

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΟΝΟΜΑ:

ΤΑΞΗ : Γ' - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ - ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 02 / 03 / 2013

ΒΑΘΜΟΣ:

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; **(Μονάδες 05)**

A2. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

(Μονάδες 10)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

1. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
2. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.
3. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
5. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, τότε μεταξύ δύο ριζών της f , υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f' .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ για την οποία

$$\text{ισχύουν: } f'(x) = f(x) - \frac{e^x}{x^2}, x \neq 0 \text{ και } |f(1) - e| + |f(-1) + \frac{1}{e}| = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$. **(Μονάδες 10)**

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. **(Μονάδες 09)**

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α . **(Μονάδες 06)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x-h) - f'(x) = -e^{x+h} + e^x - \sinh + 1, x, h \in \mathbb{R}, f'(0) = 1 - \lambda, \lambda > 0 \text{ και } f(0) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f''(x) = e^x, x \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(Μονάδες 08)}$$

β) Να βρείτε τον τύπο της f . **(Μονάδες 05)**

γ) Αν $f(x) = e^x - \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 06)**

δ) Έστω g παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g'(x) \neq 0$ και $g'(0) = f(0)$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , αν ισχύει $g(f^3(\lambda x) - \lambda x) \geq g(-x+1)$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 06)**

ΘΕΜΑ Δ

Α. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ και $f(\alpha) < f(\gamma)$ και f 1-1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. **(Μονάδες 05)**

Β. Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $0 < f'(2) < f'(1)$ και $f(x+1) + f(3-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: $\alpha_1) f(2) = f''(2) = 0$ **(Μονάδες 02)**

και $\alpha_2) η f''$ είναι γνησίως αύξουσα **(Μονάδες 05)**

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο $M(2, f(2))$. **(Μονάδες 04)**

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

(Μονάδες 04)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 05)