

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - 2xf(x) - 1 = \eta\mu x$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{\pi}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + \eta\mu x} + 1 + x, x \in \mathbb{R}$

β) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση για κάθε $\alpha > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} = 3$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική λύση στο $(0, +\infty)$