

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6,5

A.2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \dots$

β. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \dots$

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \dots$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

Μονάδες 6

B.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f''(x) = 6x + 4$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(0, 3)$ έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

B.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 (e^x + x) dx$

Μονάδες 2

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$

Μονάδες 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

- α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z + 16| = 4|z + 1|$$

Μονάδες 9

- β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 1| = |z - i|$$

Μονάδες 9

- γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \ln(x-1), & x \in (1, 2] \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x - 1}$$

Μονάδες 7

β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 11

γ. Για $\alpha = -1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0, +\infty)$ για

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{t f(t)}{x^2} dt \quad \text{με } x > 0$$

την οποία ισχύει:

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x > 0$$

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