

άσκηση

Έστω η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $g(0)=0$.

$$\text{Επίσης, δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \int_1^x g(t) dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \int_1^x g(t) dt, & x < 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

α_1 ισχύει $f'(0)=0$.

α_2 Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

β. Να εξετάσετε το πρόσημο της συνάρτησης f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } g(\xi) = \int_0^1 g(t) dt.$$

άσκηση

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , x < 0 \\ e^{-\alpha} + \alpha - 1 & , x = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \\ \ln(x+1) & , x > 0 \end{cases}$$

που είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1,1)$ τέτοια, ώστε

$$\text{να ισχύει: } \xi_1 - 2 - \frac{e^{\xi_1}}{(\xi_2+1)^2} = \frac{1-4e}{2} e^{\xi_1}.$$

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x) dx$