

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 1ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z(t) = \frac{1}{2+it}$, $t \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z(t) + \overline{z(t)} = 4z(t) \cdot \overline{z(t)}$.

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.

δ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $z(t) + \overline{z(t)} = 4z(t) \cdot \overline{z(t)} \Leftrightarrow \frac{1}{2+it} + \overline{\left(\frac{1}{2+it}\right)} = 4 \cdot \frac{1}{2+it} \cdot \overline{\left(\frac{1}{2+it}\right)} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2+it} + \frac{1}{2-it} = 4 \cdot \frac{1}{2+it} \cdot \frac{1}{2-it} \Leftrightarrow 2-it+2+it=4 \Leftrightarrow 4=4$ αληθές.

β) Είναι $\left|z(t) - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{1}{2+it} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4-(2+it)}{4(2+it)}\right| = \frac{|2-it|}{|4(2+it)|} = \frac{|2+it|}{4|(2+it)|} = \frac{1}{4}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ είναι ο κύκλος (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$.

γ) Στο (β) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ο μιγαδικός αριθμός $z(t) = \frac{1}{2+it}$ ανήκει στον κύκλο (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{4}$, άρα και για $-\frac{4}{t} \in \mathbb{R}$ ο μιγαδικός αριθμός $z\left(-\frac{4}{t}\right)$ ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $\left| z(t) - z\left(-\frac{4}{t}\right) \right| = 2\rho = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \left| z(t) - z\left(-\frac{4}{t}\right) \right| &= \left| \frac{1}{2+it} - \frac{1}{2+i\left(-\frac{4}{t}\right)} \right| = \left| \frac{1}{2+it} - \frac{t}{2t-4i} \right| = \left| \frac{1}{2+it} - \frac{t}{2(t-2i)} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2+it} - \frac{it}{2(2+it)} \right| = \left| \frac{2-it}{2(2+it)} \right| = \frac{|2-it|}{|2(2+it)|} = \frac{|2+it|}{2|(2+it)|} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C) για κάθε $t \in \mathbb{R}^*$.

δ) Για $t = 1$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$ και $z\left(-\frac{4}{1}\right) = z(-4)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C) , σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Είναι $z(1) \neq z(2010) \neq z(-4)$. Πράγματι

$$\frac{1}{2+i} \neq \frac{1}{2+2010i} \neq \frac{1}{2-4i} \Leftrightarrow 2+i \neq 2+2010i \neq 2-4i \Leftrightarrow i \neq 2010i \neq -4i \text{ αληθές, οπότε οι εικόνες}$$

των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2010)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών $z(1)$ και $z(-4)$.

ΘΕΜΑ 2ο :

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \lambda(1+i) + 1-i$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκει η εικόνα του z .

β) Για ποια τιμή του λ , το $|z|$ γίνεται ελάχιστο;

γ) Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Αν $|z| = 2\sqrt{2}$ και $w = \frac{z}{\sqrt{3}-i}$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \sqrt{3}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού n , ώστε $w^{2n} \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$z = \lambda + \lambda i + 1 - i \Leftrightarrow x + yi = (\lambda + 1) + (\lambda - 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 1 \\ \lambda = y + 1 \end{cases} \Rightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow$$

$x - y - 2 = 0$. Άρα η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x - y - 2 = 0$.

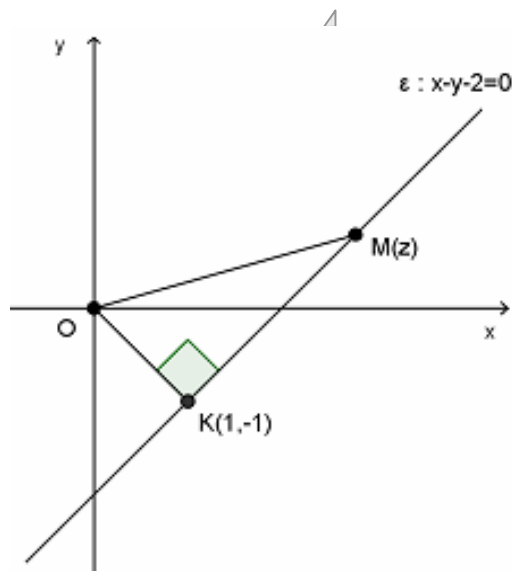
β) Η εικόνα $M(z)$ ανήκει στην ευθεία ε , επομένως το $|z| = (OM)$ γίνεται ελάχιστο, όταν το M συμπίπτει με το ίχνος K της κάθετης από το O στην ευθεία ε . Προσδιορίζουμε το K ως σημείο τομής της OK με την ευθεία ε . Είναι:

