαρτάται μόνο από την απόστασή του από το κέντρο της Γης.

Άρα το συσσωμάτωμα θα συνεχίσει να κινείται στην τροχιά του δορυφόρου αλλά με αντίθετη φορά περιστροφής.



Σχόλια :

- 1) Στο ερώτημα 4.3 δεν διευκρινίζεται αν ζητείται η διανυσματική μεταβολή της ορμής ή το μέτρο της μεταβολής της ορμής.
- 2) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .
Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

25. (16740)

Η Ιώ και η Ευρώπη είναι τα δύο πιο κοντινά φεγγάρια του πλανήτη Δία. Η Ιώ περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R_I = 432 \cdot 10^3 \text{ km}$ γύρω από τον Δία σε 1,57 ημέρες. Αντίστοιχα, η ακτίνα περιστροφής της Ευρώπης γύρω από τον Δία, είναι $R_E = 675 \cdot 10^3 \text{ km}$. Δίνεται $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Kg} \cdot \text{s}^2}$.

Να υπολογίσετε:

4.1. Την ταχύτητα περιστροφής της Ιούς γύρω από τον Δία.

Μονάδες 6

4.2. Την μάζα του πλανήτη Δία.

Μονάδες 6

4.3. Την περίοδο περιστροφής της Ευρώπης γύρω από τον Δία.

Μονάδες 6

4.4. Την ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Ιούς, αν η ακτίνα της είναι $r_I = 1800 \text{ km}$ και η μάζα της $m_I = 9 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Δίνεται $\sqrt{6,67} = 2,58$.

Μονάδες 7

Απάντηση

4.1

Η Ιώ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το κέντρο του Δία.

Η περίοδος περιφοράς της Ιούς είναι :

$$T_I = 1,57 \text{ ημ.} = 1,57 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 135.648 \text{ s.}$$

Το μέτρο της ταχύτητας περιφοράς της Ιούς δίνεται από τη σχέση :

$$v_I = \frac{2\pi R_I}{T_I}. \quad (1)$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_I = \frac{2\pi \cdot 432 \cdot 10^6 \text{ m}}{135.648 \text{ s}} \cong 2 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Έστω M η μάζα του Δία.

Η βαρυτική έλξη του Δία στην Ιώ είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F_I = F_k \Leftrightarrow G \frac{Mm_I}{R_I^2} = m_I \frac{v_I^2}{R_I} \Leftrightarrow GM = R_I v_I^2. \quad (2)$$

$$\text{Από τη σχέση (1) προκύπτει : } M = \frac{R_I v_I^2}{G} \Rightarrow M = \frac{432 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^8}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ Kg} \cong 2,59 \cdot 10^{27} \text{ Kg}.$$

4.3

$$\text{Για το μέτρο της ταχύτητας } v_E \text{ και την περίοδο } T_E \text{ περιφοράς της Ευρώπης ισχύει : } v_E = \frac{2\pi R_E}{T_E}. \quad (3)$$

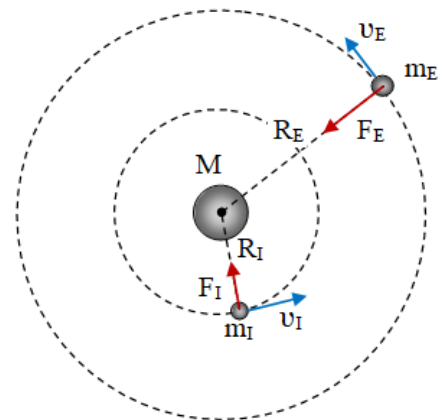
Η βαρυτική έλξη του Δία στην Ευρώπη είναι η κεντρομόλος δύναμη. Ισχύει :

$$F_E = F_k' \Leftrightarrow G \frac{Mm_E}{R_E^2} = m_E \frac{v_E^2}{R_E} \Leftrightarrow GM = R_E v_E^2. \quad (4)$$

Εξισώνουμε τα 2α μέλη των σχέσεων (2), (4) :

$$R_E v_E^2 = R_I v_I^2 \Leftrightarrow v_E^2 = v_I^2 \frac{R_I}{R_E} \Leftrightarrow v_E = v_I \sqrt{\frac{R_I}{R_E}} \Rightarrow v_E = v_I \sqrt{\frac{432 \cdot 10^6}{675 \cdot 10^6}} = v_I \sqrt{0,64} \Rightarrow v_E = 0,8 v_I$$

$$\xrightarrow{(1),(3)} \frac{2\pi R_E}{T_E} = 0,8 \cdot \frac{2\pi R_I}{T_I} \Leftrightarrow T_E = 1,25 T_I \frac{R_E}{R_I}.$$



Με αντικατάσταση : $T_E = 1,25 \cdot 1,57 \cdot 1,5625 \text{ ημ.} \cong 3,066 \text{ ημέρες}$ (ή $T_E \cong 2,65 \cdot 10^5 \text{ s}$).

