ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ και $(1+iz)^{\nu} = \dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός.

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία κύκλου του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $4 < |z-3+4i| < 7$

ε) Αν οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ικανοποιούν την (1) να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \le 2$

Λύση

α) Έστω $z \in \mathbb{R}$, τότε από την (1) έχουμε

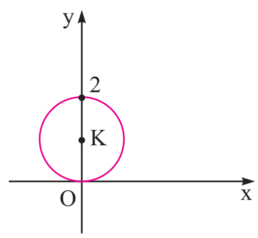
$$\left|(1+iz)^{\nu}\right| = \left|\frac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i}\right| \Leftrightarrow |1+iz|^{\nu} = \frac{|\alpha+\beta i|}{|\beta+\alpha i|} \Leftrightarrow |1+iz|^{\nu} = 1 \Leftrightarrow |1+iz| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+z^2} = 1 \Leftrightarrow z = 0,$$

όμως για $z=0$ η (1) γράφεται $\dfrac{\alpha+\beta i}{\beta+\alpha i} = 1 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)+(\beta-\alpha)i = 0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$, άτοπο από υπόθεση.

β) Από την (1) έχουμε

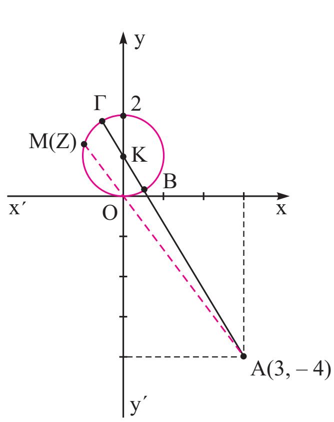
$$|1+iz| = 1 \Leftrightarrow |iz - i^2| = 1 \Leftrightarrow |i|\cdot|z-i| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = 1,$$

άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.



γ) Είναι $|z|_{\mu\varepsilon\gamma} = 2$, όταν $z = 2i$ και $|z|_{\varepsilon\lambda} = 0$, όταν $z = 0$

δ) Το $|z-3+4i| = |z-(3-4i)|$ και παριστάνει την απόσταση των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z από το σημείο $A(3,-4)$. Αν B, Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας AK με τον κύκλο, τότε έχουμε: $(AB) \le (AM) \le (A\Gamma)$, όμως $(AK) = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ και $(AB) = (AK) - \rho = \sqrt{34} - 1$, $(A\Gamma) = (AK) + \rho = \sqrt{34} + 1$, επομένως $\sqrt{34} - 1 \le |z-3+4i| \le \sqrt{34} + 1$, όμως $\sqrt{34} + 1 < 7$ και $4 < \sqrt{34} - 1$, άρα $4 < |z-3+4i| < 7$



ε) Οι εικόνες Δ, E των z_1, z_2 είναι σημεία του κύκλου $|z-i| = 1$, άρα $|z_1 - z_2| = (\Delta E) \le 2\rho = 2$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$ και

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

β) **Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.**

Λύση

α) Έχουμε $2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{z_1}{z_2} + \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Leftrightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = -|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = -\rho^2 \quad (1).$$

Ομοίως έχουμε $z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 = -\rho^2$ (2) και $z_1\overline{z_3} + \overline{z_1}z_3 = -\rho^2$ (3)

Είναι $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)\left(\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_3} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + |z_2|^2 + \left(z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2}\right) + |z_3|^2 + \left(z_1\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \rho^2 + \rho^2 - \rho^2 + \rho^2 - \rho^2 = 0$$, αληθές. Άρα $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Επειδή $z_2 = -z_1 - z_3$ διαδοχικά έχουμε:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)\left(2\overline{z_1} + \overline{z_3}\right) = (z_1 + 2z_3)\left(\overline{z_1} + 2\overline{z_3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2\overline{z_1}z_3 + z_3\overline{z_3} = z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_3} + 2z_3\overline{z_1} + 4z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$$, αληθές. Άρα $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$.

Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, οπότε $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Άρα το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και z_1, z_2, είναι οι ρίζες της με $z_1 = 2 + i$

1) Να βρείτε τους αριθμούς α, β.

2) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2008} + z_2^{2008}$ είναι πραγματικός.

3) Έστω $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{1}{5} \cdot (17 + i)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

β) Αν $|w - z_1| = |\overline{w} - z_1|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w, που επαληθεύουν την εξίσωση $|w - z_2| + |\overline{w} - z_2| = 10$, βρίσκονται σε έλλειψη.

Λύση

1) Έχουμε την εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ (1), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αφού $z_1 = 2 + i$ ρίζα της (1) τότε ρίζα της θα είναι και η $z_2 = \overline{z_1} = 2 - i$, οπότε από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $z_1 + z_2 = -\dfrac{-\alpha}{1} \Leftrightarrow (2+i) + (2-i) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4$

$$z_1 z_2 = \frac{\beta}{1} \Leftrightarrow (2+i)(2-i) = \beta \Leftrightarrow 2^2 + 1^2 = \beta \Leftrightarrow \beta = 5$$

2) Έστω $u = z_1^{2008} + z_2^{2008} = z_1^{2008} + \left(\overline{z_1}\right)^{2008}$

$$\overline{u} = \overline{z_1^{2008} + z_2^{2008}} = \overline{z_1^{2008}} + \overline{\left(\overline{z_1}\right)^{2008}} = \left(\overline{z_1}\right)^{2008} + z_1^{2008} = u$$