$$OK \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1.$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας OK είναι: $OK : y = -x$.

$$\text{Λύνουμε το σύστημα : } \begin{cases} y = -x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα $K(1, -1)$, οπότε το $|z|$ γίνεται ελάχιστο, όταν $z = 1 - i$. Επομένως $\lambda = x - 1 = 1 - 1 = 0$.



γ) i) Έχουμε:

$$|z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda-1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(\lambda^2+1)} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda^2 = 3 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{3} \quad (\lambda > 0).$$

ii) Για $\lambda = \sqrt{3}$ έχουμε:

$$w = \frac{\sqrt{3}(1+i) + (1-i)}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}(1+i) - i(1+i)}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{\sqrt{3}-i} = 1+i.$$

$$\text{Επομένως } w^2 = (1+i)^2 = 1+2i-1=2i \quad \text{και} \quad w^{2^v} = (w^2)^v = 2^v \cdot i^v.$$

$$\text{Επειδή } w^{2^v} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i^v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4\kappa & , \kappa \in \mathbb{N}^* \\ v = 4\kappa + 2 & , \kappa \in \mathbb{N} \end{cases}. \quad \text{Άρα } v \in \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , u και w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right) = 0, \quad u \neq 3i \quad \text{και} \quad (w+2)^8 = 16(w+1)^8.$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των u και w .

β) Να αποδείξετε ότι $z + u + w \neq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $|z + u + w| = \frac{1}{6}|2zu + 2uw + 9zw|$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right) = 0, \quad \text{άρα ο αριθμός } \frac{u+3i}{u-3i} \text{ είναι φανταστικός, οπότε έχουμε:}$$

$$\frac{u+3i}{u-3i} = -\overline{\left(\frac{u+3i}{u-3i}\right)} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i} = -\frac{\overline{u+3i}}{\overline{u-3i}} \Leftrightarrow \frac{u+3i}{u-3i} = -\frac{\bar{u}-3i}{\bar{u}+3i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u+3i)(\bar{u}+3i) = -(u-3i)(\bar{u}-3i) \Leftrightarrow u\bar{u} + 3iu + 3i\bar{u} - 9 = -u\bar{u} + 3iu + 3i\bar{u} + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u\bar{u} = 18 \Leftrightarrow 2|u|^2 = 18 \Leftrightarrow |u|^2 = 9 \Leftrightarrow |u| = 3.$$

Είναι:

$$(w+2)^8 = 16(w+1)^8 \Rightarrow |(w+2)^8| = |16(w+1)^8| \Leftrightarrow |w+2|^8 = 16|w+1|^8 \Leftrightarrow$$

$$|w+2| = \sqrt[8]{16}|w+1| \Leftrightarrow |w+2|^2 = 2|w+1|^2 \Leftrightarrow (w+2)(\bar{w}+2) = 2(w+1)(\bar{w}+1) \Leftrightarrow$$

$$w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} + 4 = 2w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} + 2 \Leftrightarrow w\bar{w} = 2 \Leftrightarrow |w|^2 = 2 \Leftrightarrow |w| = \sqrt{2}.$$

β) Υποθέτουμε ότι:

$$z+u+w=0 \Leftrightarrow z+w=-u \Rightarrow |u|=|z+w| \leq |z|+|w| \Rightarrow 3 \leq \sqrt{2}+\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \leq 2\sqrt{2}, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα $z+u+w \neq 0$.