4.4

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας του Δία, στο πιο απομακρυσμένο σημείο Α της επιφάνειας της Ιούς, υπολογίζεται από τη σχέση :

$$V_{A(\Delta)} = -G \frac{M}{R_I + r_I} \quad (1)$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Ιούς στο σημείο Α υπολογίζεται από τη σχέση :

$$V_{A(I)} = -G \frac{m_I}{r_I} \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) :

$$\frac{V_{A(\Delta)}}{V_{A(I)}} = \frac{M}{m_I} \cdot \frac{r_I}{R_I + r_I} \cong \frac{2,59 \cdot 10^{27}}{9 \cdot 10^{22}} \cdot \frac{1800}{433,8 \cdot 10^3} \cong 1,194 \cdot 10^2 \quad \text{ή} \quad V_{A(\Delta)} \cong 119,4 \cdot V_{A(I)}.$$

Δηλαδή, στο πιο απομακρυσμένο από τον Δία σημείο Α της επιφάνειας της Ιούς, το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας του Δία είναι (περίπου) 120–πλάσιο από το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Ιούς.

Επομένως, για να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής ενός σώματος από την επιφάνεια της Ιούς, πρέπει να ληφθεί οπωσδήποτε υπ' όψη και το πεδίο βαρύτητας του Δία.

Όμως, το αποτέλεσμα εξαρτάται από τη θέση του σημείου εκτόξευσης.

Άρα, δεν μπορεί να δοθεί μια ακριβής απάντηση στο ερώτημα 4.4.

Στη συνέχεια, δίνεται μια προσεγγιστική απάντηση για το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από το πιο απομακρυσμένο σημείο Α της επιφάνειας της Ιούς.

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας της Ιούς στο σημείο Α είναι :

$$V_{A(I)} = -G \frac{m_I}{r_I} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9 \cdot 10^{22}}{1,8 \cdot 10^6} \frac{\text{J}}{\text{Kg}} = -3,335 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας του Δία στο σημείο Α είναι :

$$V_{A(\Delta)} = -G \frac{M}{R_I + r_I} \cong -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2,59 \cdot 10^{27}}{4,338 \cdot 10^8} \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \cong -3,982 \cdot 10^8 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας Δία – Ιούς στο σημείο Α είναι :

$$V_A = V_{A(I)} + V_{A(\Delta)} \cong -(3,335 \cdot 10^6 + 398,2 \cdot 10^6) \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \cong -401,5 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \cong -4,015 \cdot 10^8 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}.$$

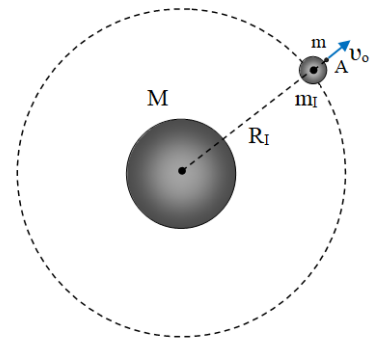
Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας για το σώμα στο σημείο Α (αμέσως μετά την εκτόξευση) και στο «άπειρο» :

$$K_A + U_A = K_\infty + U_\infty \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_\delta^2 + m V_A = 0 + 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_\delta^2 = -m V_A \Leftrightarrow v_\delta^2 = -2 V_A \Leftrightarrow v_\delta = \sqrt{-2 V_A}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_\delta \cong \sqrt{-2(-4,015 \cdot 10^8)} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{8,03 \cdot 10^8} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad v_\delta \cong 2,83 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Σημείωση

Η ταχύτητα διαφυγής που υπολογίσαμε είναι (περίπου) 11–πλάσια από την ταχύτητα που δίνεται στην απάντηση της τράπεζας θεμάτων $\left(v_\delta' \cong 2,58 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$, γεγονός που επιβεβαιώνει την ισχυρότατη επίδραση του πεδίου βαρύτητας του Δία.



Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι ο Δίας θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα.
Η Ιώ και η Ευρώπη θεωρούνται ομογενείς σφαίρες.
Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.
- 2) Στο ερώτημα 4.4 πρέπει να ληφθεί υπ' όψη και το πεδίο βαρύτητας του Δία, αλλά η επίδρασή του εξαρτάται από τη θέση του σημείου εκτόξευσης.
Το ερώτημα δεν μπορεί να απαντηθεί με ακρίβεια, χωρίς επιπλέον δεδομένα.
- 3) Οι απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα απαιτούν πολύπλοκους υπολογισμούς οι οποίοι δεν είναι δυνατό να γίνουν στη διάρκεια της εξέτασης, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής συσκευής.

Συμπέρασμα : Το Θέμα 16740 είναι ακατάλληλο για τις ενδοσχολικές εξετάσεις.

26. (17065)

Δορυφόρος μάζας $M = 500 \text{ kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε ύψος $h = R_{\Gamma}$ πάνω από την επιφάνεια της Γης, με ταχύτητα μέτρου $u = 4000 \text{ m/s}$.

4.1. Ποια η περίοδος περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου;

Μονάδες 6

4.2. Ποια η μεταβολή της ορμής του δορυφόρου για χρόνο $t = \frac{T}{2}$;

Μονάδες 6

4.3. Ποια η μεταβολή στο μέτρο της ορμής του δορυφόρου για χρόνο $t = \frac{T}{4}$;

Μονάδες 6

4.4. Πόση ενέργεια πρέπει να προσφερθεί στο δορυφόρο ώστε να μπορεί να περιστρέφεται σε ύψος $h' = 5R_{\Gamma}$;

Μονάδες 7

Δίνονται: η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$, η ακτίνα της Γης $R_{\Gamma} = 6400 \text{ km}$.

