

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = \int_2^x t\sqrt{t^2-1} dt$

2. $f(x) = \int_3^{x^2-4} \frac{1}{t} dt$

3. $f(x) = \int_0^{\ln x} \frac{t+1}{e^t} dt$

4. $f(x) = \int_2^{\sqrt{x}} \eta \mu t^2 dt$

5. $f(x) = \int_2^{x-1} \sqrt{t^2-1} dt$

6. $f(x) = \int_{2x-4}^{x^2-x} \frac{e^t}{t} dt$

7. $f(x) = \int_1^{\ln x} \sqrt{t-1} dt$

Στη τρίτη συνάρτηση, να εξετάσετε τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα ακρότατα.

Στη έβδομη συνάρτηση, να εξετάσετε τη μονοτονία, τη κυρτότητα και να υπολογίσετε τα ακρότατα και τα σημεία καμψής (αν υπάρχουν).

2. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t} f(x-t) dt$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x e^{-t} f(x-t) dt = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

3. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

i) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -2xf^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \sin 2x)$.

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001)

4. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f(x) = 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $e^x f(x) - e^{2x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

5. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$2\sin x + \int_0^x t f(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du - x \eta \mu x + 2$$

Αν $f(0) = 1$, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $xf'(x) = x \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

6. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{\eta \mu t}{t + \pi} dt \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{2x}^{3x} \frac{1}{\ln(t^2 + 2)} dt \right)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-1)^2} \int_1^x \frac{\ln t}{e^t} dt \right) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{x} \int_{2x}^{5x} \frac{\eta \mu t}{t} dt \right)$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x \frac{e^t - 1}{t + 1} dt \right) \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\int_1^x \frac{\ln t}{t(x-1)^2} dt \right)$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_{-e}^{\epsilon \phi x} \frac{t}{t^2 + 1} dt + \int_{-e}^{\sigma \phi x} \frac{1}{t^3 + t} dt$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$.

Να αποδείξετε ότι $g(x) = -1$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$.

8. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\int_1^x x f(t) dt - \int_0^{x^2-1} g(t) dt \geq x^2 + x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι $f(1) = 2g(0) + 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

9. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $g(x) = \int_{x^2-x}^{x+3} f(t)dt - x^2 + 2x + 3$, είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγό της .

β) αν $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

i) $g'(-1) = g'(3) = 0$.

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 6)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

10. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $g(x) = \int_{2-x}^{x^2} f(t)dt - x^2 - x + 2$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

και να βρείτε την παράγωγό της .

β) αν $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

i) $g'(-2) = g'(1) = 0$.

ii) η συνάρτηση f έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(1, 4)$.

11. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z|f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0 \text{ όπου } z = (\alpha + \beta i) \in \mathbb{C}, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \text{ τότε:}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την g' .

β) Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$.

γ) Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος (β) να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

δ) Αν επιπλέον ισχύει $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2004)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

12. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και ισχύει $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.
13. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^1 f(x) dx = \xi f(\xi)$.
14. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $\int_0^1 f(x) dx = 1 + \int_0^1 g(x) dx$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = g(\xi) + 3\xi^2$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^{\ln x} \frac{te^t}{1+e^t} dt$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, 1]$.
 - Να αποδείξετε ότι :
 i) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{\ln x} \frac{t}{1+e^t} dt$ και ii) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln^2 x$
16. Α) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[-a, a]$. Να αποδείξετε ότι :
- Αν f περιττή συνάρτηση, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
 - Αν f άρτια συνάρτηση, τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

B) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \eta \mu^2 x} dx \quad \beta) \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{2004} \sin x dx$$

$$\gamma) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x) dx, \text{ όπου } f \text{ συνεχής συνάρτηση στο } \mathbb{R}.$$

17. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(a-x) + f(x) = ax - x^2, \text{ όπου } a \text{ σταθερός πραγματικός αριθμός,}$$

$$\text{να αποδείξετε ότι } \int_0^a f(x) dx = \frac{a^3}{12}.$$

18. Αν f συνεχής στο $[-a, a]$ και για κάθε $x \in [-a, a]$ ισχύει

$$f(x) + f(-x) = |x|, \text{ να αποδείξετε ότι } \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{a^2}{2}.$$

19. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(2a-x) = f(x)$,

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

20. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(a-x) + f(a+x) = \beta$, όπου

$$a, \beta \text{ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι } \int_0^{2a} f(x) dx = a\beta.$$

21. α) Αν f συνεχής στο $[0, a]$, να αποδείξετε ότι $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$.

$$\beta) \text{ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta \mu x + \sin x} dx.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

22. α) Αν f συνεχής στο $[α, β]$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \tan^3 x} dx$.

