

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)}{h} = 3$,
να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ και να βρείτε την $f'(2)$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - x^2 + 6x}{x-2} = 6$,
να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ και να βρείτε την $f'(2)$.
3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 8$ και $f(2) = 5$,
να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
- α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 20}{x-2}$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x) - 5}{x-2}$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ισχύει
 $f^3(x) + x f^2(x) = x^3 + \eta \mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $f'(0)$.
5. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 250$,
να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0 - 3h) + 12h}{h} = 2012$
6. Αν $|f(x) - g(x)| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g είναι
παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
7. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση
- $$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - x + \beta & , \ x < 2 \\ 2 & , \ x = 2 \\ x^3 + \gamma x - 4 & , \ x > 2 \end{cases} \text{ να είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2.$$

8. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο $x_0 = 3$ με $f(3) - g(3) = 9$. Αν $f(x) \leq x^2 + g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f'(3) - g'(3) = 6$.

9. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = a$. Αν $g(x) = |x - a|f(x)$ να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$, αν και μόνο αν, $f(a) = 0$.

10. Αν $g(x) = \begin{cases} f(x) \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και $f(0) = f'(0) = 0$, να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

11. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα a και β . Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ και $f(a) = f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι $f'(a)f'(\beta) \leq 0$.

12. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = -1$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^*$ ικανοποιεί τη σχέση $f(xy) = f(x) + f(y) - 2xy + 2x + 2y$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$.

13. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$, η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x)\sin 2y + f(y)\sin 2x$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = \sin 2x$.

14. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = \xi > 0$, η οποία για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι α) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) $f'(x) = \frac{\xi}{x} f'(\xi)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

15. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$. Αν $f(x) \neq 2$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x-y) = \frac{f(x) + 2f(y) - 6}{f(y) - 2}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x) - 2$.

16. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x\psi) = f(x) \cdot f(\psi)$ για κάθε $x, \psi > 0$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και f παραγωγίσιμη στο ξ , $\xi > 0$. Να δείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$. ii) $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

iii) f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} = \frac{\xi \cdot f'(\xi)}{f(\xi)}$ για κάθε $x > 0$.

17. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $f(0) = f'(0) = 0$.

18.i) Αν $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$ ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

με $\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq \rho_1$, να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{f'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{f'(\rho_3)} = 0$.

ii) Ένα πολυώνυμο $F(x)$ βαθμού $n \geq 2$ με $n \in \mathbb{N}$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$, αν και μόνο αν, ισχύει $F(\rho) = F'(\rho) = 0$.

19. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha+\beta) \leq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $f(0)=0$ και $f'(0)=13$, να αποδείξετε ότι $f'(x)=13$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη, η οποία για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι $x^2 f''(x) = y^2 f''(y)$.

21.A. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν η f είναι 1-1, να αποδείξετε ότι η f^{-1} παραγωγίζεται στο $f(\Delta)$ με $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$, $y \in f(\Delta)$ με $y = f(x)$.

B. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f αντιστρέφεται

β) η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με $(f^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \exp x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f αντιστρέφεται

β) η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

Δ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2, x \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $M(-1, f^{-1}(-1))$.

22. Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0$

για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Αν $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο

A με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+\alpha}{e^x}, \alpha \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι το σημείο M διαγράφει την καμπύλη $y = e^{-x}$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \alpha x$ με $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α₁) Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

α₂) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά κινούνται πάνω σε μια σταθερή ευθεία για τις διάφορες τιμές του α .

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εφαπτόμενες της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$, διέρχονται από σταθερό σημείο.

25. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(1) + f'(1) = 0$

και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x) = 2f(e^{\frac{x}{2}}), x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

26. Έστω συνάρτηση $g(x) = f(e^{x-1} + 2x)$, όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 2$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $M(3, f(3))$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $N(1, g(1))$.