Απάντηση

4.1

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_{\Gamma} + h = 2R_{\Gamma}$ γύρω από το κέντρο της Γης με ταχύτητα σταθερού μέτρου u .

Ισχύει :

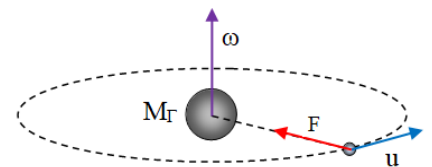
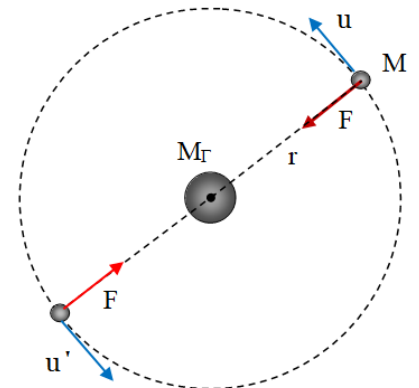
$$u = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{u}.$$

Με αντικατάσταση : $T = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4 \cdot 10^3} \text{ s} \Rightarrow T = 6,4\pi \cdot 10^3 \text{ s}.$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δορυφόρου είναι :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6,4\pi \cdot 10^3} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 3,125 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο της κυκλικής τροχιάς (δηλαδή το κέντρο της Γης), διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και φορά που καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



4.2

Σε χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2}$ ο δορυφόρος διαγράφει ημικύκλιο, άρα η τελική ταχύτητα $\vec{u}'$ είναι αντίρροπη της αρχικής.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της $\vec{u}'$ και υπολογίζουμε τη μεταβολή της ορμής αλγεβρικά :

$$\Delta p = p' - (-p) = p' + p = Mu + Mu = 2Mu.$$

Με αντικατάσταση : $\Delta p = 2 \cdot (5 \cdot 10^2 \text{ Kg}) \cdot \left(4 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 4 \cdot 10^6 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Το διάνυσμα της μεταβολής της ορμής $\vec{\Delta p}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με την τελική ταχύτητα $\vec{u}'$.

4.3

Το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου είναι σταθερό, άρα η μεταβολή του μέτρου της ορμής (για οποιαδήποτε χρονική διάρκεια) είναι μηδενική : $\Delta |p| = |p'| - |p| = Mu - Mu = 0.$

4.4

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_o = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_o R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Ο δορυφόρος διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας r . Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη. Ισχύει :

$$F = F_k \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma M}{r^2} = M \frac{u^2}{r} \Leftrightarrow Mu^2 = G \frac{M_\Gamma M}{r} \Leftrightarrow K = \frac{1}{2} Mu^2 = G \frac{M_\Gamma M}{2r}. \quad (2) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Η κινητική ενέργεια} \\ \text{του δορυφόρου} \end{array} \right]$$

Η ολική ενέργεια του δορυφόρου είναι :

$$E = K + U \xrightarrow{(2)} E = \frac{GM_\Gamma M}{2r} - \frac{GM_\Gamma M}{r} \Leftrightarrow E = -\frac{GM_\Gamma M}{2r} \xrightarrow{(1)} E = -\frac{Mg_o R_\Gamma^2}{2r}. \quad (3)$$

$$\text{Για } r = 2R_\Gamma \xrightarrow{(3)} E = -\frac{Mg_o R_\Gamma^2}{2 \cdot 2R_\Gamma} \Leftrightarrow E = -\frac{Mg_o R_\Gamma}{4}. \quad (4)$$

$$\text{Για } r' = 6R_\Gamma \xrightarrow{(3)} E' = -\frac{Mg_o R_\Gamma^2}{2 \cdot 6R_\Gamma} \Leftrightarrow E' = -\frac{Mg_o R_\Gamma}{12}. \quad (5)$$

Η ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί στον δορυφόρο ώστε από την τροχιά ακτίνας $r = 2R_\Gamma$ να κινείται σε τροχιά ακτίνας $r' = 6R_\Gamma$, είναι :

$$\Delta E = E' - E \xrightarrow{(4),(5)} \Delta E = -\frac{Mg_o R_\Gamma}{12} + \frac{Mg_o R_\Gamma}{4} \Leftrightarrow \Delta E = \frac{Mg_o R_\Gamma}{6}.$$

Με αντικατάσταση :

$$\Delta E = \frac{5 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{6} \text{ J} = \frac{16}{3} \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

2) Στο ερώτημα 4.1 η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητείται μόνο το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ή και η κατεύθυνσή της.

3) Στο ερώτημα 4.2 η εκφώνηση δεν διευκρινίζει αν ζητείται μόνο το μέτρο της μεταβολής της ορμής ή και η κατεύθυνσή της.

4) Στα ερωτήματα 4.2, 4.3 χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο t για δύο διαφορετικά χρονικά διαστήματα.

