

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 3x - 5} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

2. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x^{10} + (2 - \lambda)x^5 - 2}{x - 1} = 20$.

3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $x - x^2 \leq f(x) \leq x$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

ii) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο μια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η

συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha|x-1|}{x-1} (2x^3 - 4)$ έχει όριο στο $x_0 = 1$.

5. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο στο $x_0 = \frac{\lambda}{2}$ της

συνάρτησης $f(x) = \frac{2\lambda x^2 - (\lambda^2 - 2\lambda)x - \lambda^2}{|2x - \lambda|}$ και να βρεθεί αυτό.

6. Να βρείτε τα α και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(\alpha+1)x^2 - 3\eta\mu^2 x}{x^2} & , \text{αν } x > 0 \\ 2x^2 - 6\beta + \alpha^3 & , \text{αν } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{να έχει όριο στο σημείο } x_0 = 0$$

και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

7. Να βρείτε τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2}{x - 1}$

8. Να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 3x + \dots + \eta\mu vx}{x} = \frac{v(v+1)}{2}, v \in \mathbb{N}^*.$

9. Να βρεθούν τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 + 4x - 5}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$

10. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x - \sqrt{x^2 + x^4}}{x^2 - x} & , \text{αν } x < 0 \\ x^2 + \lambda & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{στο σημείο } x_0 = 0.$$

11. Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(2)| \leq \kappa|x - 2|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\kappa > 0$ σταθερό, να αποδείξετε ότι υπάρχει το όριο της f στο σημείο $x_0 = 2$.

12. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι

$$3x - 2x^2 \leq f(x) \leq 3x. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3.$

13. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2,$$

να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

14. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + x^3 \eta\mu \frac{1}{x} - 4|f(x)| \right) = 2$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

15. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \ell$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sin \frac{1}{x}} = m$, όπου ℓ και $m \in \mathbb{R}$,

να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

16. Αν η f είναι περιττή συνάρτηση και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 2x + 1) = 4$,

να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

17. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) - x^2 + 2x - 1) = 5$,

να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

18. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{x^2 + 3x + 2} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$.

19. Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - 2}{\sin x - 1}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 5\sin^2 x}{\eta\mu x}$

20. Να βρείτε τα α και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 2}{x-1}, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x-1}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{στο σημείο } x_0 = 1.$$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

21. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \alpha}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α .

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \kappa x - \sqrt{x+1}}{x^2}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η τιμή του κ , ώστε η f να έχει στο σημείο $x_0 = 0$ όριο πραγματικό αριθμό, το οποίο στη συνέχεια να βρεθεί.

23. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\eta\mu x - 1}{f(x)} = -\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

24. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{(2x-1) \cdot f(x)}{4x^2 - 1} \right) = -\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$.

25. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mu x^3 + 2x - 1}{(\mu - 1)x^2 + 3}$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ .

26. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} + \lambda x \right)$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ .

27. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ για τους οποίους είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 5}{x + 1} - (\lambda x + \mu) \right] = 1.$$

28. Να βρείτε τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3\eta\mu x}{3x^2 + 5\sigma\upsilon\nu 2x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{7x + 1}$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

29. Να βρείτε τα όρια :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + \eta \mu x) & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^4 - \sigma \upsilon \nu x} \\ \text{iii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(3 + \eta \mu x)] & \text{iv)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^3 + 1)(\eta \mu 2x - 3)}{3x^2} \end{array}$$

30. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \alpha x - \beta \right) = 0.$$

31. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{ii)} \lim_{x \rightarrow e} [\log_x (x^2 + x + 1)] \\ \text{iii)} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x - 1}{x + 2} \right)^x & \text{iv)} \lim_{x \rightarrow e} [\ln(\ln x)] \end{array}$$

32. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, όταν

$$\text{i)} f(x) = \left(2 + \frac{1}{x} \right)^x \quad \text{και} \quad \text{ii)} f(x) = \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{x-1}$$

33. Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 3^{x+2}}{2^{x+1} + 3^x} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1} + \lambda^x}{e^x + \lambda^{x+1}}, \lambda > 0.$$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |xz - \bar{z}| - 2x$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 2$.

i) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ii) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z .