Έχουμε $\overline{u} = u \Leftrightarrow u - \overline{u} = 0 \Leftrightarrow 2i \cdot \mathrm{Im}(u) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \mathbb{R}$

3) α) Είναι $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{1}{5}(17 + i) = \dfrac{2+i}{2-i} + \dfrac{1}{5}(17+i) = \dfrac{(2+i)^2}{2^2+1^2} + \dfrac{1}{5}(17+i) = \dfrac{4+4i-1}{5} + \dfrac{1}{5}(17+i) =$

$$= \frac{3 + 4i + 17 + i}{5} = \frac{20 + 5i}{5} = 4 + i$$

Οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο αντίστοιχα είναι $A(2,1)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma(4,1)$. Έχουμε:

$$(AB) = |z_2 - z_1| = |2 - i - 2 - i| = |-2i| = |-2| \cdot |i| = 2$$

$$(B\Gamma) = |z_3 - z_2| = |4 + i - 2 + i| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(A\Gamma) = |z_1 - z_3| = |2 + i - 4 - i| = |-2| = 2$$

Παρατηρούμε ότι $AB = A\Gamma$. Επίσης $AB^2 = 2^2 = 4$, $A\Gamma^2 = 2^2 = 4$, $B\Gamma^2 = 8$, δηλαδή $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

β) $|w-z_1|=|\overline{w}-z_1| \Leftrightarrow |w-z_1|=|\overline{w}-\overline{z_2}| \Leftrightarrow |w-z_1|=|\overline{w-z_2}| \overset{|\overline{z}|=|z|}{\Leftrightarrow} |w-z_1|=|w-z_2|$ (1)

(εξίσωση μεσοκαθέτου)

Έστω: $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, $M(x,y)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο τότε η (1) γίνεται:

$|x+yi-2-i|=|x+yi-2+i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y-1)i|=|(x-2)+(y+1)i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow \cancel{(x-2)^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{(x-2)^2}+\cancel{y^2}+2y+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0$. Άρα $w\in\mathbb{R}$.

γ) $|w-z_2|+|\overline{w}-z_2|=10 \Leftrightarrow |w-z_2|+|\overline{w}-\overline{z_1}|=10 \Leftrightarrow |w-z_2|+|\overline{w-z_1}|=10 \overset{|\overline{z}|=|z|}{\Leftrightarrow}$

$|w-z_2|+|w-z_1|=10(=2\cdot 5=2\cdot\alpha)$ (1)

Παρατηρούμε ότι $|z_2-z_1|=2\cdot 1=2\gamma$

Έχουμε $2\gamma<2\alpha$ άρα η (1) είναι εξίσωση έλλειψης.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και ο μιγαδικός αριθμός $z\in\mathbb{C}$. Αν ισχύει $f'(x)i^{-2008}+2xi^{-2006}=|2z+2|i^{2007}-|z-1|i^{-2009}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$ και $|z-1|=|2z+2|$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται η γραφική παράσταση της f και το ορθογώνιο με κορυφές $O(0,0)$, $A(\kappa,0)$, $B(\kappa,\kappa^2+1)$ και $\Gamma(0,\kappa^2+1)$, $\kappa>0$. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η γραφική παράσταση της f να διαιρεί το ορθογώνιο ΟΑΒΓ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

α) $f'(x)i^{-2008}+2xi^{-2006}=|2z+2|i^{2007}-|z-1|i^{-2009}$ (1)

$i^{-2008}=\frac{1}{i^{2008}}=\frac{1}{i^{4\cdot 502}}=\frac{1}{(i^4)^{502}}=\frac{1}{1}=1$, $\quad i^{-2006}=\frac{1}{i^{2006}}=\frac{1}{i^{4\cdot 501+2}}=\frac{1}{i^2}=-1$

$i^{2007}=i^{4\cdot 501+3}=i^3=i^2\cdot i=-i$, $\quad i^{-2009}=\frac{1}{i^{2009}}=\frac{1}{i^{4\cdot 502+1}}=\frac{1}{i}=\frac{-i}{-i^2}=-i$

$$(1)\Leftrightarrow f'(x)-2x=-|2z+2|i+|z-1|i \Leftrightarrow f'(x)+|2z+2|i=2x+|z-1|i \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=2x \\ \text{και} \\ |2z+2|=|z-1| \end{cases}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)=2x \Leftrightarrow f'(x)=(x^2)'$, άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=x^2+c$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1\Leftrightarrow 0^2+c=1\Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $|2z+2|=|z-1| \Leftrightarrow |2(z+1)|=|z-1| \Leftrightarrow 2|z+1|=|z-1|$ (2)

Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ και $M(x,y)$ η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η (2) γράφεται:

$$2|x+yi+1|=|x+yi-1| \Leftrightarrow 2|x+1+yi|=|x-1+yi| \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \Leftrightarrow 4\left(x^2+2x+1+y^2\right)=x^2-2x+1+y^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8x+4+4y^2-x^2+2x-1-y^2=0 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+10x+3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{10}{3}x+1=0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=\frac{10}{3}$, $B=0$ και $\Gamma=1$.

