

1ο ΓΕΛ. ΠΑΛΑΙΟΥ ΦΑΛΗΡΟΥ

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Ονοματεπώνυμο:.....

Ημερομηνία: 21/04/2012

Θέμα Α

A₁. Να αποδείξετε ότι: όταν η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

(12 ΜΟΡΙΑ)

A₂. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

(5 ΜΟΡΙΑ)

A₃. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το γράμμα (Σ) ή το γράμμα (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα.

1. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

2. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

3. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι

ένα σημείο του Δ , τότε $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

4. Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow R$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

5. Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών

των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(5 ΜΟΡΙΑ)

A₄. Κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να τις αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ

1. $f(x)=-x+\frac{1}{x^2}$

α. $\psi=2$

2. $f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}$

β. $\psi=-x$

3. $f(x)=2+\frac{1}{x-2}$

γ. $\psi=-x+1$

(3 ΜΟΡΙΑ)

Θέμα Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+\psi i$, $w=\frac{z+1}{z-i}$, $z \neq i$.

α) Αν w φανταστικός, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M του z .

(8 ΜΟΡΙΑ)

β) Αν ο μιγαδικός αριθμός z κινείται στην ευθεία με εξίσωση $\psi=x$,

να δείξετε ότι οι εικόνες N του μιγαδικού w κινούνται σε κύκλο (c)

με εξίσωση $(x-1)^2+(\psi-1)^2=1$.

(9 ΜΟΡΙΑ)

γ) Αν η ευθεία $\psi=x$ τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία A και B με $A(z_1)$ και $B(z_2)$ και Γ, Δ σημεία του κύκλου (c) με $\Gamma(w_1), \Delta(w_2)$ τέτοια, ώστε $|w_1-w_2|=2$, να δείξετε ότι:

$$\gamma_1) |w_1-z_1|^2 + |w_1-z_2|^2 = 4$$

$\gamma_2)$ το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και

$$\gamma_3) |w_1-z_1| = |w_2-z_2| \quad (8\text{ΜΟΡΙΑ})$$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$, με $f(1)=0$, για την οποία ισχύει $f'(e^x) = e^x(1+2x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(e^x) - xe^{2x}$, $x \geq 0$.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της. (5ΜΟΡΙΑ)

ii) Να δείξετε ότι: $f(x) = x^2 \ln x$, $x \geq 1$ (4ΜΟΡΙΑ)

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. (4ΜΟΡΙΑ)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $M(e^2, f^{-1}(e^2))$. (4 ΜΟΡΙΑ)

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{e^x}$ (3ΜΟΡΙΑ)

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e x^2 \ln x \, dx + 2 \int_0^1 x e^{3x} \, dx$ (5ΜΟΡΙΑ)

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα

και η συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+1} f(u) du, x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση

$$G(x) = \int_0^x \left[t^2 - \left(\int_0^2 f(u) du \right) \cdot t + \left(\int_0^1 f(u) du \right) \cdot \left(\int_1^2 f(u) du \right) \right] dt, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα. (4ΜΟΡΙΑ)

β) Να αποδείξετε ότι η G παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (7ΜΟΡΙΑ)

γ) Αν η G έχει τοπικά ακρότατα στις θέσεις 4 και 9, να δείξετε ότι:

i) $\int_0^2 f(u) du = 13$ (4ΜΟΡΙΑ)

ii) υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi+1) - f(\xi) = -5$ (5ΜΟΡΙΑ)

iii) υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\frac{-G(\rho)}{\rho-1} = \rho^2 - 13\rho + 36$ (5ΜΟΡΙΑ)