

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με a, β, γ πραγματικούς αριθμούς και $a \neq 0$.

Για να λύσουμε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού (όπου $a \neq 0$, $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$ πλήρη μορφή) ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Βρίσκουμε την **Διακρίνουσα Δ** της εξίσωσης η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Για το αποτέλεσμα της Δ έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες πραγματικές και άνισες** οι οποίες δίνονται

από τον τύπο: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

β) Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία **διπλή πραγματική ρίζα** η οποία δίνεται από τον

τύπο: $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

γ) Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι **αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $\alpha \cdot \gamma < 0$, δηλαδή α, γ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει $\Delta > 0$, οπότε

έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ**Α. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ****ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1**

Να λυθούν οι εξισώσεις: **α)** $4x^2 - 2x = 0$

β) $4x^2 - 1 = 0$

γ) $2x^2 - x - 1 = 0$

δ) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

ε) $x^2 + x + 1 = 0$

• Αν σε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι $\gamma = 0$ (ελλιπή μορφή), τότε έχουμε

$$ax^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(ax + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } ax + \beta = 0 \stackrel{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x = -\frac{\beta}{a}$$

• Αν στην εξίσωση είναι $\beta = 0$ (ελλιπή μορφή), τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς x^2 .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Θα μπορούσαμε φυσικά στις παραπάνω περιπτώσεις να υπολογίσουμε τη Διακρίνουσα με $\beta=0$ και $\gamma=0$ αντίστοιχα.

- Αν σε μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού είναι $\Delta = 0$, τότε η παράσταση $ax^2 + \beta x + \gamma$ θα είναι τέλειο τετράγωνο.
- Αν μια εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού έχει ρίζα το 1 τότε γράφεται στη μορφή $(x-1)(ax-\gamma)$
- *Η απόδειξη για το τελευταίο αφήνεται ως άσκηση για τους μαθητές.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) 4x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ή } 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$$

$$\beta) 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}.$$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε την εξίσωση με διαφορά τετραγώνων

$$(2x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \text{ ή } 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma) \text{ Βρίσκουμε τη Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0.$$

$$\text{Άρα } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\delta) \text{ Βρίσκουμε τη Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 64 = 64 - 64 = 0, \text{ άρα η εξίσωση}$$

$$\text{έχει μια διπλή ρίζα } x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-8}{2 \cdot 16} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Θα μπορούσαμε επίσης να εφαρμόσουμε ταυτότητα

$$16x^2 - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow (4x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

$$\epsilon) \text{ Βρίσκουμε τη Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 = -3 < 0, \text{ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο } \mathbb{R}.$$

Σχολικό βιβλίο σελ 93, ασκήσεις 1, 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λυθεί η εξίσωση: $2x^2 - (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

ΛΥΣΗ

Α' Τρόπος (Με παραγοντοποίηση)

$$2x^2 - (2 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) + \sqrt{3}(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } 2x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Β' Τρόπος (Με διακρίνουσα)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2 - \sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{3}) = 4 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 8\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = (2 + \sqrt{3})^2$$

Άρα

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 - \sqrt{3} \pm \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})}{4} = \frac{2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

* Όταν διώχνουμε τετράγωνο με ρίζα δεν χρειάζεται απόλυτο διότι το $\pm$ που υπάρχει μπροστά από τη ρίζα καλύπτει και τις δύο περιπτώσεις του απολύτου.

Σχολικό βιβλίο σελ 94, άσκηση 8 και σελ 95, άσκηση 2 β' ομάδα.

Β.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

Παράδειγμα 1

Να λυθούν οι εξισώσεις: **α)** $x^2 - |x| - 2 = 0$ **β)** $(x-1)^2 - 5|x-1| - 6 = 0$

Σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού της μορφής $aA^2(x) + \beta|A(x)| + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ κάνουμε τα εξής:

Γράφουμε $A^2(x) = |A(x)|^2$ και τότε η εξίσωση γράφεται $a|A(x)|^2 + \beta|A(x)| + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Θέτουμε $|A(x)| = \omega > 0$ και η εξίσωση μετασχηματίζεται στη μορφή

$$a\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0, \alpha \neq 0.$$

Λύνουμε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού και βρίσκουμε τις τιμές του ω .