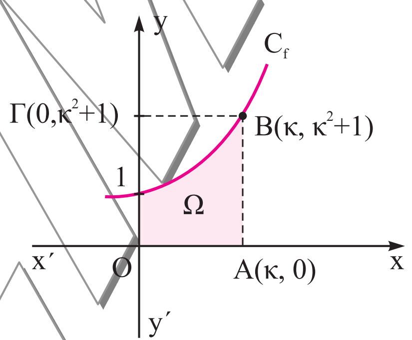
Παρατηρούμε ότι $A^2+B^2-4\Gamma=\left(\frac{10}{3}\right)^2-4\cdot 1=\frac{100}{9}-4=\frac{64}{9}>0$.

Άρα η (3) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K\left(-\frac{5}{3},0\right)$ και

ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{4}{3}$. Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι

ο κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{5}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{4}{3}$

γ)



Αν Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=\kappa$, τότε το εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^{\kappa}|f(x)|dx=\int_0^{\kappa}\left|x^2+1\right|dx\overset{x^2+1>0}{=}\int_0^{\kappa}\left(x^2+1\right)dx$$

Το εμβαδόν E' του ορθογωνίου ΟΑΒΓ είναι $E'=\beta\cdot\upsilon=\kappa\cdot\left(\kappa^2+1\right)$ άρα πρέπει:

$$E(\Omega)=\frac{1}{2}E' \Leftrightarrow \int_0^{\kappa}\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}\kappa\left(\kappa^2+1\right) \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^{\kappa}=\frac{1}{2}\kappa\left(\kappa^2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}\kappa^2+1\right)\kappa=\frac{1}{2}\kappa\left(\kappa^2+1\right)\overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{3}\kappa^2+1=\frac{1}{2}\kappa^2+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa^2=3 \text{ άρα } \kappa=\sqrt{3}$$

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(-1)>0$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=\frac{f(-1)f(0)}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, για τον οποίο ισχύει ότι $|z|=\frac{z}{2}(1-\sqrt{3}i)$. Να αποδείξετε ότι

α) $f(-1)f(0)f(1)=8$

β) $2\mathrm{Re}(z)=|z|$

γ) $f(-1)<2<f(1)$

δ) η f αντιστρέφεται και ισχύει $-1<f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right)<0$

Λύση

α) Είναι $-1<0<1$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως $f(-1)<f(0)<f(1)$, όμως $f(-1)>0$, άρα $f(1)>f(0)>0$ (1).

Επίσης έχουμε

$$|z|=\frac{z}{2}(1-\sqrt{3}i)=\frac{1}{2}\left(\frac{f(-1)f(0)}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{f(1)}i\right)(1-\sqrt{3}i)=$$

$$=\frac{f(-1)f(0)}{4}+\frac{6}{f(1)}+i\left(\frac{2\sqrt{3}}{f(1)}-\frac{\sqrt{3}f(-1)f(0)}{4}\right)$$

Όμως $|z|$ είναι πραγματικός αριθμός, άρα

$$\frac{2\sqrt{3}}{f(1)}-\frac{\sqrt{3}f(-1)f(0)}{4}=0\Leftrightarrow 8\sqrt{3}-\sqrt{3}f(-1)f(0)f(1)=0\Leftrightarrow f(-1)f(0)f(1)=8 \quad (2)$$

β) Έχουμε $|z|=\frac{f(-1)f(0)}{4}+\frac{6}{f(1)}$ με αντικατάσταση του $f(1)=\frac{8}{f(-1)f(0)}$ σύμφωνα με τη σχέση (2), προκύπτει ότι $|z|=\frac{f(-1)f(0)}{4}+\frac{6f(-1)f(0)}{8}=f(-1)f(0)=2\mathrm{Re}(z)$.

γ) Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι, αν οι τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ είναι μικρότερες του 2 τότε το γινόμενό τους θα είναι μικρότερο του 8. Άτοπο γιατί το γινόμενό τους είναι ίσο με 8. Άρα θα υπάρχει κάποια τιμή από τις τρεις μεγαλύτερη του 2 και αυτή είναι η $f(1)$. Αν οι παραπάνω τιμές είναι μεγαλύτερες του 2 τότε το γινόμενό τους θα είναι μεγαλύτερο του 8. Άτοπο, άρα θα υπάρχει κάποια τιμή από τις τρεις μικρότερη του 2 και αυτή είναι η $f(-1)$. Επομένως ισχύει $f(-1)<2<f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι και ″1 – 1″ , οπότε αντιστρέφεται. Θέλουμε

$$-1 < f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right) < 0 \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{|z|} < f(0) \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{f(-1)f(0)} < f(0) \Leftrightarrow$$

$$f^2(-1) < f(-1)f(0) < f^2(0) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(-1) < f(-1)f(0) \\ f(-1)f(0) < f^2(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) < f(0) \\ f(-1) < f(0) \end{cases}$$

που είναι αληθές γιατί $f(0) > f(-1) > 0$. Επομένως ισχύει και η αρχική.

Θέμα 6ο

Α) Έστω $w \in \mathbb{C}$ τέτοιος, ώστε $\alpha w + \beta \overline{w} + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha \overline{w} + \beta w + \gamma = 0$ ii) $w \in \mathbb{R}$

Β) Αν ο μιγαδικός αριθμός z επαληθεύει τη σχέση $2z^3\overline{z} + 5z\overline{z}^3 + 7 = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $z^3\overline{z} = z\overline{z}^3 = -1$ ii) $|z| = 1$

β) Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z.