27. (18060) Δορυφόρος μάζας $M = 300 \text{ kg}$ μπορεί να εκτελεί κυκλική τροχιά σε διάφορα ύψη πάνω από την επιφάνεια της Γης, το μεγαλύτερο από τα οποία είναι $h_1 = 2R_\Gamma$ και το μικρότερο $h_2 = R_\Gamma$.

4.1. Ποια είναι η ταχύτητα του δορυφόρου όταν εκτελεί κυκλική τροχιά σε ύψος h_1 από την επιφάνεια της Γης;

Μονάδες 6

4.2. Ποιο το έργο της βαρυτικής δύναμης του πεδίου κατά την αλλαγή της τροχιάς του δορυφόρου, από ύψος h_1 σε ύψος h_2 από την επιφάνεια της Γης;

Μονάδες 6

4.3. Αν ο δορυφόρος συνέχιζε να περιστρέφεται στο ύψος h_1 , να υπολογίσετε την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί σε τμήμα του δορυφόρου μάζας $m_2 = 100 \text{ kg}$, ώστε μόλις να φτάσει στο άπειρο.

Μονάδες 6

4.4. Αν το υπόλοιπο τμήμα του δορυφόρου εξακολουθεί να κινείται σε κυκλική τροχιά στο ύψος h_1 , με τις δικές του μηχανές, ποια η ολική μηχανική ενέργεια του δορυφόρου μετά την αποχώρηση της μάζας m_2 ;

Μονάδες 7

Θεωρείστε αμελητέα την ελκτική δύναμη μεταξύ δορυφόρου και της μάζας m_2 . Δίνονται: η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$, η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 6400 \text{ km}$, $\sqrt{21,33} = 4,62$.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά

$$\text{της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Αρχικά, ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r_1 = R_\Gamma + h_1 = 3R_\Gamma$.

Η βαρυτική έλξη της Γης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει:

$$F_1 = F_k \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma M}{r_1^2} = M \frac{v_1^2}{r_1} \Leftrightarrow v_1^2 = G \frac{M_\Gamma}{r_1} \xrightarrow{(1)} v_1^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{3R_\Gamma} = \frac{g_0 R_\Gamma}{3} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{3}}. \quad (2)$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } v_1 = \sqrt{\frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{3}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά τη μετακίνηση του δορυφόρου από την αρχική τροχιά ακτίνας $r_1 = 3R_\Gamma$ στην τελική τροχιά ακτίνας $r_2 = 2R_\Gamma$, είναι:

$$W_\beta = U_1 - U_2 = -\frac{GM_\Gamma M}{3R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma M}{2R_\Gamma} = \frac{GM_\Gamma M}{6R_\Gamma} \xrightarrow{(1)} W_\beta = \frac{Mg_0 R_\Gamma^2}{6R_\Gamma} \Leftrightarrow W_\beta = \frac{Mg_0 R_\Gamma}{6}.$$

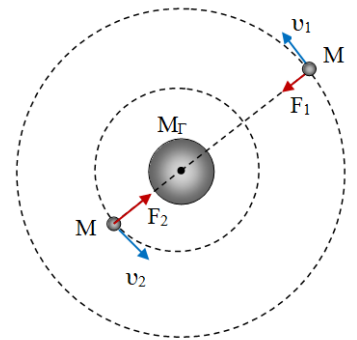
Με αντικατάσταση:

$$W_\beta = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{6} \text{ J} = 3,2 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

4.3

Το τμήμα μάζας m_2 περιφέρεται αρχικά σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_1 με ταχύτητα μέτρου

$$v_1 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ και τη στιγμή που βγαίνει από το πεδίο βαρύτητας της Γης έχει μηδενική ταχύτητα.}$$



Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια που προσφέρθηκε στο τμήμα αυτό, είναι :

$$E_{\min} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} = (K_{\infty} + U_{\infty}) - (K_2 + U_2) = (0 + 0) - \left(\frac{1}{2} m_2 v_1^2 - \frac{GM_{\Gamma} m_2}{3R_{\Gamma}} \right) = m_2 \left(\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{3R_{\Gamma}} - \frac{v_1^2}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$E_{\min} = m_2 \left(\frac{g_0 R_{\Gamma}}{3} - \frac{v_1^2}{2} \right).$$

Με αντικατάσταση : $E_{\min} = 100 \cdot \left(\frac{64}{3} \cdot 10^6 - \frac{64}{6} \cdot 10^6 \right) \text{J} = \frac{32}{3} \cdot 10^8 \text{J}.$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της $E_{\min}$

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια που προσφέρθηκε στο τμήμα αυτό, είναι :

$$E_{\min} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} = (K_{\infty} + U_{\infty}) - (K_2 + U_2) = (0 + 0) - \left(\frac{1}{2} m_2 v_1^2 - \frac{GM_{\Gamma} m_2}{3R_{\Gamma}} \right) \xrightarrow{(2)} E_{\min} = m_2 \left(\frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{3R_{\Gamma}} - \frac{g_0 R_{\Gamma}}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow E_{\min} = \frac{m_2 g_0 R_{\Gamma}}{6}.$$

Με αντικατάσταση : $E_{\min} = \frac{100 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{6} \text{J} = \frac{32}{3} \cdot 10^8 \text{J}.$

