

άσκηση

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\bullet f(x) = \int_1^x \left(\int_1^x f(u) du \right) dt + \frac{x-1}{\sqrt{e}}, \quad x \geq 1$$

$$\bullet f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και } f(2) = 1.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x-1) \left(\int_1^x f(u) du + \frac{1}{\sqrt{e}} \right), \quad x \geq 1.$

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

iii) Αν $f(x) = (x-1)e^{\frac{x^2}{2}-x}, \quad x \geq 1,$

α. να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

β. να βρείτε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\lambda$, $x=\lambda^2$, $\lambda > 1$.

γ. να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{\lambda \rightarrow 2} (E(\lambda) + e^{\frac{\lambda^2}{2}-\lambda} - e^4) \ln(\lambda-2).$