Λύση

Α) i) Είναι $\alpha w + \beta \overline{w} + \gamma = 0$ (1)

Παίρνοντας τους συζυγείς και των δύο μελών της (1) έχουμε $\alpha \overline{w} + \beta w + \gamma = 0$ (2)

ii) Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$\alpha(w-\overline{w}) - \beta(w-\overline{w}) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(w-\overline{w}) = 0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} w = \overline{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w - \overline{w} = 0 \Leftrightarrow 2i \cdot \mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$

Β) α) i) Είναι $2z^3\overline{z} + 5z\overline{z}^3 + 7 = 0$ (3)

Παίρνοντας τους συζυγείς και των δύο μελών της (3) έχουμε $2\overline{z}^3 z + 5\overline{z}z^3 + 7 = 0$ (4)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε

$$3z\overline{z}^3 - 3z^3\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z\overline{z}^3 = z^3\overline{z} \quad (5)$$

Από (3) και (5) προκύπτει ότι $z\overline{z}^3 = z^3\overline{z} = -1$

ii) Είναι $z^3\overline{z} = -1$, οπότε $|z^3\overline{z}| = 1 \Leftrightarrow |z|^3|\overline{z}| = 1 \Leftrightarrow |z|^3|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^4 = 1 \overset{|z|\geq 0}{\Leftrightarrow} |z| = 1$

β) Έχουμε $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$ και $z^3\overline{z} = -1$ οπότε $z^3\dfrac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm i$

ΘΕΜΑ 7°

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με:

$$g(x)=\frac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2},\ \ \kappa\in\mathbb{R}$$

α) Να αιτιολογήσετε την άποψη ότι έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)\ \ \text{και}\ \ \lim_{x\to+\infty}g(x)$$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

γ) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2008)<0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

δ) Αν $f(\kappa)\in[0,1]$ και για τη συνάρτηση $h(x)=g(x)+2008+\beta$, $x\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$, να βρείτε τις τιμές των β και $f(\kappa)$.

Λύση

α) Είναι $g(x)=\dfrac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2}$, $\kappa\in\mathbb{R}$

Μπορούμε να αναζητήσουμε τα $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ αν το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ και $(\beta,+\infty)$ αντίστοιχα. Επειδή η g είναι ρητή της μορφής $g(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ το πεδίο ορισμού είναι $D_g=\mathbb{R}-\{x_0\in\mathbb{R}:Q(x_0)=0\}$

Επειδή μόνο μεμονωμένες τιμές μπορεί να μηδενίζουν τον παρονομαστή άρα το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ και $(\beta,+\infty)$.

β) Αν $f(\kappa)\neq 0$ και $f(\kappa)\neq 1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot x\right]=\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot\lim_{x\to+\infty}x$$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}>0\Leftrightarrow(1-f(\kappa))f(\kappa)>0\Leftrightarrow 0<f(\kappa)<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

ii) Αν $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}<0\Leftrightarrow f(\kappa)<0$ ή $f(\kappa)>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

iii) Αν $f(\kappa)=1$ τότε $g(x)=\dfrac{x^5+1}{x^6+4x^4+2}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+1}{x^6+4x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

iv) Αν $f(\kappa)=0$ τότε $g(x)=\dfrac{x^7+x^5+1}{4x^4+2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7}{4x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}x^3\right)=+\infty$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\begin{cases} +\infty, & \text{αν} \quad 0\le f(\kappa)<1 \\ -\infty, & \text{αν} \quad f(\kappa)<0 \text{ ή } f(\kappa)>1 \\ 0, & \text{αν} \quad f(\kappa)=1 \end{cases}$

γ) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, όμως $f(2008)<0$ άρα και $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και $f(\kappa)<0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} x$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, $f(\kappa)<0$, $1-f(\kappa)>0$, άρα $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}<0$ επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

δ) $h(x)=g(x)+2008+\beta \Leftrightarrow h(x)-\beta=g(x)+2008$

Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι αν το $f(\kappa)\in[0,1)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$, άτοπο γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

Αν $f(\kappa)=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-\beta)=\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2008)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)+2008=0+2008=2008$,

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-\beta)=2008 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}\beta=2008 \Leftrightarrow 1-\beta=2008 \Leftrightarrow \beta=-2007$

ΘΕΜΑ 8ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\alpha^{\frac{1}{x}}+\alpha^x-2\alpha x$, με $\alpha>1$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to0^-} f(x),\ \lim_{x\to0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

α) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\cdot α^{\frac{1}{x}}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}α^{\frac{1}{x}} \underset{\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim\limits_{u\to0}α^u \underset{\text{στο } 0}{\overset{α^x \text{ συνεχής}}{=}} α^0=1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}α^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2αx)\overset{α>1}{=}+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2\cdot α^{\frac{1}{x}}\right) \underset{\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{1}{u^2}\cdot α^u\right)=0$, γιατί $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{u^2}=0$ και $\lim\limits_{u\to-\infty}α^u=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^-}α^x=α^0=1$ και $\lim\limits_{x\to0^-}(-2αx)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2\cdot α^{\frac{1}{x}}\right) \underset{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{α^u}{u^2} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\left(α^u\right)'}{\left(u^2\right)'}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{α^u\cdot\ln α}{2u} \underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{α^u\cdot(\ln α)^2}{2}=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}α^x=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(-2αx)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(x\cdot α^{\frac{1}{x}}+\frac{α^x}{x}-2α\right)\right]=+\infty$