Επιλέγουμε τις τιμές του ω (αν υπάρχουν) που ικανοποιούν τον περιορισμό και αντικαθιστούμε στη σχέση $|A(x)| = \omega$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις τιμές του x .

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - |x| - 2 = 0$. Θέτουμε $|x| = \omega \geq 0$ και έχουμε $\omega^2 - \omega - 2 = 0$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4(-2) = 9 > 0.$$

$$\text{Άρα } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ \omega_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \text{ . Άρα } |x| = 2 \text{ ή } |x| = -1 \text{ (αδύνατο).}$$

$$\text{Άρα } |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

β) Η εξίσωση γράφεται $(x-1)^2 - 5|x-1| - 6 = 0$. Θέτουμε $|x-1| = \omega \geq 0$ και έχουμε $\omega^2 - 5\omega - 6 = 0$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4(-6) = 25 + 24 = 49 > 0.$$

$$\text{Άρα } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ \omega_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases} \text{ . Άρα } |x-1| = 6 \text{ ή } |x-1| = -1 \text{ (αδύνατο)}$$

$$\text{Άρα } |x-1| = 6 \Leftrightarrow x-1=6 \text{ ή } x-1=-6 \Leftrightarrow x=7 \text{ ή } x=-5.$$

Σχολικό βιβλίο σελ 94, ασκήσεις 11, 12.

Παράδειγμα 2

Να λυθούν οι εξισώσεις: **α)** $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$

β) $x^6 + 11x^3 + 24 = 0$

Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ λέγονται διτετράγωνες. Για να λύσουμε γενικά μια εξίσωση της μορφής $\alpha x^{2\nu} + \beta x^\nu + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ν φυσικός, κάνουμε τα εξής:

- Θέτουμε $x^\nu = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\alpha \omega^2 + \beta \omega + \gamma = 0$.
- Λύνουμε την δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση και βρίσκουμε τις τιμές του ω .
- Αντικαθιστούμε τις τιμές του ω (αν υπάρχουν) στη σχέση $x^\nu = \omega$ και βρίσκουμε τις τιμές του x .

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + 6\omega - 40 = 0$. Έχουμε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot (-40) = 36 + 160 = 196.$$

$$\text{Άρα } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{-6 \pm 14}{2} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ \omega_2 = \frac{-20}{2} = -10 \end{cases}.$$

Άρα $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ ή $x^2=-10$ (αδύνατη).

β) Θέτουμε $x^3=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + 11\omega + 24=0$. Έχουμε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 11^2 - 4 \cdot 24 = 121 - 96 = 25.$$

$$\text{Άρα } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-11 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-11 \pm 5}{2} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{-16}{2} = -8 \\ \omega_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-8} = -2 \text{ ή } x^3 = -3 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-3} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{3}.$$

Σχολικό βιβλίο σελ 94, άσκηση 15 και σελ 96 άσκηση 10.

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η εξίσωση: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$ **Σχολικό βιβλίο σελ 94, άσκηση 15.**

Συχνά σε τέτοιες ασκήσεις θέτουμε την παράσταση που επαναλαμβάνεται ίση με κάποια μεταβλητή, ώστε να προκύψει εξίσωση 2^{ου} βαθμού, την οποία και λύνουμε. Στη συνέχεια επιστρέφουμε στη σχέση που έχουμε κάνει αλλαγή της μεταβλητής και λύνοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν, βρίσκουμε τις τιμές του x.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\omega = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και η αρχική εξίσωση γίνεται: $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0.$$

$$\text{Άρα } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \omega_1 = 6 = 3 \\ \omega_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}.$$

Άρα έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Για $\omega = 2$, έχουμε $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Για $\omega = 3$, έχουμε $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$. Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 = 5$.

$$\text{Άρα } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Παράδειγμα 3 (Κλασματικές εξισώσεις)

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$. (Σχολικό βιβλίο σελ 94, άσκηση 14i).

ΛΥΣΗ

Ε.Κ.Π = $6x(x+1)$. Πρέπει $6x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq -1$.

$$6x(x+1) \cdot \frac{x}{x+1} + 6x(x+1) \cdot \frac{x+1}{x} = 6x(x+1) \cdot \frac{13}{6} \Leftrightarrow 6x^2 + 6(x+1)^2 = 13x(x+1) \Leftrightarrow$$

$$6x^2 + 6(x^2 + 2x + 1) = 13x^2 + 13x \Leftrightarrow 6x^2 + 6x^2 + 12x + 6 = 13x^2 + 13x \Leftrightarrow 12x^2 + 12x - 13x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0. \text{ Άρα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}.$$

(Σχολικό βιβλίο σελ 94, άσκηση 14ii).

