

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x - e)$ και $g(x)=\ln x$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις : $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x^2, & x < 1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} \frac{2}{x-1}, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις : $f \circ g$, $g \circ f$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} \ln x+1, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$.

Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f(x^2-2x)$, όπου f συνάρτηση ορισμένη στο $A_f=(-1,3]$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $(f \circ g)(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $(g \circ f)(x)=\frac{1-x}{1+x}$ και $g(x)=1+\ln x$.

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

7. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A=[-2,6]$, τότε να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x^2-3)$

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

8. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

α) $f(\ln x) = \frac{1-x}{1+x}$ για κάθε $x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$

β) $f(x^3) = 3x^4 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

9. Αν $f(x) = e^x + 1$ και $(g \circ f)(x) = e^{1-x} + x$, να ορίσετε τη συνάρτηση g .

10. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $3f(1-x) + 2f(x) = 4x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) + 1 \leq x^2 \leq f(x-1) + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Να βρείτε περιττή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(x^2 + 1)f(x) \leq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

13. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f \circ f)(x) = x^2 - 3x + 4$, τότε να αποδείξετε ότι $f(2) = 2$.

14. Δίνονται συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x^2 - 5x + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(3) = 3$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

15. Α) Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο A .

Β) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + x = 11$.

Γ) Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\beta^x + \gamma^x = \alpha^x$ έχει μοναδική ρίζα.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

16. Α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A και για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .
- Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{\ln x}{\sin x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Γ) Αν $\frac{\pi}{3} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $x_1^{\sin x_2} < x_2^{\sin x_1}$.
17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- α) ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$.
 - β) αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.
 - γ) αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες με διαφορετικό είδος μονοτονίας, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.
18. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $g(x) = 2f(x) - (f \circ f)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε :
- α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
 - β) Να λύσετε την ανίσωση $2(f(x^2) - f(1)) > (f \circ f)(x^2) - (f \circ f)(1)$.
19. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f \circ f)(x) = x$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) < f(x)$, τότε να αποδείξετε ότι $(f \circ g)(x) > (g \circ f)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

21. Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση
 $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 1$

β) η συνάρτηση $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ δεν είναι $1 - 1$.

22. Δίνεται συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) \cdot f(2007 - x) \geq f^2(x)$
 για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι $1 - 1$.

23. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f
 φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

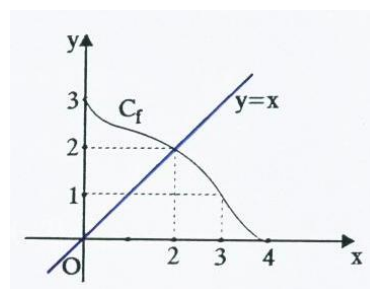
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

γ) Να βρείτε τα

$f^{-1}(3), f^{-1}(2), (f^{-1} \circ f)(\sqrt{2})$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$.



24. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται
 από τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(-1, 3)$.

α) Να συμπληρώσετε τις ισότητες $f(2) = \dots$, $f(-1) = \dots$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(4x + 7) - 3 > 0$.

δ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(2x - 1) = 5$ και $f(f(x)) = f(5)$.

ε) Να συμπληρώσετε τις ισότητες $f^{-1}(5) = \dots$, $f^{-1}(3) = \dots$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(3 + f^{-1}(x + 1)) = 5$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$
 και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{1 - e^x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$.

δ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ f^{-1}$ και $f^{-1} \circ f$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+5}{2x-3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \in [1, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x + x - \frac{1}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

33. Α) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, τότε για κάθε $x \in A \cap f(A)$ ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

- Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sin x$, $x \in [0, \pi]$
- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \eta \mu x - \frac{1}{2}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

36. Έστω συνάρτηση f με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$f(f(x)) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- α) η f είναι $1-1$.
- β) $f^{-1}(x) = -f(x)$.
- γ) η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
- δ) η f είναι περιττή συνάρτηση.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{\eta\mu x} + \eta\mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^e + e < e^\pi + \pi$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $(f \circ f)(x) < 0$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x - 1 + \ln x = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $e < 2 + \ln 3$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = 1$.

39. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(\lambda^2 - 3\lambda) - f(2\lambda - 6) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

40. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + 5f(x) + x = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

41. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

42. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1$.
- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .
43. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f \circ f)(x) = x + f(x)$.
- Να αποδείξετε ότι :
- α) η f αντιστρέφεται .
- β) $f(0) = 0$.
- γ) $f(x) = x + f^{-1}(x)$.
44. Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f \circ f)(x) = x^2 + f(x)$.
- Να αποδείξετε ότι :
- α) η f δεν αντιστρέφεται .
- β) $f(0) = 0$.
45. Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f \circ f)(x) = x^3$.
- A) Να αποδείξετε ότι :
- α) η f αντιστρέφεται .
- β) $f(x^3) = (f(x))^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- B) α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
- β) Να αποδείξετε ότι $[f^{-1}(-1)]^3 + [f^{-1}(1)]^3 = f(0)$.
- γ) Αν $f(8) = 64$ να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(4)$.
46. Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f \circ f)(x) = 4x - 3$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται .
- β) Να αποδείξετε ότι $f(4x - 3) = 4f(x) - 3$.
- γ) Να υπολογίσετε το $f(1)$.
- δ) Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και να έχει τύπο της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η g είναι $1-1$, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν $f(f(x)) = x$ και $g(x) = x + f(x)$, τότε :
- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
 - β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
 - γ) Αν z, w είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με $f(\operatorname{Re}(z \cdot w)) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w)$, να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους z, w είναι πραγματικός αριθμός.
48. Έστω οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{\ln x + |z| - 5}{\ln x - 1}, z \in \mathbb{C}, |z| \neq 4$ και $g(x) = e^{\frac{|w-1| \cdot x - 3}{x-1}}, w \in \mathbb{C}$
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
 - β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .
 - γ) Αν $f^{-1} = g$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z και w .
 - δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z και w , ώστε $z = w$, οι οποίοι και να βρεθούν.
49. Αν οι συναρτήσεις f, g ικανοποιούν τη σχέση $(f \circ f + g \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι :
- α) η f αντιστρέφεται.
 - β) $f^{-1} = f + g$.
50. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- α) η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - β) η f είναι περιττή.
 - γ) $f(x-y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
 - δ) αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$, τότε η f είναι $1-1$.
 - ε) $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
51. Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y) \geq e^{x+y}$.
- α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.
 - β) Να αποδείξετε ότι $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

52. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και οι θετικοί αριθμοί α, β με $\alpha + \beta = 1$, ώστε να ισχύει $f(\alpha x + \beta f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

53. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{3x+2}$, $x \neq 0$ και $g(x) = \ln x^2$, $x \in [1, e^4]$.

i) Να βρείτε, αν ορίζεται, τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

ii) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$.

54. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ και $g(x) = 1-e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1" και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f .

ii) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f^{-1}$.

55. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{3x^2+2}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln \sqrt{x}$, $x \in (1, e^5]$.

Να βρείτε:

i) Αν ορίζεται, τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

ii) Το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - \eta \mu^2 x - 1}{x^2}$.

iii) Την αντίστροφη συνάρτηση της g .

56. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbb{R}$. (Θέμα 1998)

57. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση και περιττή,

τότε για κάθε $x \in A \cap f(A)$ ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = -x$.