β) Για κάθε $x\in A$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=2x\cdot α^{\frac{1}{x}}+x^2\cdot α^{\frac{1}{x}}\cdot\ln α\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+α^x\cdot\ln α-2α=2x\cdot α^{\frac{1}{x}}-α^{\frac{1}{x}}\cdot\ln α+α^x\cdot\ln α-2α$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=2α^{\frac{1}{x}}-2\cdot\dfrac{α^{\frac{1}{x}}\cdot\ln α}{x}+\dfrac{α^{\frac{1}{x}}\cdot(\ln α)^2}{x^2}+α^x\cdot(\ln α)^2=$

$$=α^{\frac{1}{x}}\cdot\left[2-2\cdot\frac{\ln α}{x}+\left(\frac{\ln α}{x}\right)^2\right]+α^x\cdot(\ln α)^2=α^{\frac{1}{x}}\cdot\left[1+\left(1-\frac{\ln α}{x}\right)^2\right]+α^x\cdot(\ln α)^2$$

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in A$, οπότε η f' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$. Άρα για $x>1$, επειδή f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, είναι $f'(x)>f'(1)$, άρα $f'(x)>0$.

Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1)$ άρα $f'(x)<0$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\ln α-2α<0$, γιατί για κάθε $α>1$ είναι

$\begin{cases}\ln α<α-1\\ -α<-1\end{cases}$ άρα $\ln α-α<α-2 \Leftrightarrow \ln α-2α<-2$ άρα $\ln α-2α<0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, οπότε

$f'((-\infty,0)) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x), \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)\right) = (-\infty, \ln\alpha - 2\alpha)$. Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$,

αφού $\ln\alpha - 2\alpha < 0$.

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 1$	‖	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$
				ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=0$.

γ) Το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=(1,+\infty)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$.

δ) Από τον πίνακα μεταβολών έχουμε ότι $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

ΘΕΜΑ 9ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.**
- **Η f έχει όριο στο $+\infty$**
- **$f(x)+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

δ) Η f έχει δεύτερη παράγωγο και είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e+1$ είναι $E=\frac{3}{2}$ τ.μ .

Λύση

α) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+e^{f(x)}\right)=-\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+e^{f(x)}\right)=\ell+e^{\ell}$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο της f στο $+\infty$ υποχρεωτικά $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\left(f(x)+e^{f(x)}\right)'=(x)'$, άρα $f'(x)\cdot\left(1+e^{f(x)}\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}>0$, άρα

η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και ″1−1″, οπότε αντιστρέφεται και ισχύει:

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, άρα έχουμε $y + e^y = f^{-1}(y)$, οπότε $f^{-1}(x) = e^x + x$, $x \in R$.

δ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \dfrac{-f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} < 0$

(αφού $f'(x) > 0$), οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 1$ είναι $f(x) \geq f(1) = 0$, άρα $E = \int_1^{e+1} |f(x)|dx = \int_1^{e+1} f(x)dx$

Θέτουμε $u = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$, οπότε $dx = \left(f^{-1}(u)\right)' du = \left(e^u + u\right)' du = \left(e^u + 1\right)du$

Για $x = 1$ είναι $u = f(1) = 0$, γιατί $f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και

για $x = e + 1$ είναι $u = f(e+1) = 1$, γιατί $f^{-1}(1) = e + 1 \Leftrightarrow f(e+1) = 1$, άρα

$$E = \int_0^1 u\left(e^u + 1\right)du = \int_0^1 ue^u du + \int_0^1 udu = \int_0^1 u\left(e^u\right)' du + \int_0^1 udu = \left[ue^u\right]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 10^o

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 3$$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

Β. Αν $g(x) = \ln f(x)$ τότε:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

β) Να βρείτε την g' και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$

γ) Να αποδείξετε ότι $J + 9I = K$, όπου:

$$J = \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx \quad \text{και} \quad K = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx$$

δ) Να αποδείξετε ότι $J + K = 20$

ε) Να υπολογίσετε τα J, K.

στ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την g^{-1}.

Λύση

Α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + f^2(x) = 2x \cdot f(x) + 10 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow \left(f(x) - x\right)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow h^2(x) = x^2 + 9 \quad (1),$$

όπου $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2+9>0 \Leftrightarrow h^2(x)>0 \Leftrightarrow h(x)\neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $h(0)=f(0)-0=3>0$, οπότε $h(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως από

$(1) \Leftrightarrow h(x)=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$

Β. **α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x+\sqrt{x^2+9}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$. Άρα $A=\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$g'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+9}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)' \Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+9}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\right)\Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+9}}}\cdot\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+9}}}{\sqrt{x^2+9}} \Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$$

Είναι $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4 g'(x)dx=\left[g(x)\right]_0^4=g(4)-g(0)=\ln 9-\ln 3=\ln\frac{9}{3}=\ln 3$

γ) $J+9I=\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx+9\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\sqrt{x^2+9}dx=K$

δ) $K=\int_0^4 (x)'\cdot\sqrt{x^2+9}\,dx=\left[x\cdot\sqrt{x^2+9}\right]_0^4-\int_0^4 x\cdot\left(\sqrt{x^2+9}\right)'dx=$

$=20-\int_0^4 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot\left(x^2+9\right)'dx=20-\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx=20-J$. Άρα $J+K=20$

