

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 21/01/2012

ΘΕΜΑ 1°

A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$. (μονάδες 10)

B. Πότε μία ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$; (μονάδες 05)

Γ. Στις περιπτώσεις 2,5 να κυκλώσετε το σωστό ή το λάθος του ισχυρισμού, ενώ στις 1,3,4 να επιλέξετε το σωστό.

1. Αν για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $f(x) < g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$

με $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε πάντα θα είναι:

α. $\ell_1 = \ell_2$ β. $\ell_1 < \ell_2$ γ. $\ell_1 \leq \ell_2$ δ. τίποτα από τα προηγούμενα.

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = 2$, τότε υποχρεωτικά θα είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ ή $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$

3. Αν $A_f = (-\infty, 0)$, τότε το πεδίο ορισμού της $g(x) = f(4-x^2)$ είναι το:

α. $(-\infty, 0)$ β. $(-2, 2)$ γ. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ δ. $\mathbb{R}$

4. Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$ ισούται με:

α. 1 β. 0 γ. δεν υπάρχει δ. $+\infty$

5. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε υποχρεωτικά

θα υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{|w-1|}{x+1}, x \neq -1 \text{ και } g(x) = x^2 - (|z| - |z-1+i| + 1) \cdot x + 1, x \in \mathbb{R}, w, z \in \mathbb{C}.$$

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν σε κοινό σημείο $A(0, \psi_A)$ κοινή εφαπτομένη (δ),

α) να δείξετε ότι:

1) ο γεωμετρικός τόπος c_1 των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w είναι κύκλος, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (μονάδες 04)

2) ο γεωμετρικός τόπος c_2 των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z είναι ευθεία (ϵ), με εξίσωση $\psi = x - 1$. (μονάδες 06)

3) υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία, έστω M, N , τέτοια ώστε $z = w$. (μονάδες 05)

4) $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 4$, όπου $M(w_1), N(w_2)$. (μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης (δ) και να δείξετε ότι $\epsilon \perp \delta$. (μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 3°

i) Να βρείτε την τιμή του α , όπου $\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x^2+1} - 3^{x^2+2}}{2^{x^2-1} - 3^{x^2+1}}$. (μονάδες 05)

ii) Αν $\alpha=3$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών β και ℓ αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^3 - x^2 + \beta}{x^2 - 3x} = \ell$. (μονάδες 06)

iii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - 18}{x^2 - 3x}, & x > 3 \\ \frac{\eta \mu^2(x-3) + x^3 + \gamma}{x^2 + 1}, & x \leq 3 \end{cases}$

1.) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό γ , ώστε f συνεχής στο $x_0=3$. (μονάδες 06)

2.) Αν $\gamma=43$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $\psi - 2012 = 0$. (μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4°

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$f(2) > 2$ και $f^2(x) - 2x \cdot f(x) - \alpha = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α πραγματικός θετικός αριθμός.

α) Να δείξετε ότι $x + \sqrt{x^2 + \alpha} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (μονάδες 03)

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (μονάδες 06)

γ) Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 + \alpha}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο της

$M(3, f(3))$ εφαπτομένη (ε) με εξίσωση $8x - 5y + \beta = 0$, να δείξετε ότι:

γ_1) $\alpha = \beta = 16$ (μονάδες 06)

γ_2) η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1} . (μονάδες 06)

δ) Αν $g(x) = (f(x) - x)^2$, να δείξετε ότι ισχύει $g'(x) = (f^{-1}(8) - 1) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$. (μονάδες 04)