

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΩΝΥΜΟ:..... ΟΝΟΜΑ:

ΤΑΞΗ : Γ' - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ - ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 06 / 12 / 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ; (05 μόρια)

A2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi=x$, που διχοτομεί τις γωνίες $xO\psi$ και $x'O\psi'$. (10 μόρια)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow R$ είναι « 1 – 1 », αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς $x \in A$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g \neq g \circ f$

γ) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$ για κάθε $x \in R$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε θα είναι κατ' ανάγκη συνεχής στα a και β .

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και για κάποιο $x_0 \in R$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τότε, ισχύει οπωσδήποτε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(10 μόρια)

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + |z_1 - z_2| f^2(x) + \frac{|1 - \overline{z_1} z_2|^2}{4} f(x) = 2x^5 + x^4 - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου z_1, z_2 μιγαδικοί, οι εικόνες των οποίων είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z_1 - z_2| < |1 - \overline{z_1} z_2|$ (06 μόρια)

B2. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

(10 μόρια)

B3. Αν z, w μιγαδικοί αριθμοί με $\frac{w-1}{w-i} = z-i$, $w \neq i$ και $|z| < 1$,

τότε $|w+i| < \sqrt{2}$ (09 μόρια)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- f συνεχής στο ξ
- $f(x\psi) = \psi^2 f(x) + x^2 f(\psi)$ για κάθε $x, \psi > 0$
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
- $f(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. f συνεχής στο $(0, +\infty)$ (05 μόρια)

Γ2. $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0, x \in (0, +\infty)$ (04 μόρια)

Γ3. $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ (08 μόρια)

Γ4. Η εξίσωση $f(x) = \kappa$ με $\kappa \in \left(\frac{-1}{2e}, \frac{e}{2}\right)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right)$ (08 μόρια)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $\frac{2xf(x) - x + 1}{1 + (f(x))^2} = 1$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-2 - \sqrt{2})\eta\mu(2 - x)}{x^2 - 3x + 2}$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f . (06 μόρια)

Δ2. Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$, $x \in [1, +\infty)$,

να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)\eta\mu\frac{1007}{x})$ (05 μόρια)

Δ3. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f . (08 μόρια)

Δ4. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: \psi = x + \kappa$ σε δύο σημεία, τα $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ με $1 \leq \alpha < \kappa < \beta$,

να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\alpha\beta(f(\xi) - \kappa) = \kappa\xi^2$ (06 μόρια)