4.4

Το υπόλοιπο τμήμα του δορυφόρου έχει μάζα $m_1 = M - m_2 = 200 \text{ Kg}$ και περιφέρεται στην τροχιά

ακτίνας r_1 με ταχύτητα μέτρου $v_1 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

Η ολική ενέργεια του τμήματος είναι :

$$E_{\text{ολ}} = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{GM_{\Gamma} m_1}{3R_{\Gamma}} = m_1 \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{3R_{\Gamma}} \right) \Leftrightarrow E_{\text{ολ}} = m_1 \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{g_0 R_{\Gamma}}{3} \right).$$

Με αντικατάσταση : $E_{\text{ολ}} = 200 \cdot \left(\frac{64}{6} \cdot 10^6 - \frac{64}{3} \cdot 10^6 \right) \text{J} = -\frac{64}{3} \cdot 10^8 \text{J}.$

Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της $E_{\text{ολ}}$

Η ολική ενέργεια του τμήματος είναι :

$$E_{\text{ολ}} = K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{GM_{\Gamma} m_1}{3R_{\Gamma}} = m_1 \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{g_0 R_{\Gamma}^2}{3R_{\Gamma}} \right) \xrightarrow{(2)} E_{\text{ολ}} = m_1 \left(\frac{g_0 R_{\Gamma}}{6} - \frac{g_0 R_{\Gamma}}{3} \right) \Leftrightarrow E_{\text{ολ}} = -\frac{m_1 g_0 R_{\Gamma}}{6}.$$

Με αντικατάσταση : $E_{\text{ολ}} = -\frac{200 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{6} \text{J} = -\frac{64}{3} \cdot 10^8 \text{J}.$

Σχόλιο : Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_{Γ} .
Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

28. (20661) Ένας δορυφόρος Α, μάζας $m_1 = 300\text{Kg}$, κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη σε ύψος $h = R_\Gamma$ από την επιφάνειά της, όπου R_Γ , η ακτίνα της Γης.

Να υπολογίσετε:

4.1. τη δυναμική ενέργεια του συστήματος Γη-δορυφόρος Α.

Μονάδες 5

4.2. το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω , με την οποία περιστρέφεται ο δορυφόρος Α γύρω από τη Γη.

Μονάδες 6

4.3. Την ελάχιστη ενέργεια η οποία πρέπει να δοθεί σε ένα σώμα Γ, μάζας $m = 2\text{Kg}$, που βρίσκεται μέσα στο δορυφόρο Α, προκειμένου να εγκαταλείψει το δορυφόρο Α και να φτάσει σε άπειρη απόσταση από τη Γη.

Μονάδες 7

Ένας άλλος δορυφόρος Β, μάζας $m_2 = 100\text{Kg}$, κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη με αυτήν που κινείται ο δορυφόρος Α, αλλά με αντίθετη φορά. Κάποια στιγμή οι δύο δορυφόροι Α και Β συγκρούονται πλαστικά.

4.4. Να υπολογίσετε το ποσοστό % της αρχικής ενέργειας του συστήματος των δύο δορυφόρων Α και Β που χάνεται κατά την κρούση.

Μονάδες 7

Δίνονται: η ακτίνα της Γης $R_\Gamma = 64 \cdot 10^5 \text{ m}$ και η επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς δίνεται $\sqrt{2} = 1,4$.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά

$$\text{της, ισχύει: } g_0 = G \frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Leftrightarrow GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2. \quad (1)$$

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = R_\Gamma + h = 2R_\Gamma$.

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος Γη – δορυφόρος Α είναι :

$$U = -G \frac{M_\Gamma m_1}{r} \xrightarrow{(1)} U = -\frac{m_1 g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow U = -\frac{m_1 g_0 R_\Gamma}{2}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } U = -\frac{300 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{2} \text{ J} \Rightarrow U = -9,6 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

4.2

Η βαρυτική έλξη της Γης στον δορυφόρο είναι η κεντρομόλος δύναμη.

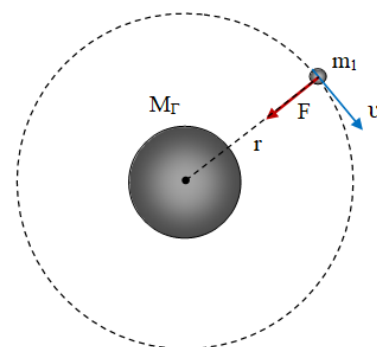
Ισχύει :

$$F_\beta = F_\kappa \Leftrightarrow G \frac{M_\Gamma m_1}{r^2} = m_1 \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = G \frac{M_\Gamma}{r} \xrightarrow{(1)} v^2 = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{2R_\Gamma} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση: } v = \sqrt{\frac{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad [\text{Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας}]$$

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δορυφόρου είναι :

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{2R_\Gamma} \Rightarrow \omega = \frac{4\sqrt{2} \cdot 10^3}{2 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cong \frac{2 \cdot 1,4 \cdot 10^3}{6,4 \cdot 10^6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega \cong 4,375 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



4.3

Το σώμα κινείται μαζί με τον δορυφόρο Α με ταχύτητα μέτρου $v = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma}{2}}$. (2)

