

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Τμήμα:.....

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία:.....

Θέμα 1^ο

A. 1) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και ισχύει $f(α)=f(β)$, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

MON.10

2) Πότε μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

MON.05

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

1. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{x-1} = \ell, \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$.

3. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}) = 1$.

4. Αν f συνεχής στο x_0 , g όχι συνεχής στο x_0 , τότε $f+g$ όχι συνεχής στο x_0 .

5. Αν η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και $f(-2)=5$, $f(2)=6$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\frac{11}{2}$.

MON.10

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει:

i) η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

ii) $xf(x) - \eta\mu 2x + 2x \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{iii) } g(x) = \begin{cases} f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρείτε: 1.) το $f(0)$ και

MON.10

2.) το α , αν η g είναι συνεχής στο $x_1=0$.

MON.15

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

MON.03

ii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

MON.08

iii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 1$.

MON.04

iv) Αν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$f^{-1}(\ln 1) + f^{-1}(\ln|z + \bar{w}|) = \frac{5}{6}$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |z + \bar{w}| + |\bar{z} + w| = 1 \quad \text{και} \quad |\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)| \leq \frac{1}{2}.$$

MON.10

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-2) = \frac{1}{2}$, $f(6) = 4$ για την οποία

ισχύουν: $f(x) \neq 0$ και $\frac{f(f(x)+1)}{f(f(x)+3)} = \frac{f(f(x)+4)}{f(f(x)+2)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2, 6)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2$.

MON.05

ii) ισχύει $f(3) f(4) = f(5) f(6)$

MON.05

iii) υπάρχει $\xi \in [3, 4]$ με $f^2(\xi) = f(3) \cdot f(4)$.

MON.10

iv) η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

MON.05