

1. Να βρεθούν τα α και $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x - \sqrt{x^4 + x^2}}{x^2 - x} & , \text{αν } x < 0 \\ \alpha x^2 + \beta & , \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής και}$$

η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

2. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{|x - 2|} & , \text{αν } x \neq 2 \\ \gamma & , \text{αν } x = 2 \end{cases}$$

3. Να βρείτε τον τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(x-1)f(x) + 2 = \eta\mu(2x-2) + \sqrt{x^2 + 3}$.

4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \ell$ και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = m, \text{ όπου } \ell, m \in \mathbb{R} \text{ και } \ell \neq m,$$

να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = \alpha$.

5. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} & , \text{αν } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

6. Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $|f(x) - \eta\mu x| \leq \sqrt{x^2 + 1} - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x f(x) - \eta\mu^2 x}{x^2 + \eta\mu^2 x}$.

7. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής στο $x_0 = 2$.
Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)}{2h} = 1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει
 $\eta\mu^2 x + 2x^2 f(x) \leq f^2(x) \leq \eta\mu^2 x + 2x^2 f(x) + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
9. Έστω συνάρτηση f η οποία για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση
 $f(x) - f(\psi) \leq (x - \psi)^2$. Να αποδείξετε ότι :
α) η f είναι συνεχής β) το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.
10. α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + \kappa xy$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ με $f(1) \neq 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(x+y) = \kappa f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}^*$ και $f(0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι, αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
11. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = \alpha \eta\mu x + \beta$, $\alpha, \beta > 0$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει τον αριθμό $\alpha + \beta$.
12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \frac{x^6 + 1}{x - \beta} = 0$, $\alpha, \beta > 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α, β) .
13. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να είναι
$$f(\xi) = \frac{\kappa f(\alpha) + \nu f(\beta)}{\kappa + \nu}, \kappa, \nu \in \mathbb{N}^*.$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$.
 α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + e^{x-1} = 1$.
15. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta > 0$. Να αποδειχθεί ότι
 υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta) = (\alpha + \beta)f(\xi)$.
16. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2003) + f(2004) + f(2005) = 0$.
 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα .
17. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) + \kappa}{x - \alpha} = 1$, όπου $\alpha, \kappa > 0$. Αν η γραφική παράσταση της f
 διέρχεται από το σημείο $(-\alpha, \alpha^2)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση
 $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-\alpha, \alpha)$.
18. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση
 $(2\alpha^4 + 7)x^6 - \alpha^2 x^5 + (\alpha - 1)x^3 - \alpha x - 3 = 0$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα
 μικρότερη του 1.
19. Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα
 $[\alpha, \beta]$, όπου α, β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει
 ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{f(\xi)}{\alpha} = \frac{\beta}{\xi}$.
20. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και 1-1 για την οποία ισχύει:
 $|f(2011) + f(2012)| = |f(2012)|$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της
 συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ με τετμημένη
 $x_0 \in [2011, 2012)$.

21. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει:
 $4(f(\alpha))^2 + 9(f(\beta))^2 + 8 \leq 4(2f(\alpha) - 3f(\beta))$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
22. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 0]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x - 1$.
23. Αν οι α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί και $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ με $\lambda < \mu < \nu$,
 να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu} + \frac{\gamma}{x - \nu} = 0$ έχει μία ρίζα
 στο διάστημα (λ, μ) και μία ρίζα στο διάστημα (μ, ν) .
24. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου g γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
25. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x, x \in \mathbb{R}$.
 i) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
 ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$.
26. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
 Αν $\gamma, \delta \geq 0$ με $\gamma + \delta = 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο,
 ώστε να ισχύει $f(\xi) = \gamma \cdot f(\alpha) + \delta \cdot f(\beta)$.
27. Έστω συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1)$
 και $g(\mathbb{R}) = (1, +\infty)$. Αν υπάρχουν ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί α, β
 με $f(\alpha) = \alpha, g(\beta) = \beta$ και $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$
 για το οποίο ισχύει $f(x_0) \cdot g(x_0) = x_0$.
28. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-2, -1]$ τέτοια, ώστε
 για κάθε $x \in [-2, -1]$ να είναι $-2 \leq f(x) \leq -1$. Να αποδείξετε
 ότι υπάρχει $\xi \in [-2, -1]$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(\xi) = \frac{2}{\xi}$.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $g(x) = -x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \neq 0$. Αν υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $f(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$ και $\rho_1 < \rho_2$, να αποδείξετε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $\kappa f(x) + \lambda g(x) = 0$, με $\kappa, \lambda > 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .
30. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq 0$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$.
31. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $\gamma \in (\alpha, \beta)$ και $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 > 0$,
όπου $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\rho \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο,
ώστε να ισχύει $f(\rho) = \frac{\kappa_1 f(\alpha) + \kappa_2 f(\beta) + \kappa_3 f(\gamma)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3}$.
32. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα (α, β) .
Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$, να αποδείξετε ότι
η f παίρνει ελάχιστη τιμή στο (α, β) .
33. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0, 2010]$ για την οποία ισχύουν: η f είναι 1-1 και $f(2010) > f(0) > 0$.
Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
34. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = f(2) \neq f(1)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(\xi) = f(\xi + 1)$.
35. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 4x^2 + 3\eta\mu x - 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\eta\mu x = 11 - 4x^2$ έχει ακριβώς μία
λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

36. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1$.
37. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) = 2xf(x) - 1$ για κάθε $x \in A$, $f(\alpha) > \alpha$ για $\alpha > 1$ και $f(\beta) < \beta$ για $\beta < -1$. Στη συνέχεια, να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$
38. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x) = 3f(x) + 4$.
39. α) Να αποδείξετε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
β) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\beta^2 < 3\alpha\gamma$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα.
40. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v} = 0$ όπου v περιττός φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^v = 0$, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
41. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $xf(x) - x^2 - x - \eta \mu x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τον τύπο της f .
β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα μικρότερη του μηδενός.
42. Αν για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ η f είναι συνεχής και ισχύει $4\eta \mu^2 x + f^2(x) = 2$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

43. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$, να αποδείξετε ότι :

i) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε
$$f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

ii) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε
$$f(x_0) = \frac{2 \ln e^2}{3}.$$

44. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και 1-1 και οι μιγαδικοί αριθμοί

$z = f(\alpha) + \alpha i$, $w = f(\beta) + \beta i$, όπου α, β οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 2008 = 0$ με $\alpha < \beta$.

i) Αν $z \cdot w \in \mathbb{I}$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f τέμνει τον άξονα x' σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

ii) Αν $z \cdot \bar{w} \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f τέμνει την ευθεία $\psi = 0$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

45. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Αν ισχύει $5\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,2]$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{|xz + \bar{z}| - |z|}{x}, & x \neq 0 \\ |z|, & x = 0 \end{cases}$, όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε ο $z \in \mathbb{R}^*$.

ii) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

iii) Αν $z \in \mathbb{R}^*$, τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός ξ , τέτοιος ώστε $f(\xi) = 0$.

47. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ και η εξίσωση

$$\left| \frac{z - f(\alpha) \cdot i}{z + f(\beta) \cdot i} \right| = 1, z \in \mathbb{C}, z \neq -f(\beta) \cdot i, \text{ που έχει πραγματική ρίζα.}$$

i) Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.

ii) Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο (α, β) .

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(|z|x) + \alpha}{x}, & x > 0 \\ -\beta, & x = 0 \\ \frac{x^2 - \beta x + \gamma}{x}, & x < 0 \end{cases}, z \in \mathbb{C}, z \neq 0.$

- i) Αν ο μιγαδικός z κινείται σε κυκλικό δίσκο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 1 και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, να δείξετε ότι $\alpha=\gamma=0$ και $\beta \geq -1$.
 ii) Αν $\alpha^2 + \gamma^2 = 0$, $|z| + \beta = 0$ και $\beta + 1 \geq 0$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in \left[-1, \frac{1}{|z|}\right)$.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$.

- i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
 ii) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
 iii) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς τη συνέχεια.
 iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$, όπου $\alpha \in (-1, +\infty)$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

50. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2x(f(x) + \eta\mu x) = \eta\mu^2 x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) > 1, f(-1) < -1.$$

- i) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 ii) Να δείξετε ότι $f(x) = 2x + \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.
 iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
 iv) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x)$.
 v) Να υπολογίσετε τα όρια της συνάρτησης f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.
 vi) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.
 vii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 4} + \alpha x + \beta, & x \geq 0 \\ \frac{\eta \mu x}{x} + |w + i|, & x < 0 \end{cases}$

συνεχής στο 0, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = -\beta = -1$.

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (c) των εικόνων M του μιγαδικού αριθμού w.

iii) Αν $A(w_1)$, $B(w_2)$ σημεία του (c) με $|w_1 - w_2| = 4$, να βρείτε το $|w_1 + w_2|$.

iv) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

52. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$

για την οποία ισχύει: $|f(x) - f(\psi)| \leq \frac{|x - \psi|}{2}$ για κάθε $x, \psi \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

β) η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

γ) υπάρχει μοναδικό $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

53. Έστω f και g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[1, 8]$ για τις οποίες

ισχύει $f(1) + f(4) + f(8) = 13 + g(1) + g(4) + g(8)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα

τουλάχιστον $x_0 \in [1, 8]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0 + g(x_0)$.

54. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x < 0$ και

$f(-1) > 0$. Επίσης, δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = f(x) + e^x \cdot i$ για τον οποίο

ισχύει $\operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2\operatorname{Re}(z)$.

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ii) Αν $f(x) = \sqrt{1 - e^{2x}}$, να βρείτε το όριο της συνάρτησης f στο $-\infty$.

iii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του a .

iv) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{f(x)} + \eta \mu \frac{1}{x} \right)$.