Η αρχική μηχανική ενέργεια του σώματος είναι :

$$E_{\mu(\alpha\rho\chi)} = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\Gamma m}{r} \xrightarrow{(1),(2)} E_{\mu(\alpha\rho\chi)} = \frac{1}{2}m \frac{g_0 R_\Gamma}{2} - \frac{mg_0 R_\Gamma}{2} \Rightarrow E_{\mu(\alpha\rho\chi)} = -\frac{mg_0 R_\Gamma}{4}. \quad (3)$$

Η τελική μηχανική ενέργεια του σώματος είναι :

$$E_{\mu(\tau\epsilon\lambda)} = K_\infty + U_\infty = K_\infty.$$

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί στο σώμα ώστε να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας, είναι :

$$E_{\alpha\pi} = E_{\mu(\tau\epsilon\lambda)} - E_{\mu(\alpha\rho\chi)} = K_\infty - E_{\mu(\alpha\rho\chi)}.$$

Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί στο σώμα ώστε να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας, είναι τόση ώστε το σώμα να βγει από το πεδίο βαρύτητας με μηδενική κινητική ενέργεια ($K_\infty = 0$).

Επομένως :

$$E_{\alpha\pi(\min)} = -E_{\mu(\alpha\rho\chi)} \xrightarrow{(3)} E_{\alpha\pi(\min)} = \frac{mg_0 R_\Gamma}{4}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } E_{\alpha\pi(\min)} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4} \text{ J} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

4.4

Οι δύο δορυφόροι κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά με ταχύτητα ίσου μέτρου $v = 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

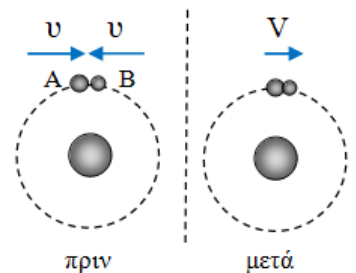
Αφού η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι ασήμαντη, μπορούμε να δεχθούμε ότι η ορμή του συστήματος δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκειά της.

Ορίζουμε σαν θετική τη φορά της ταχύτητας του δορυφόρου Α και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ αλγεβρικά :

$$P_{\text{ολ}(\text{πριν})} = P_{\text{ολ}(\text{μετά})} \Leftrightarrow m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2) V \Leftrightarrow V = \frac{(m_1 - m_2) v}{m_1 + m_2}.$$

Με αντικατάσταση :

$$V = \frac{(300 - 100) \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{300 + 100} = \frac{200 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{400} = 2\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Το ποσοστό ελάττωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης, είναι :

$$\Pi(\%) = \frac{K_{\text{ολ}(\text{πριν})} - K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{K_{\text{ολ}(\text{μετά})}}{K_{\text{ολ}(\text{πριν})}} \right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2}{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2} \right) \cdot 100\% = \left[1 - \left(\frac{V}{v} \right)^2 \right] \cdot 100\%.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } \Pi(\%) = \left[1 - \left(\frac{2\sqrt{2} \cdot 10^3}{4\sqrt{2} \cdot 10^3} \right)^2 \right] \cdot 100\% = \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdot 100\% = 75\%.$$

Σχόλια :

1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ακίνητη ομογενής σφαίρα μάζας M_Γ .

Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

2) Στο ερώτημα 4.4 η εκφώνηση έπρεπε να ζητά **το ποσοστό ελάττωσης της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο δορυφόρων λόγω της κρούσης.**

Η ενέργεια δεν χάνεται αλλά μετατρέπεται σε άλλες μορφές ενέργειας (θερμική, ηχητική, φωτεινή).

29. (21602)

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα διαστημικό όχημα που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης, πυροδοτείται και αρχίζει να κινείται κατακόρυφα με σταθερή επιτάχυνση a με μηδενική αρχική ταχύτητα. Κάποια χρονική στιγμή t τα καύσιμα του τελειώνουν και βρίσκεται σε ύψος $h = 6400 \text{ Km}$ από την επιφάνεια της Γης. Εκεί έχει αποκτήσει την ελάχιστη απαιτούμενη ταχύτητα (ταχύτητα διαφυγής) για να εγκαταλείψει στη συνέχεια το γήινο βαρυτικό πεδίο.

Να υπολογίσετε:

4.1. Την ταχύτητα του διαστημικού οχήματος v στο ύψος h .

Μονάδες 7

4.2. Το χρόνο t της κίνησής του έως τη θέση σε ύψος h .

Μονάδες 5

Αν στο ύψος αυτό εκτελεί κυκλική τροχιά ένας δορυφόρος Δ ο οποίος τη στιγμή της εκτόξευσης βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη θέση να υπολογίσετε:

4.3. Την ταχύτητα v περιστροφής του δορυφόρου.

Μονάδες 5

4.4. Την περίοδο T του δορυφόρου και την πιθανότητα να συγκρουστεί με το διαστημόπλοιο.

Μονάδες 8

Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης $g_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, η ακτίνα της Γης $R = 6400 \text{ Km}$. Επίσης δίνεται ότι το γινόμενο $GM = g_0 R^2$ όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και M είναι η μάζα της Γης.

