

άσκηση

Δίνεται οι συναρτήσεις: $\Phi(x)=2x^2\ln x-3x^2+4x-1, x>0$ και

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-1}, x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

α. Να μελετήσετε την συνάρτηση Φ ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β. Να δείξετε ότι: $f''(x)=\frac{\Phi(x)}{x^2(x-1)^3}, x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty).$

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

άσκηση

A. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=-2x+\lambda\ln x+\lambda, x>0, \lambda>0.$

A₁. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης h .

A₂. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του λ , για την οποία ισχύει:

$$\lambda \ln(ex) \leq 2x \text{ για κάθε } x>0.$$

A₂. Για $\lambda=2$, να αποδείξετε ότι: $\int_1^x h(t)dt = -x^2+2x\ln x+1, x>0.$

B. Δίνονται οι συναρτήσεις: $\Phi(x)=-x^2+2x\ln x+1, x>0$ και

$$f(x)=\frac{x\ln x}{x-1}, x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

B₁. Να δείξετε ότι: $f''(x)=\frac{\Phi(x)}{x(x-1)^3}, x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$

B₂. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty).$

B₃. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x\ln x=\alpha(x-1), x>0$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

B₄. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_2^e \frac{x-1}{x^3} f(x) dx.$