ε) Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix}J-K=-9I\\ J+K=20\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}J-K=-9\ln 3\\ J+K=20\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}J=10-\frac{9}{2}\ln 3\\ K=10+\frac{9}{2}\ln 3\end{cases}$

στ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}>0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "1−1", άρα αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y=g(x)$ ως προς x. Είναι

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}=e^y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}=e^y-x\overset{e^y>x}{\Leftrightarrow}x^2+9=\left(e^y-x\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+9=e^{2y}-2xe^y+x^2\Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-9\Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-9}{2e^y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-9}{2e^y}$$

Όμως $e^y>x\Leftrightarrow e^y>\frac{e^{2y}-9}{2e^y}\Leftrightarrow 2e^{2y}>e^{2y}-9\Leftrightarrow e^{2y}>-9$, αληθής για κάθε $y\in\mathbb{R}$

Άρα $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-9}{2e^x}$.

ΘΕΜΑ 11ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + i$ με $x \in \mathbb{R}$, $w = z^2 - \frac{1}{z}$ και συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε ο $z^2 - \frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Αν $\alpha < \beta < \gamma$, $f(\beta) = x_0$, $f(\gamma) = -1$ και $f'(\alpha) > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \mathrm{Re}(w)\,dx$

Λύση

α) Είναι $w = z^2 - \frac{1}{z} = (x+i)^2 - \frac{1}{x+i} = x^2 - 1 + 2xi - \frac{x-i}{x^2+1} = \left(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}\right) + \left(2x + \frac{1}{x^2+1}\right)i$, $x \in \mathbb{R}$.

Για να είναι ο $z^2 - \frac{1}{z}$ πραγματικός αριθμός πρέπει και αρκεί $2x + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x + 1 = 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολυωνυμική και
- $g(-1)\cdot g(0) = (-3)\cdot 1 = -3 < 0$.

Ισχύει λοιπόν Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_o \in (-1, 0)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = 6x^2 + 2 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα x_o είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε ο $z^2 - \frac{1}{z}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[\beta, \gamma]$. Ισχύει λοιπόν Θ.Μ.Τ , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\delta \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\delta) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = \frac{-1 - x_0}{\gamma - \beta} = -\frac{x_0 + 1}{\gamma - \beta}$

Είναι $\beta < \gamma \Leftrightarrow \gamma - \beta > 0$, $x_0 \in (-1, 0) \Leftrightarrow -1 < x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 + 1 > 0$, άρα $f'(\delta) < 0$.

Έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \delta]$ και
- $f'(\alpha)\cdot f'(\delta) < 0$

Ισχύει λοιπόν Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

γ) $$\int_0^1 \mathrm{Re}(w)dx = \int_0^1 \left(x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - [x]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' dx =$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{4 + 3\ln 2}{6} = -\frac{4 + \ln 8}{6}.$$

Άρα $\int_0^1 \mathrm{Re}(w)dx = -\frac{4 + \ln 8}{6}$.

ΘΕΜΑ 12^{ο}

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}=10$.

1) Να αποδείξετε ότι: α) $f(3)=7$ β) $f'(3)=5$

2) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση y = 5x – 8.

β) Ένα σημείο Σ, που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία (ε). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 m/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

Λύση

1. α) Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}\Leftrightarrow f(2x+1)=(x-1)h(x)+7$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}f(2x+1)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+7\right]=7$ (1)

Θέτουμε $2x+1=\omega$, (όταν $x\to 1$ το $\omega\to 3$), άρα η $(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{\omega\to 3}f(\omega)=7\overset{f\ \text{συνεχής}}{\Leftrightarrow}f(3)=7$.

β) Για $x\neq 1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}=10\overset{f(3)=7}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-f(3)}{x-1}=10$ (2)

Θέτουμε $2x+1=\omega$, (όταν $x\to 1$ το $\omega\to 3$), άρα η (2) για $\omega\neq 3$ γίνεται

$$\lim_{\omega\to 3}\frac{f(\omega)-f(3)}{\dfrac{\omega-1}{2}-1}=10\Leftrightarrow\lim_{\omega\to 3}\frac{f(\omega)-f(3)}{\dfrac{\omega-3}{2}}=10\Leftrightarrow\lim_{\omega\to 3}\left[2\cdot\frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3}\right]=10,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim\limits_{\omega\to 3}\dfrac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3}=5$, άρα $f'(3)=5$.

2. α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$

$$(\varepsilon):\ y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-7=5(x-3)\Leftrightarrow y=5x-8$$

β) Έστω $\Sigma(x,y)$ σημείο της (ε). Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$(\text{ΟΜΣ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΟΜ}},\overrightarrow{\text{ΟΣ}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3&7\\x&y\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y-7x|=\frac{1}{2}|3(5x-8)-7x|=$$

$$=\frac{1}{2}|8(x-3)|=4|x-3|=4x-12,\ (x>3)$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$\left(E(x(t))\right)'=\left(4x(t)-12\right)'=4x'(t)=4\cdot 2=8\ \text{m}^2/\text{sec}$$

ΘΕΜΑ 13^{ο}

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$

1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$

3) Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$

4) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$

5) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(e,1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο Μ.

Λύση

1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 1 + e^x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Είναι $e^x = 1 - x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Προφανής λύση η $x = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και ″1–1″ η λύση αυτή είναι μοναδική.