27. i) Έστω σημείο $P(\alpha, \beta)$ με $\beta < 2\alpha^2$ και η παραβολή $f(x) = 2x^2 + 1$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο εφαπτόμενες της παραβολής που διέρχονται από το P .

ii) Αν το P είναι σημείο της ευθείας $y = \frac{7}{8}$, τότε να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές

είναι κάθετες. Επίσης, αν το P είναι σημείο της ευθείας $x = \frac{1}{8}$, τότε να δείξετε ότι

είναι $f'(x_1) + f'(x_2) = 1$, όπου x_1, x_2 οι τετμημένες των σημείων επαφής των δυο αυτών εφαπτομένων.

28. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $e^x(x-1)^2 = 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 3)$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$ δέχονται κοινή εφαπτομένη.

29. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $4x^2(\ln x - 1) = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = -x^2$ δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x + \ln x + 4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M με τετμημένη $\xi \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ και $g(x) = \frac{\beta}{x}$, $\beta \neq 0$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες οι C_f και C_g έχουν κοινό σημείο στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

32. Έστω συνάρτηση $f_\alpha(x) = \alpha x^3 - (\alpha + 1)x - 6\alpha + 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_α , για τις διάφορες τιμές του α , διέρχονται από σταθερό σημείο M , το οποίο και να βρεθεί.

β) Να προσδιορίσετε την τιμή του α για την οποία η ευθεία OM εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f_α στο M , όπου O η αρχή των αξόνων.

33. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

και $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ημ x έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.

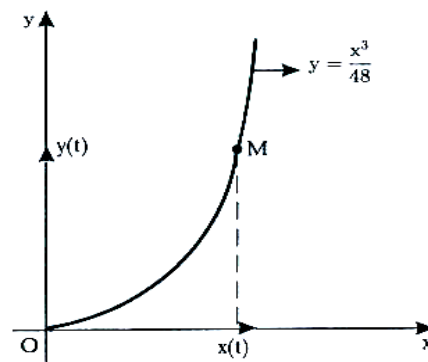
34. Κινητό σημείο M διαγράφει την καμπύλη $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ με $0 \leq x \leq 2$

και $0 \leq y \leq \sqrt{2}$. Αν η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό $2 \mu/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του M από την αρχή των αξόνων O , όταν η απόσταση αυτή είναι $\sqrt{3}$ μονάδες.

35. Έστω $x > 0$ και E το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(x, e^x)$. Αν ο ρυθμός μεταβολής του x είναι 7 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , όταν είναι $x=3 \text{ cm}$.

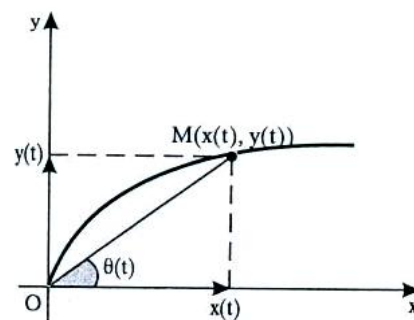
36. Ένα υλικό σημείο απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων κινούμενο στο 1ο τεταρτημόριο κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \frac{1}{48} x^3$.

Να βρείτε τότε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης.



37. Ένα υλικό σημείο M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Αν η τετμημένη x του σημείου M μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec , να βρείτε τη χρονική t_0 που η τετμημένη x είναι 4 cm το ρυθμό μεταβολής
α) της τεταγμένης y του σημείου M .

β) της γωνίας που σχηματίζεται από τη διανυσματική ακτίνα OM και τον ημιάξονα Ox .



38. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = (x+1)^2$ και η τετμημένη του x δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 1$ με $t \geq 0$ (t σε sec και x σε cm).

α) Αν d είναι η απόσταση του σημείου M από το σταθερό σημείο $A(-1, 0)$, να εκφράσετε το d ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του d κατά τη χρονική στιγμή όπου η εφαπτομένη της C_f στο M τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -8)$.

39. Σημείο M κινείται πάνω στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, $x > 1$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec . Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο M με τον άξονα $x'x$.

α) Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται η γωνία θ κατά τη χρονική στιγμή όπου η τετμημένη του M είναι $\sqrt{3} \text{ cm}$.

β) Αν η εφαπτομένη στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A και η προβολή του M στον $x'x$ είναι το σημείο B , να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου AMB κατά τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη στο M διέρχεται από την αρχή των αξόνων.