23. Αν f συνεχής στο $[α, β]$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, να

αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

24. Να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sigma\upsilon\nu x)}{f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x)} dx = \frac{\pi}{4},$$

όπου f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

25. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x - \alpha)}{f(x - \alpha) + f(\beta - x)} dx = \frac{\beta - \alpha}{2}$, όπου f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x - \alpha) + f(\beta - x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

26. Αν f συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$, να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $\int_2^5 \frac{f(x - 2)}{f(x - 2) + f(5 - x)} dx$ είναι ανεξάρτητο της f .

27. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και ισχύει ότι $f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c$ για κάθε $x \in [α, β]$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta)).$$

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1996)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x > 0$.

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι $f(t) \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $t \in [x, x+1]$, $x > 0$.

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{x+1} f(t) dt \right)$.

29. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$, τη συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$ και τη συνάρτηση

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) $g(x_0) = 2 + f(x_0)$.

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1995)

30. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

i) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii) $f'(x) + 2xf(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iii) Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f .

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x-1}{2x^2} f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{x-1}{2}$, $x > 1$

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) f(t) dt$, $x > 1$

δ) Να αποδείξετε ότι $2e \int_1^x e^{-t^2} dt < 1$ για κάθε $x > 1$

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1998)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

31. Να βρείτε συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0) = 1995$, $f'(0) = 1$ και

$$1 + \int_0^x f''(t) \sin t \, dt = \sin^2 x + \int_0^x f'(t) \eta \mu t \, dt.$$

(ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1995)

32. α. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \sqrt{\ln x} \, dx + \int_0^1 e^{x^2} \, dx = e$

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt$.

β₁) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β₂) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της και στη συνέχεια, να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β₃) Να δείξετε ότι ισχύει: $e^{\int_0^\alpha e^{t^2} \, dt} \cdot e^{\int_0^\beta e^{t^2} \, dt} > e^{\frac{\alpha+\beta}{2} \int_0^{\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{t^2} \, dt}$, όπου $0 < \alpha < \beta$

γ₁) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $K(x) = f(x) - e^x + e$, $x \in \mathbb{R}$.

γ₂) Να δείξετε ότι: i) $f(x) > e^x - e$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii) $f(x) \leq e^x - 1$, για κάθε $x \in (-\infty, 1)$.

δ) Να βρείτε το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της K , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=1$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{\frac{\ln x}{2}}^{\ln x} t \sqrt{t-1} \, dt$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\ln x}{2}}^{\ln x} t \sqrt{t-1} \, dt$.

iv) Να δείξετε ότι η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(e, +\infty)$.

v) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι έχει σημείο καμπής με τετμημένη τη ρίζα της $f(x)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

34. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x) = f(x) - \alpha \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt, \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 0.$$

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, \quad x > 0$

για την οποία ισχύει $\int_0^1 g(x) dx = 1 - \ln \sqrt{2}.$

i) Να δείξετε ότι: α) $g(1) = 1$ και β) $\int_0^x \frac{1}{x^2 + t^2} dt = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, και το πρόσημο για τις διάφορες τιμές του α .

iii) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x \cdot \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt \right).$

35. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x) = 12e^x - 11, \quad x > 0.$$

i) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, f^{-1}.$

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \int_1^x \frac{g(t)}{12e^{f^{-1}(t)} - 6} dt = 2$

έχει ακριβώς μια λύση στο $(1, 2)$, όπου g συνάρτηση συνεχής στο $[1, 2]$ με $g([1, 2]) = [1, 2].$

36. Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$g(0) = 0, g'(0) = 1 \text{ και } g''(0) = 6.$$

Επίσης, $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}.$

i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii) Να βρείτε την παράγωγο της f .

iii) Να εξετάσετε αν η f' είναι συνεχής στο 0.