

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΠΩΝΥΜΟ:ΟΝΟΜΑ:

ΤΑΞΗ : Γ' - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ : ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝ/ΚΗ - ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 23 – 03 – 2013

ΒΑΘΜΟΣ:

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι: η συνάρτηση $f(x)=a^x$, $a>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=a^x \ln a$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

A2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ . Ποια σημεία της f στο διάστημα Δ λέγονται κρίσιμα σημεία; (ΜΟΝΑΔΕΣ 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

β) Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \text{ τότε θα ισχύει οπωσδήποτε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε θα είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο α και στο β .

ε) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . (ΜΟΝΑΔΕΣ 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $|z-i| = \text{Im}(z)+1$ (1).

B1. Να δείξετε ότι η εικόνα του z κινείται σε παραβολή. (ΜΟΝΑΔΕΣ 06)

B2. Έστω οι εικόνες A και B των μιγαδικών z_1 και $-\bar{z}_1$ αντίστοιχα.

Να βρεθεί ο z_1 που επαληθεύει την (1) αν το τρίγωνο AOB είναι ισόπλευρο. (ΜΟΝΑΔΕΣ 06)

B3. Να βρείτε το μιγαδικό z_0 του οποίου η εικόνα έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $y = x - 3$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 08)

B4. Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στη παραβολή και κατά τη χρονική στιγμή t_0 η απόσταση της από την ευθεία $y = x - 3$ γίνεται ελάχιστη.

Να αποδείξετε ότι, κατά τη χρονική στιγμή t_0 , ο ρυθμός μεταβολής του $\text{Re}(z)$ ισούται με το ρυθμό μεταβολής του $\text{Im}(z)$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 05)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x + |z|\ln x + |z|$, $x > 0$, $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

Γ1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f . (ΜΟΝΑΔΕΣ 05)

Γ2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z ,

αν ισχύει: $|z|\ln(ex) \leq 2x$ για κάθε $x > 0$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 05)

Γ3. Αν $|z| = 2$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $\psi = |z|x$ εφάπτεται της συνάρτησης

$g(x) = e^{|z|x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 05)

Γ4. Αν $1 < \frac{|z|}{2} < \frac{e}{2}$, να αποδείξετε ότι:

1. υπάρχει $\xi \in \left(\frac{|z|}{2}, e\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 05)

2. υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in \left(\frac{|z|}{2}, e\right)$ τέτοια, ώστε: $\frac{2\rho_2(|z|-e)}{|z|-2\rho_2} - \frac{\rho_1|z|\ln\frac{|z|}{2}}{|z|-2\rho_1} = e - \frac{|z|}{2}$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 05)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

$f(0)=1$, $f(x) \geq x+1$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-1}{x} + e^{x^2} - x^2$, $x > 0$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_1) \cdot f''(x_2) > 0$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 06)

Δ2) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ,

όπου $\alpha \geq 1$, τέτοιο, ώστε να ισχύει: $f\left(\frac{\alpha+\alpha^3}{2}\right) = \frac{f(\alpha) + f(\alpha^3)}{2}$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 06)

Δ3) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. (ΜΟΝΑΔΕΣ 07)

Δ4) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^{f(x)-x-1} - 1)\ln x]$. (ΜΟΝΑΔΕΣ 06)

- Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
- Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- Διάρκεια διαγωνίσματος τρεις ώρες.