3) α) Έστω ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_g$ με $x_1 < x_2$, ώστε

$$\begin{cases} g(x_1) \ge g(x_2) \\ e^{g(x_1)} \ge e^{g(x_2)} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} g(x_1) + e^{g(x_1)} \ge g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1 + 1 \ge 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$$ άτοπο, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Ισχύει $g(0) + e^{g(0)} = 1$ προφανής λύση η $g(0) = 0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και ″1–1″ η λύση αυτή είναι μοναδική.

4) Είναι $g(f(x)) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

5) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και ″1–1″.

Το σημείο $M \in C_{f^{-1}}$, αν και μόνο αν, το συμμετρικό του Μ ως προς την $y = x$, δηλαδή το σημείο $N(1,e) \in C_f$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Ν είναι:

$$(\varepsilon):\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = (1+e)x - 1$$

Η συμμετρική της (ε) ως προς την $y = x$ θα είναι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο Μ και βρίσκουμε ότι έχει εξίσωση $y = \dfrac{1}{1+e}x + \dfrac{1}{1+e}$

ΘΕΜΑ 14ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_2^{x^2-3}\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}dt$

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

3) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{f(x)}{x-\sqrt{5}}=0$

4) Να αποδείξετε ότι η C_f **εφάπτεται στον άξονα** $x'x$**, σε δύο σημεία.**

5) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $z=f(3)-2i$**. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z στο επίπεδο βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο.**

Λύση

1) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(t)=\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}$ και $F(x)=\int_2^x g(t)dt$.

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη και συνεχής στο $A_g=(1,+\infty)$, το $2\in(1,+\infty)$, άρα η συνάρτηση F έχει πεδίο ορισμού το $A_F=(1,+\infty)$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $h(x)=x^2-3$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$f(x)=(F\circ h)(x)=F(h(x))=\int_2^{x^2-3}\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}dt$$

Είναι $A_f=\{x\in A_h\,/\,h(x)\in A_F\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,(x^2-3)\in(1,+\infty)\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-3>1\}=$

$$=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2>4\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|>2\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>2 \text{ ή } x<-2\}\neq\varnothing$$

Επομένως $A_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

2) Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $h(x)=x^2-3$ και $F(x)=\int_2^x g(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης g.

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ έχουμε

$$f'(x)=\left(\int_2^{x^2-3}\frac{\ln(t-1)}{t^2+1}dt\right)'=\frac{\ln(x^2-4)}{(x^2-3)^2+1}\cdot(x^2-3)'=\frac{2x\cdot\ln(x^2-4)}{(x^2-3)^2+1}$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{ή}\\ x^2-4=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{ή}\\ x^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\notin A_f & \text{απορρίπτεται}\\ \text{ή}\\ x=\pm\sqrt{5}\in A_f & \text{δεκτές}\end{cases}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς και η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-2	2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	‖	$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	‖	‖	↘	0	↗	
			ελάχιστο					ελάχιστο		

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right]$ και $\left(2,\sqrt{5}\right]$, γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\sqrt{5},-2\right)$ και $\left[\sqrt{5},+\infty\right)$. Επίσης η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=-\sqrt{5}$ και στο $x_2=\sqrt{5}$ με ελάχιστη τιμή $f\left(-\sqrt{5}\right)=f\left(\sqrt{5}\right)=0$.

3) Για $x\neq\sqrt{5}$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{f(x)}{x-\sqrt{5}}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{2x\cdot\ln\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-3\right)^2+1}=0 \qquad (1^{ος}\text{ τρόπος})$$

$$\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{f(x)}{x-\sqrt{5}}=\lim_{x\to\sqrt{5}}\frac{f(x)-f\left(\sqrt{5}\right)}{x-\sqrt{5}}=f'\left(\sqrt{5}\right)=\frac{2\sqrt{5}\cdot\ln\left(\sqrt{5}^2-4\right)}{\left(\sqrt{5}^2-3\right)^2+1}=0 \qquad (2^{ος}\text{ τρόπος})$$

4) Επειδή $\begin{pmatrix} f'\left(-\sqrt{5}\right)=0 \\ f\left(-\sqrt{5}\right)=0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} f'\left(\sqrt{5}\right)=0 \\ f\left(\sqrt{5}\right)=0 \end{pmatrix}$ η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία.

5) Το $3\in\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό ισχύει $f(3)>f\left(\sqrt{5}\right)$, άρα $f(3)>0$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=f(3)-2i$ έχει θετική τετμημένη και αρνητική τεταγμένη, δηλαδή βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

ΘΕΜΑ 15°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=1+\int_1^x\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)dt \quad \text{για κάθε } x>0 \qquad (1)$$

1) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)=x\ln x+x,\ x>0$

β) $f(0)=0$

2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

3) Αποδείξτε ότι η C_f είναι κυρτή και ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία συνευθειακά σ' αυτή.

