$1.\ |\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| &\Leftrightarrow |\alpha\cdot\beta|^2 = (|\alpha|\cdot|\beta|)^2\\ &\Leftrightarrow |\alpha\cdot\beta|^2 = |\alpha|^2\cdot|\beta|^2\\ &\Leftrightarrow (\alpha\cdot\beta)^2 = \alpha^2\cdot\beta^2, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

$3.\ |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta| &\Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2\\ &\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \leq |\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha|\cdot|\beta|\\ &\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \leq \alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|\\ &\Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1+x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και}$$

$$x_1\cdot x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{(-\beta)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα x_1+x_2 και με P το γινόμενο $x_1\cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$