Γ. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Παράδειγμα 1 (Επίλυση Παραμετρικής εξίσωσης)

Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$.

Για να λύσουμε μια παραμετρική εξίσωση βρίσκουμε την Διακρίνουσα Δ , θεωρώντας το x ως άγνωστο.

ΛΥΣΗ

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$$

$$\text{Άρα } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2}}{2} = \frac{-\alpha - \beta \pm (\alpha - \beta)}{2}.$$

$$\text{Άρα } x_1 = \frac{-\alpha - \beta + \alpha - \beta}{2} = \frac{-2\beta}{2} = -\beta \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{-\alpha - \beta - (\alpha - \beta)}{2} = \frac{-\alpha - \beta - \alpha + \beta}{2} = \frac{-2\alpha}{2} = -\alpha.$$

Σχολικό βιβλίο σελ 93, άσκηση 3, σελ 94, ασκήσεις 5, 9, σελ 95, ασκήσεις 1, 4, 5.

Παράδειγμα 2 (Εύρεση παραμέτρων)

Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού $\mu \in \mathbb{R}^*$, ώστε η εξίσωση

$\mu x^2 + 2x + \mu = 0$ να έχει διπλή ρίζα. **Σχολικό βιβλίο σελ 93, άσκηση 4.**

Όταν μας ζητείται η τιμή μιας παραμέτρου, ώστε να ισχύει μια προϋπόθεση, αξιοποιούμε την προϋπόθεση αυτή με βάση τη θεωρία και βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου.

ΛΥΣΗ

Εφόσον θέλουμε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, πρέπει $\Delta = 0$.

$$\text{Άρα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\mu \cdot \mu = 4 - 4\mu^2 = 4(1 - \mu^2).$$

$$\text{Άρα } 4(1 - \mu^2) = 0 \Leftrightarrow 1 - \mu^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = \pm 1$$

Σχολικό βιβλίο σελ 95, άσκηση 3.

Παράδειγμα 3 (Πλήθος ριζών εξίσωσης)

Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει $a \neq 0$, για κάθε λ . Διακρίνουμε περιπτώσεις:

αν $a = 0$ και βρίσκουμε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση 1^{ου} βαθμού,

στη συνέχεια αν $a \neq 0$, βρίσκουμε την διακρίνουσα και κάνουμε την γνωστή διερεύνηση από τη θεωρία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν και κατά την επίλυση μιας παραμετρικής εξίσωσης δεν είναι $a \neq 0$, τότε παίρνουμε ξεχωριστή περίπτωση για $a = 0$ και φυσικά διακρίνουσα για $a \neq 0$.

ΛΥΣΗ

- Για $a = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ η εξίσωση γίνεται

$$(3 - 3)x^2 + 2(3 - 1)x + 3 + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \text{ άρα έχει μοναδική λύση}$$

- Για $a \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [2(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 4(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - 9) = \\ &= 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda^2 + 9) = 4(-2\lambda + 10) = 8(5 - \lambda). \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8(5-\lambda) > 0 \Leftrightarrow 5-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 5$ και $\lambda \neq 3$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες

πραγματικές και άνισες

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 8(5-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$, η εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική ρίζα

Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 8(5-\lambda) < 0 \Leftrightarrow 5-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 5$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΤΥΠΟΙ ΝΙΕΤΑ

Έστω η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $a \neq 0$. Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

x_1, x_2 τότε για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}} \text{ και } \boxed{P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έχουμε $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Άρα

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} - \beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} P = x_1 x_2 &= \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta})(-\beta - \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = \frac{(-\beta)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \\ &= \frac{\beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}. \end{aligned}$$

Αν τώρα στην εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με α , τότε προκύπτει

$$\frac{ax^2}{\alpha} + \frac{\beta x}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0.$$

Άρα κάθε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες μετασχηματίζεται στην μορφή $x^2 - Sx + P = 0$.