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

35. Αν $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{x+1}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x]$

ii) $\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x]$

36. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ και $f(g(x)) = \ln x$, $x > e$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $g(x)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow e} \frac{(x-e)(\ln x - 1)g(x) - x + e}{\eta\mu(x-e)}$

37. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και περιπτή.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x \eta\mu \frac{1}{x} + \ln \frac{5^x + 3^{x-2}}{5^x + 3^{x+1}} \right) = \ell - 1$, $\ell \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

38. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \rho} f(x)$, όπου $f(x) = \frac{2\alpha^x + 3\beta^{x+1}}{\alpha^x + \beta^x}$ με $\alpha, \beta > 0$

και $\rho = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{\alpha}}{(\alpha - t)^2}$, $\rho \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

39. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{3x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln \sqrt{x}$, $x \in (1, e^5]$. Να βρείτε :

i) Αν ορίζεται, τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

ii) Το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - \eta\mu^2 x - 1}{x^2}$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

40. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2$, να προσδιορίσετε το μ , ώστε να είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x)f(x) + \mu x^2}{2\eta\mu^2 x - 3x f(x)} = -4.$$

41. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+9} - 3)g(x) = 3.$$

Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} + g(x) \cdot \eta\mu 2x \right).$$

42. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty. \text{ Να δείξετε ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\kappa f(x) + \lambda g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0, \kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*.$$

43. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|z|x^3 - 3x + |w|}{x^2 - x}$, $x \neq 0, 1, z, w \in \mathbb{C}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$,

να δείξετε ότι: i) ο γεωμετρικός τόπος των z, w είναι δύο ομόκεντροι κύκλοι

$$\text{ii) } \frac{1}{3} \leq |z - w| \leq 3$$

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

44. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{|xz - \bar{z}| - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0, 1, z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z .

45. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 3f(x) - x = 4.$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1}

ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) \cdot \eta\mu(x-1)}{(x-1)^2}$

46. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $|f(x) - 5| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5x}{2x^3 - x - 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, αν επιπλέον η f είναι περριπτή.

47. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{\eta\mu^3 x}{x^3 - x^2} \leq f(x) - f(0) \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^2}} \sigma\upsilon\nu^2 \frac{1}{x}, x \neq 0, \pm 1. \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

48. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 2xf(x)$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

49. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x \eta \mu x}{f(x)} = 0. \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+f^2(x)} - f(x) \right) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+f^2(x)} - 2f(x) \right)$$

50. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\left| \overline{z^2} \right| - \sqrt{|z|^2 - x^2}}{x^2 + \eta \mu^2 x}$,

$$\text{όπου } x \in [-|z|, 0) \cup (0, |z|], z \in \mathbb{C} \text{ με } z \neq 0.$$

Να βρείτε το όριο της f στο $x_0 = 0$ για τις διάφορες τιμές του μιγαδικού αριθμού z , καθώς και τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z .

51. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{|x \cdot z - \overline{z}| - x}{x+1}$, $x \neq -1$.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M του z .

52. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x \cdot z - \overline{z}| - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $|z| = 1$.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$, να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z .

53. i) Να βρείτε το όριο για τις διάφορες τιμές του μιγαδικού αριθμού z

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x + |z| - 1}{\sigma \nu x - 1}.$$

ii) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z , αν το όριο είναι πραγματικός αριθμός και επιπλέον οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

54. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x^2 - |z| \cdot x + \frac{|z^2|}{4} + 1$, $x \geq \frac{|z|}{2}$

$$\text{και } g(x) = \sqrt{x - |w-1|} + 1, x \geq |w-1|.$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρεθεί η f^{-1} .

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

β) Αν ισχύει $f^{-1}=g$,

i) να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , w .

ii) να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί z , w τέτοιοι, ώστε $z=w$, οι οποίοι και να βρεθούν.

iii) αν επιπλέον $\overline{z_1} = \frac{4}{z_1}$, $\overline{z_2} = \frac{4}{z_2}$ και $|z_1 - z_2| = 4$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2, \text{ όταν } w=z.$$

γ) Αν $\frac{|z|}{2} = |w-1| = 1$, να βρεθούν τα όρια: $\gamma_1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)-1}{(f^{-1}(x)-1)^2} \cdot \frac{1}{\eta\mu(x-1)} \right)$

$$\gamma_2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)-1}{(f^{-1}(x)-1)^2} + \eta\mu(x-1) \right) \quad \gamma_3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f^{-1}(x)-1}{f(x)-1} \cdot \eta\mu(x-1) \right)$$

55. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4 - x^2 + 2} = 5$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x^4 - 3} = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + g(x) - 2|z+1| \cdot x^4 + 1}{f(x) - g(x) - 2|z-1| \cdot x^4 + x^2} = 1, z \in \mathbb{C}$$

Να βρεθούν: i) τα όρια των συναρτήσεων f, g στο $-\infty$ και

ii) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M του μιγαδικού αριθμού z .

56. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\left| (\sqrt{x^2+1}+1) \cdot f(x) \right| \leq x \eta\mu \frac{1}{x}, x \neq 0$

i) Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ii) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x) + |z-i|) \cdot x^2 - x}{(-f(x) + |z+2|) \cdot x^2 - 1} = 1, z \in \mathbb{C}$,

να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z .