Η γη θεωρείται ακίνητη και η αντίσταση του αέρα αμελητέα.

Απάντηση

4.1

Για το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας της Γης στην επιφάνειά της, ισχύει :

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} \Leftrightarrow GM = g_0 R^2. \quad (1) \quad [M : \text{η μάζα της Γης}, R : \text{η ακτίνα της Γης}]$$

Το μέτρο της ταχύτητας του οχήματος τη στιγμή που βρίσκεται σε ύψος $h = R = 6400 \text{ Km}$ είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας διαφυγής από αυτό το ύψος :

$$v_1 = v_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \xrightarrow{(1)} v_1 = \sqrt{\frac{2g_0 R^2}{2R}} \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{g_0 R}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_1 = \sqrt{10 \cdot 64 \cdot 10^5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{64 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.2

Από τη στιγμή $t_0 = 0$ της εκτόξευσης μέχρι τη στιγμή t που βρίσκεται σε ύψος h , το όχημα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή επιτάχυνση μέτρου a .

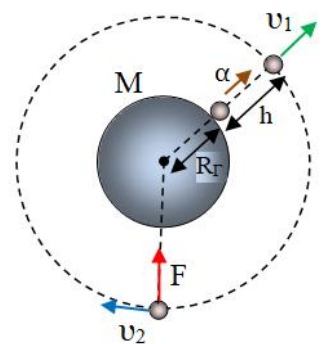
Ισχύουν οι σχέσεις :

$$a = \frac{v_1}{t}, \quad (2) \quad h = \frac{1}{2} a t^2. \quad (3)$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (2), (3) προκύπτει :

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_1}{t} t^2 \Leftrightarrow h = \frac{v_1 t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{2h}{v_1}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } t = \frac{2 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^3} \text{ s} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ s} = 1600 \text{ s}.$$



4.3

Ο δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r=R+h=2R$.

Η βαρυτική έλξη της Γης είναι η κεντρομόλος δύναμη.

Ισχύει :

$$F_{\beta}=F_{\kappa} \Leftrightarrow G \frac{Mm}{r^2}=m \frac{v_2^2}{r} \Leftrightarrow v_2^2=G \frac{M}{r} \xrightarrow{(1)} v_2^2=\frac{g_0 R^2}{2R} \Leftrightarrow v_2=\sqrt{\frac{g_0 R}{2}}.$$

$$\text{Με αντικατάσταση : } v_2=\sqrt{\frac{10 \cdot 64 \cdot 10^5}{2}} \frac{\text{m}}{\text{s}}=\sqrt{32 \cdot 10^6} \frac{\text{m}}{\text{s}}=4\sqrt{2} \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4.4

Η περίοδος T της ομαλής κυκλικής κίνησης του δορυφόρου είναι :

$$T=\frac{2\pi r}{v_2}=\frac{2\pi \cdot 2 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{4\sqrt{2} \cdot 10^3} \text{s}=3,2\sqrt{2}\pi \cdot 10^3 \text{s} \quad \text{ή} \quad T=3200\sqrt{2}\pi \text{s}.$$

Το όχημα χρειάζεται χρόνο $t_1 = 1600 \text{ s}$ για να φτάσει στο ύψος h της τροχιάς του δορυφόρου.

Ο δορυφόρος χρειάζεται χρόνο $t_2 = T = 3200\sqrt{2}\pi \text{ s}$ για να ολοκληρώσει μία περιφορά και να βρεθεί στην ίδια κατακόρυφο με το όχημα.

Αφού $t_1 < t_2$, το όχημα θα φτάσει στο ύψος h πριν προλάβει ο δορυφόρος να κάνει μία περιφορά, άρα δεν υπάρχει πιθανότητα να συγκρουστούν τα δύο σώματα.

Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση χρησιμοποιεί το ίδιο σύμβολο v για τις ταχύτητες του οχήματος και του δορυφόρου.
- 2) Στο ερώτημα 4.4 η διατύπωση «να υπολογίσετε . . . την πιθανότητα να συγκρουστεί (ο δορυφόρος) με το διαστημόπλοιο» δεν έχει νόημα.
Μία καλύτερη διατύπωση είναι : «να εξετάσετε αν είναι πιθανό να συγκρουστεί ο δορυφόρος με το διαστημόπλοιο».
- 3) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι η Γη θεωρείται ομογενής σφαίρα.
Η επίδραση των υπολοίπων ουρανίων σωμάτων δεν λαμβάνεται υπ' όψη.

30. (21697) Οι αστέρες νετρονίων είναι το αποτέλεσμα της βαρυτικής κατάρρευσης τεράστιων αστερών, συνήθως στο τέλος της ζωής τους. Εκτός από τις μαύρες τρύπες, είναι τα πιο πυκνά ουράνια σώματα του Σύμπαντος. Περιστρέφονται πάρα πολύ γρήγορα. Ένας από τους πιο ενδιαφέροντες αστέρες νετρονίων είναι ο PSR J1748-2446ad, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με συχνότητα περίπου 700 Hz . Η ακτίνα του είναι περίπου 10 km , ενώ η μάζα του M είναι τέτοια ώστε $GM = 2 \times 10^{20} \text{ Nm}^2/\text{kg}$ (είναι περίπου μιάμιση φορά μεγαλύτερη από τη μάζα του Ήλιου).