Δ. ΤΥΠΟΙ VIETA

Παράδειγμα 1 (Υπολογισμός παραστάσεων με τη βοήθεια των τύπων Vieta)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$	β) $x_1 \cdot x_2$	γ) $x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2$	δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
ε) $x_1^2 + x_2^2$	στ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$	ζ) $x_1^3 + x_2^3$	η) $ x_1 - x_2 $

Για να υπολογίσουμε τιμές παραστάσεων με τη βοήθεια των τύπων Vieta κάνουμε τα εξής:

Ελέγχουμε πρώτα αν η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta \geq 0$) εκτός αν η εκφώνηση αναφέρει ότι η εξίσωση έχει ρίζες x_1, x_2 .

Στη συνέχεια κάνουμε πράξεις ή παραγοντοποιήσεις προκειμένου να προκύψουν οι τύποι Vieta.

Χρήσιμες ταυτότητες: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3P \cdot S$ ή

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = S(S^2 - 2P - P) = S(S^2 - 3P)$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες.

α) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-3}{1} = 3$

β) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$

γ) $x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = P \cdot S = 3$

δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = 3$

ε) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2 = 7$ στ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1 x_2)^2} \stackrel{(\varepsilon)}{=} \frac{7}{1} = 7$

ζ) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3P \cdot S = 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$

η) Υπολογίζουμε πρώτα το $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 7 - 2 = 5$. Άρα $|x_1 - x_2|^2 = 5 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{5}$, αφού $|x_1 - x_2| \geq 0$.

Παράδειγμα 2 (Εύρεση εξίσωσης 2^{ου} βαθμού όταν γνωρίζουμε τις ρίζες)

1. Να βρεθεί εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες: **α)** -2, 3 **β)** $\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x^2 - Sx + P = 0$ η ζητούμενη εξίσωση. Έχουμε $S = x_1 + x_2 = -2 + 3 = 1$ και $P = x_1 \cdot x_2 = -2 \cdot 3 = -6$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - x - 6 = 0$.

β) Έστω $x^2 - Sx + P = 0$ η ζητούμενη εξίσωση. Έχουμε $S = x_1 + x_2 = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}$ και

$P = x_1 \cdot x_2 = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}^2 - 1^2 = 1$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$.

Σχολικό βιβλίο σελ 94, άσκηση 6.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + 1 = 0$ (του Παραδείγματος 1) με ρίζες x_1, x_2 . Να βρεθεί η εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $2x_1 + 1, 2x_2 + 1$.

Όταν μας ζητείται να βρούμε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού γράφουμε πρώτα τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$. Στη συνέχεια βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών που μας έχουν δοθεί και το αντικαθιστούμε στην παραπάνω μορφή.

ΛΥΣΗ

Έστω $x^2 - Sx + P = 0$ η ζητούμενη εξίσωση. Οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι $\rho_1 = 2x_1 + 1, \rho_2 = 2x_2 + 1$.

Έχουμε λοιπόν $S = \rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 = 2(x_1 + x_2) + 2$. Από το Παράδειγμα 1 γνωρίζουμε ότι

$x_1 + x_2 = 3$, άρα $S = \rho_1 + \rho_2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Ομοίως έχουμε $P = \rho_1 \cdot \rho_2 = (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 4x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 1 \stackrel{x_1x_2=1}{=} 4 + 6 + 1 = 11$
 $\stackrel{x_1+x_2=3}{}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - 8x + 11 = 0$

Παράδειγμα 3 (Εύρεση παραμέτρων με την βοήθεια των τύπων Vieta)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$. **Σχολικό βιβλίο σελ 95, άσκηση 6.**

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

ii. Αν η μία ρίζα ισούται με το τετράγωνο της άλλης να βρεθεί η τιμή του λ καθώς και οι ρίζες της εξίσωσης.

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4(-8) = 4\lambda^2 + 32 = 4(\lambda^2 + 8) > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Εφόσον η μία ρίζα είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης ισχύει: $x_1 = x_2^2$ (1).

