

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \ln x$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} > e^{e+1}$, $x \geq 1$

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f^{-1}(x)\right)^2 \ln \frac{1}{f^{-1}(x)}$

iv) Να αποδείξετε ότι ισχύει $g(x) < 0$ κοντά στο $-\infty$, όπου $g(x) = \frac{f^{-1}(x) + x}{\ln f^{-1}(x)}$