

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΩΝΥΜΟ:..... ΟΝΟΜΑ:

ΤΑΞΗ : Γ' - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ - ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 18 / 10 / 2014

ΒΑΘΜΟΣ:

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ (Μονάδες 07)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε ισχύει $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

β) Οι εικόνες των μιγαδικών z και $\bar{z}$ στο επίπεδο είναι πάντα συμμετρικά σημεία ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε ισχύει $\overline{(z^v)} = (\bar{z})^v, v \in \mathbb{N}^*$

δ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)$

ε) Ο μιγαδικός $w = \frac{z}{i} - i\bar{z}$ είναι φανταστικός για κάθε $z \in \mathbb{C}$ (Μονάδες 10)

A3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α) Αν $|z + 1 - 2i| = 3$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι

β) Αν $|z + 3| = |z - 3|$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι

γ) Αν $v = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$, τότε $i^v + i^{-v} = \dots$

δ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - \beta z + 4 = 0, \beta \in \mathbb{R}$ με $|\beta| < 4$,

τότε: $z_1 \cdot z_2 = \dots$ και $|z_1| = \dots$ (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = \sqrt{3} + i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

B1. Να δείξετε ότι $z_1 = iz_2$ (Μονάδες 02)

B2. Αν A, B οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

B3. Να δείξετε ότι: $z_1^{2014} + z_2^{2014} = 0$ (Μονάδες 05)

B4. Αν η εικόνα ενός μιγαδικού w ανήκει σε κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho=4$,

να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{3} \leq \left| \frac{w - z_1}{w - z_2} \right| \leq 3$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ

Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύουν: $z_1^2 = 3 + i$, $z_2^2 = 1 + 3i$ και $w = \frac{z_1}{z_2}$

Γ1. Να δείξετε ότι ο w δεν είναι πραγματικός. (Μονάδες 05)

Γ2. Να βρείτε το $|w|$ (Μονάδες 05)

Γ3. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{w-1}{w+1}$ είναι φανταστικός. (Μονάδες 05)

Γ4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών u για τους οποίους ισχύει: $|u - z_1^2| = |u + z_2^2|$ (Μονάδες 05)

Γ5. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε μιγαδικό v ισχύει: $|v + w| + |v - w| \geq 2$

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν: $|z - 3| + |z + 3| = 10$ και $w = zi$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Οι εικόνες των μιγαδικών κινούνται σε ελλείψεις $(c_1), (c_2)$, των οποίων οι εστίες σχηματίζουν τετράγωνο πλευράς $3\sqrt{2}$. (Μονάδες 10)

Δ2. Ισχύει $4\sqrt{2} \leq |z - w| \leq 5\sqrt{2}$ (Μονάδες 05)

Δ3. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z και w, αν $|z - w| = 5\sqrt{2}$ (Μονάδες 05)

Δ4. Αν $\rho_1 = \left(\frac{z}{w}\right)^4 + \left(\frac{z}{w}\right)^3$ ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

να δείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$ (Μονάδες 05)