Χρησιμοποιούμε τους τύπους Vieta και έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2\lambda \quad (2) \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -8 \quad (3). \text{ Αντικαθιστούμε την σχέση (1)}$$

$$\text{στην σχέση (3) και έχουμε: } x_1 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_2^2 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_2^3 = -8 \Leftrightarrow x_2 = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

$$\text{Άρα } x_1 = x_2^2 = (-2)^2 = 4. \text{ Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) έχουμε}$$

$$x_1 + x_2 = -2\lambda \Leftrightarrow 4 - 2 = -2\lambda \Leftrightarrow 2 = -2\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{2} \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Παράδειγμα 4 (Είδη ριζών)

$$\text{Δίνεται η εξίσωση: } x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0 \quad (1)$$

Να βρεθούν οι τιμές του παραγματικού αριθμού λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει:

α) Ρίζες ετερόσημες β) Ρίζες θετικές γ) Ρίζες αντίθετες δ) Ρίζες αντίστροφες

Βασικές εκφράσεις και η αλγεβρική τους μετάφραση. Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει:

- **Ρίζες ετερόσημες** ▶ $P = \frac{\gamma}{\alpha} < 0$.

Αυτό σημαίνει ότι α και γ ετερόσημοι αριθμοί τότε η εξίσωση είναι σίγουρο ότι έχει δύο ρίζες άνισες και πραγματικές.

- **Ρίζες θετικές** ▶

$$\Delta \geq 0 \text{ (ρίζες πραγματικές) και } P > 0 \text{ (ομόσημες) και } S > 0 \text{ (θετικές)}$$

- **Ρίζες αρνητικές** ▶

$$\Delta \geq 0 \text{ (ρίζες πραγματικές) και } P > 0 \text{ (ομόσημες) και } S < 0 \text{ (αρνητικές)}$$

- **Ρίζες αντίθετες** ▶ $\Delta > 0$ (ρίζες πραγματικές και άνισες) και $S = 0$

- **Ρίζες αντίστροφες** ▶ $\Delta \geq 0$ (ρίζες πραγματικές) και $P = 1$

ΛΥΣΗ

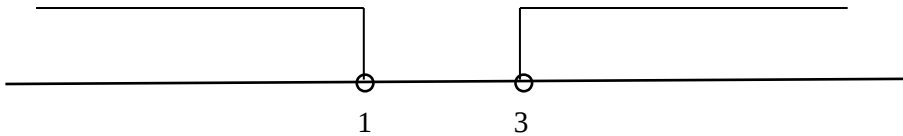
$$\alpha) \text{ Ισχύει } P = \frac{\gamma}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 6 < 0 \Leftrightarrow 2\lambda < 6 \Leftrightarrow \lambda < 3$$

$$\beta) \text{ Πρέπει } \Delta \geq 0 \text{ και } S > 0 \text{ και } P > 0.$$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda - 1)^2 - 4(2\lambda - 6) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 8\lambda + 24 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 \geq 0$, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .

$$S > 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1 \text{ και } P > 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 6 > 0 \Leftrightarrow 2\lambda > 6 \Leftrightarrow \lambda > 3.$$

Συναληθεύοντας τις τιμές του λ έχουμε:



Άρα είναι αδύνατο να υπάρχουν τιμές του λ , ώστε να έχει θετικές ρίζες.

γ) Πρέπει $\Delta > 0$ και $S = 0$. Άρα $(\lambda - 5)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 5$ και $S = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

δ) Πρέπει $\Delta \geq 0$ και $P = 1$. Άρα $(\lambda - 5)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ και $P = 1 \Leftrightarrow 2\lambda - 6 = 1 \Leftrightarrow 2\lambda = 7 \Leftrightarrow \lambda = \frac{7}{2}$.

ΩΡΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Α

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $9x^2 - 18x = 0$

β) $9x^2 + 1 = 0$

γ) $9x^2 - 1 = 0$

γ) $x^2 + 17x + 16 = 0$

δ) $16x^2 - 24x + 9 = 0$

ε) $2x^2 + 5x + 4 = 0$

στ) $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2})x + \sqrt{5} = 0$.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Β

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

β) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

γ) $(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0$

δ) $|x-2| - x^2 + 4x - 4 = 0$

ε) $x^2 - 2x + |5 - 3x| = 0$

στ) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) - 1 = 0$

ζ) $\left(x + \frac{2}{x}\right)^4 - 5\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + 14 = 50$

η) $x^2 - x - 17 + \frac{72}{x^2 - x} = 0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3x^4 - 12x^3 + 6x^2 = 0$

