

άσκηση

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

i) $f'(x) = (1 + \frac{1}{x})f(x), x \neq 0$

ii) η γραφική παράσταση της f έχει στην αρχή των αξόνων εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $\psi = x + 2014$.

α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

β. Αν $f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$

β_1 να αποδείξετε ότι ισχύει: $f''(x) = f(x) + 2e^x, x \in \mathbb{R}$.

β_2 να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β_3 να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

β_4 να αποδείξετε ότι: $\frac{2f(\alpha) + f(\beta)}{3} \geq f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in [-2, +\infty)$.

Άσκηση

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν: $(f(x))^4 - (f(x))^2 + x^4 - x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(-1) = f(1) = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Ισχύει $f'(-1) + f'(1) = 0$.

β. Η f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο με τετμημένη $\xi \in (-1, 1)$.

γ. Υπάρχουν $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f''(\eta_1) + f''(\eta_2) = -2f''(\eta_1) \cdot f''(\eta_2)$$