4) Να αποδείξετε ότι $1\leq\dfrac{\int_1^e f(x)dx}{e-1}\leq 2e$

Λύση

1) α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, γιατί η $\int_1^x\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)dt$ είναι παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης $1+\frac{f(t)}{t}$ στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε

$$f'(x)=\left(1+\int_1^x\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)dt\right)'\Leftrightarrow f'(x)=1+\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)=x+f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln x+c\Leftrightarrow f(x)=x\ln x+cx$$

Από την (1) για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$, οπότε $f(1)=\ln 1+c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x)=x\ln x+x,\ x>0$

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x\ln x+x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x+1}{\frac{1}{x}}\ \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\ \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.\ \text{Άρα } f(0)=0$$

2) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\ln x+2$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x+2=0\Leftrightarrow\ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x+2>0\Leftrightarrow\ln x>-2\Leftrightarrow x>e^{-2}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e^2}$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι

x	0	$\frac{1}{e^2}$	$+\infty$
f′	−	0	+
f	↘		↗
	τ.μ.	ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{e^2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=0$ (άκρο διαστήματος) το $f(0)=0$ και ελάχιστο στο $x_2=\frac{1}{e^2}$ το $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-e^{-2}$

3) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f''(x)=\frac{1}{x}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 συμπεραίνουμε ότι η η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Έστω ότι υπάρχουν τρία σημεία συνευθειακά τα $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$, τότε

$$\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\qquad(I)$$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,x_2]$ και $[x_2,x_3]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_2\ ,\ x_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Η (Ι) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ που είναι άτοπο, γιατί η $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "$1-1$".

4) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα για $1 \le x \le e$ έχουμε $f(1) \le f(x) \le f(e)$, οπότε

$$\int_1^e f(1)dx \le \int_1^e f(x)dx \le \int_1^e f(e)dx \Leftrightarrow \int_1^e 1dx \le \int_1^e f(x)dx \le \int_1^e 2edx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e-1 \le \int_1^e f(x)dx \le 2e(e-1) \Leftrightarrow 1 \le \frac{\int_1^e f(x)dx}{e-1} \le 2e$$

ΘΕΜΑ 16ο

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \int_{-x}^{x} \dfrac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1) Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι περιττή και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{4016} f(x-2008)dx$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη.

γ) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{z+i}{z+1}$, $z \in \mathbb{C}$ με $z \ne -1$

Αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

α) Η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $y = -x-1$.

β) Υπάρχει σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ της C_f με $-1 < \alpha < 0$ το οποίο είναι εικόνα του z.

Λύση

1) α) Είναι $A_f = \mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(-x) = \int_x^{-x} \frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt = -\int_{-x}^{x} \frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt = -f(x) \text{ άρα η } f \text{ είναι περιττή.}$$

Είναι $I = \int_0^{4016} f(x-2008)dx$. Θέτουμε $u = x - 2008$, οπότε $du = dx$.

Για $x = 0$ είναι $u_1 = -2008$ και για $x = 4016$ είναι $u_2 = 2008$, άρα

$$I = \int_{-2008}^{2008} f(u)du \overset{f(u)=-f(-u)}{=} -\int_{-2008}^{2008} f(-u)du \underset{du=-dx}{\overset{u=-x}{=}}$$

Για $x = -2008$ είναι $u_1 = 2008$ και για $x = 2008$ είναι $u_2 = -2008$, άρα

$$I = -\int_{2008}^{-2008} f(u)(-du) = \int_{2008}^{-2008} f(u)du = -\int_{-2008}^{2008} f(u)du = -I$$

άρα $2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$

β) Είναι $f(x)=\int_{-x}^{c}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt+\int_{c}^{x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt=-\int_{c}^{-x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt+\int_{c}^{x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$, $c\in\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, γιατί η $\varphi(x)=\int_{c}^{x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$ παραγωγίσιμη ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $g(t)=\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}$ στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Η $K(x)=\int_{c}^{-x}\frac{t^2}{1+e^{f(t)}}dt$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $h(x)=-x$ και $\varphi(x)$.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'(x)=-\frac{(-x)^2}{1+e^{f(-x)}}\cdot(-x)'+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}\overset{\text{f περιττή}}{=}\frac{x^2}{1+e^{-f(x)}}+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}=$$

$$=\frac{x^2}{1+\frac{1}{e^{f(x)}}}+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}=\frac{x^2e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}+\frac{x^2}{1+e^{f(x)}}=\frac{x^2\left(1+e^{f(x)}\right)}{1+e^{f(x)}}=x^2.$$

Είναι $f(x)=\frac{x^3}{3}+c$, $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε $f(0)=0$, οπότε $c=0$.

Άρα $f(x)=\frac{x^3}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

2) α) Είναι $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow\frac{z+i}{z+1}=\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+1}\Leftrightarrow(z+i)\left(\overline{z}+1\right)=(z+1)\left(\overline{z}-i\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}+z+i\overline{z}+i=z\overline{z}-iz+\overline{z}-i\Leftrightarrow\left(z-\overline{z}\right)+i\left(z+\overline{z}\right)+2i=0,$$

θέτουμε $z=x+yi$ και ισοδύναμα έχουμε $2yi+2xi+2i=0\Leftrightarrow y=-x-1$.
Άρα η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο κινείται στην ευθεία $y=-x-1$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=-x-1\Leftrightarrow f(x)+x+1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x+1$, $x\in[-1,0]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $h(-1)=f(-1)=-\frac{1}{3}<0$, $h(0)=f(0)+1=1>0$ άρα $h(-1)\cdot h(0)<0$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $\alpha\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $h(\alpha)=0$.

και $\lim\limits_{x\to+\infty}E(\lambda)=e^2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda+2}{e^{\lambda-1}}=e^2$