β) $(25x^4 - 4)(x + 3) - (5x - 2)(x^2 - 9) = 0$

γ) $(5x - 10)(x^2 - 4) - (2x - 4)(x + 2)^2 = 0$

δ) $x^2(2x + 1) = 4(2x + 1)$

ε) $x^5 - 25x^3 = 0$

στ) $4x^3 - 4\sqrt{3}x^3 - x + \sqrt{3} = 0$

ζ) $(x + 4)(x^2 - 16) = (x - 4)(5x + 1)^2$

η) $(3x + 1)^3 + 9x^2 = 1$

θ) $x + 2 = x^2 - 4$

ι) $x^3 - x^2 = 4x - 4$

κ) $(x^2 - 9)^2 = (x + 3)^2(2x - 6)$

λ) $(x + 1)^2 + (x^2 + 3x + 2)^2 = 0$.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2} = \frac{x - 1}{2 - x}$

β) $\frac{6x}{x^2 - 9} - \frac{4}{x + 3} - \frac{3}{3 - x} = 0$

γ) $\frac{3}{x} - \frac{4}{3 - x} + \frac{5}{x^2 - 3x} = 0$

δ) $\frac{1}{x^2 - x - 2} - \frac{3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Γ

5. Να λυθεί η εξίσωση: $(a^2 - \beta^2)x^2 - 2a^2\beta x + a^2\beta^2 = 0$, $a \neq \pm \beta$.

6. Να λυθεί η εξίσωση $(\mu + 1)x^2 + (\mu + 3)x + 2 = 0$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου μ .

7. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού $\lambda \neq -1$, ώστε η εξίσωση,

$(\lambda + 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda = 0$ να έχει: α) Ίσες ρίζες, β) Ρίζες άνισες, γ) Ρίζες πραγματικές,

δ) να μην έχει ρίζες.

8. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η εξίσωση: $2x^2 - 3x - (4\lambda + 1) = 0$

α) πραγματικές και άνισες ρίζες

β) Ίσες ρίζες

γ) να μην έχει ρίζες.

9. Αν εξίσωση $x^2 - x + 1 - 3\alpha\beta = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$, να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης καθώς και οι τιμές των πραγματικών αριθμών α, β .

10. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \lambda^3 x - (|\lambda| + 1) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες και πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Αν η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1)x + 2\lambda + 3 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 να βρεθεί η άλλη ρίζα της εξίσωσης.

12. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε η εξίσωση $3x^2 + 8\alpha x + 5\beta - 10 = 0$, να έχει μοναδική

ρίζα το 0.

13. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ ώστε η εξίσωση $3x^2 + 8(\kappa - 3)x + 5(\lambda - 2) = 0$, να έχει μοναδική ρίζα το 0.

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Δ

14. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 7x - 4 = 0$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $x_1 + x_2$	β) $x_1 \cdot x_2$	γ) $x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2$	δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
ε) $x_1^2 + x_2^2$	στ) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$	ζ) $x_1^3 + x_2^3$	η) $ x_1 - x_2 $

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(a+1)x + 5a + 1 = 0$ (1), με $a > 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) να υπολογίσετε την παράσταση $\Pi = \left(\frac{5}{2} - x_1\right) \cdot \left(\frac{5}{2} - x_2\right)$.

16. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$ (1). Να υπολογίσετε την τιμή του λ :

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

β) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει:

i. Ρίζες αντίθετες

ii. Ρίζες αντίστροφες

iii. Ρίζες ετερόσημες.

17. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 5x - 2 = 0$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει:

i. Δύο ρίζες ετερόσημες

ii. Δύο ρίζες αντίστροφες.

18. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x - 5 = 0$ (1). Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες αντίθετες.

19. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 9x + \lambda = 0$ (1). Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης (1) να είναι οκταπλάσια της άλλης.

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + 3 = 0$, με ρίζες x_1, x_2 . Να βρεθεί εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες:

i. $2x_1, 2x_2$

ii. $x_1 + 1, x_2 + 1$

iii. $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$

iv. $\frac{1}{x_1^3}, \frac{1}{x_2^3}$

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 6x - 3 = 0$, με ρίζες x_1, x_2 . Να βρεθεί εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες x_1^2, x_2^2 .

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0$. Να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε να ισχύει η σχέση $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1 + 2x_1^2 x_2^2 = 0$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης.