

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\square f\left(\frac{x}{\psi}\right) = f(x) - f(\psi) \text{ για κάθε } x, \psi > 0$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2} = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha_1) f(1) = 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

$$\alpha_2) \lim_{x \rightarrow e} f(x) = f(e)$$

α₃) η f είναι συνεχής

$$\beta) \text{ Να λύσετε την ανίσωση: } f\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f(x) > 0, x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$$