4.1. Υπολογίστε τη γραμμική ταχύτητα που θα είχε ένα αντικείμενο το οποίο θα τοποθετούσαμε και θα αφήναμε ακίνητο στον ισημερινό της επιφάνειας του αστέρα νετρονίων, μόνο λόγω της περιστροφής του αστέρα γύρω από τον άξονά του.

Μονάδες 6

4.2. Υπολογίστε την κεντρομόλο επιτάχυνση που θα έπρεπε να έχει το αντικείμενο του ερωτήματος 4.1 λόγω της περιστροφής του αστέρα γύρω από τον άξονά του, και αναφέρετε την κατεύθυνσή της. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση $\pi^2 \cong 10$.

Μονάδες 6

4.3. Υπολογίστε την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων, και συγκρίνετέ την με την αντίστοιχη της Γης.

Μονάδες 7

4.4. Στην πραγματικότητα δεν θα ήταν δυνατό να τοποθετήσουμε ένα αντικείμενο στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων (λόγω της υπερβολικά ισχυρής βαρυτικής έλξης και των ακτινοβολιών), αλλά θα μπορούσαμε να το αφήσουμε χωρίς αρχική ταχύτητα από πάρα πολύ μεγάλη απόσταση, ώστε να κινηθεί μόνο υπό την επίδραση της βαρυτικής έλξης του αστέρα νετρονίων και να φτάσει έτσι στην επιφάνειά του. Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία θα φτάσει το αντικείμενο στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων.

Μονάδες 6

Υπενθυμίζεται πως η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι περίπου ίση με 10 m/s^2 .

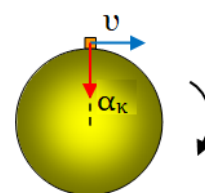
Απάντηση

4.1

Εφ' όσον το αντικείμενο είναι ακίνητο ως προς την επιφάνεια του αστέρα, θα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με συχνότητα περιστροφής f , σε κύκλο ακτίνας R .

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του αντικειμένου είναι :

$$v = 2\pi Rf = 2\pi \cdot (10^4 \text{ m}) \cdot (7 \cdot 10^2 \text{ Hz}) \Rightarrow v = 14\pi \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\text{περίπου } 4,4 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right).$$



4.2

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του αντικειμένου είναι :

$$\alpha_k = \frac{v^2}{R} = \frac{(14\pi \cdot 10^6)^2}{10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{196\pi^2 \cdot 10^{12}}{10^4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cong 1,96 \cdot 10^{11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει τη διεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς (δηλαδή της ακτίνας του αστέρα) και φορά προς το κέντρο του.

4.3

Το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια ενός ομογενούς σφαιρικού αστέρα μάζας M και ακτίνας R είναι :

$$g_A = G \frac{M}{R^2} \Rightarrow g_A = \frac{2 \cdot 10^{20}}{10^8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow g_A = 2 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Υπολογίζουμε το πηλίκο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια του αστέρα προς την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης :

$$\frac{g_A}{g_\Gamma} = \frac{2 \cdot 10^{12} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2 \cdot 10^{11}.$$

Δηλαδή, το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια του αστέρα είναι 200.000.000.000 φορές μεγαλύτερο από το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης

4.4

Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της Μηχανικής ενέργειας για το αντικείμενο όταν βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση («άπειρο») και όταν φτάσει την επιφάνεια του αστέρα :

$$K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} = K_{\infty} + U_{\infty} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{R} = 0 + 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G \frac{Mm}{R} \Leftrightarrow v^2 = \frac{2GM}{R} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Με αντικατάσταση :

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{20}}{10^4}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{4 \cdot 10^{16}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Παρατήρηση

Το μέτρο της ταχύτητας του αντικειμένου (όπως υπολογίστηκε με βάση την κλασσική Φυσική) είναι συγκρίσιμο με το μέτρο της ταχύτητας του φωτός $\left(c \cong 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Η μέθοδος αυτή δεν είναι σωστή.

Για τον ακριβή υπολογισμό της ταχύτητας πρέπει να εφαρμόσουμε τις σχέσεις της θεωρίας της σχετικότητας.

Σχόλια :

- 1) Η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι ο αστέρας θεωρείται ομογενής και σφαιρικός.
- 2) Κοντά σε ουράνια σώματα τεράστιας πυκνότητας (όπως οι μαύρες τρύπες και οι αστέρες νετρονίων) το πεδίο βαρύτητας είναι πολύ ισχυρό και δεν ισχύουν οι νόμοι της κλασσικής Φυσικής (ούτε ο νόμος της βαρύτητας) αλλά η θεωρία της γενικής σχετικότητας.
Επίσης, οι ταχύτητες που ζητούνται στα ερωτήματα 4.1, 4.4 είναι συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, επομένως για τον υπολογισμό τους απαιτείται η θεωρία της ειδικής σχετικότητας.

Συμπέρασμα : Η άσκηση δεν μπορεί να απαντηθεί σωστά με βάση τη Φυσική του Λυκείου και επομένως είναι ακατάλληλη για θέμα εξετάσεων.