γ) Έχουμε:

$$|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{2}{z}. \text{ Ομοίως είναι } \bar{u} = \frac{9}{u} \text{ και } \bar{w} = \frac{2}{w}.$$

Είναι:

$$|z+u+w| = |\overline{z+u+w}| = |\bar{z} + \bar{u} + \bar{w}| = \left| \frac{2}{z} + \frac{9}{u} + \frac{2}{w} \right| = \left| \frac{2uw + 9zw + 2zu}{z \cdot u \cdot w} \right| =$$

$$= \frac{|2uw + 9zw + 2zu|}{|z| \cdot |u| \cdot |w|} = \frac{|2uw + 9zw + 2zu|}{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{6} |2uw + 9zw + 2zu|.$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, u . Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$|z|=|w|=|u|=1 \quad (1), \quad z+w+u \neq 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad z^2+w^2+u^2=0 \quad (3)$$

να αποδείξετε ότι:

α) $|z^2 + w^2| = |w^2 + u^2| = |u^2 + z^2|$

β) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} = 0$

γ) Οι εικόνες των αριθμών z, w, u, zwu και $\frac{zw+wu+uz}{z+w+u}$ είναι ομοκυκλικά σημεία.

δ) $|z+w+u|=2$

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (3) έχουμε:

- $z^2 + w^2 = -u^2 \Rightarrow |z^2 + w^2| = |-u^2| \Rightarrow |z^2 + w^2| = |u|^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |z^2 + w^2| = 1.$
- $w^2 + u^2 = -z^2 \Rightarrow |w^2 + u^2| = |-z^2| \Rightarrow |w^2 + u^2| = |z|^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |w^2 + u^2| = 1.$
- $u^2 + z^2 = -w^2 \Rightarrow |u^2 + z^2| = |-w^2| \Rightarrow |u^2 + z^2| = |w|^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} |u^2 + z^2| = 1.$

Επομένως $|z^2 + w^2| = |w^2 + u^2| = |u^2 + z^2|.$

β) Είναι:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \bar{z} = 1 \stackrel{z \neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z} = \frac{1}{z}.$$

Ομοίως έχουμε $\bar{w} = \frac{1}{w}$ και $\bar{u} = \frac{1}{u}.$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} z^2 + w^2 + u^2 = 0 &\Rightarrow \overline{z^2 + w^2 + u^2} = \bar{0} \Rightarrow \bar{z}^2 + \bar{w}^2 + \bar{u}^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\bar{z})^2 + (\bar{w})^2 + (\bar{u})^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{z^2} + \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} = 0. \end{aligned}$$

γ) Είναι:

- $|z| = |w| = |u| = 1.$
- $|z w u| = |z| \cdot |w| \cdot |u| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$
- $\left| \frac{z w + w u + u z}{z + w + u} \right| = \frac{|z w + w u + u z|}{|z + w + u|} = \frac{|z w + w u + u z|}{|z + w + u|} = \frac{|z w + w u + u z|}{|\bar{z} + \bar{w} + \bar{u}|} =$
 $= \frac{|z w + w u + u z|}{\left| \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{u} \right|} = \frac{|z w + w u + u z|}{\frac{w u + u z + z w}{z w u}} = \frac{|z w + w u + u z|}{|z w + w u + u z|} \cdot |z w u| = 1.$

Άρα οι εικόνες των αριθμών $z, w, u, z w u$ και $\frac{z w + w u + u z}{z + w + u}$ ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε είναι ομοκυκλικά σημεία.

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} (z + w + u)^2 &= z^2 + w^2 + u^2 + 2zw + 2wu + 2uz \stackrel{(3)}{\Rightarrow} (z + w + u)^2 = 2zw + 2wu + 2uz \Rightarrow \\ &\Rightarrow |(z + w + u)^2| = |2(zw + wu + uz)| \Rightarrow |z + w + u|^2 = 2|zw + wu + uz| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |z + w + u| = 2 \frac{|zw + wu + uz|}{|z + w + u|} \Rightarrow |z + w + u| = 2 \frac{|zw + wu + uz|}{|z + w + u|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |z + w + u| = 2 \cdot 1 \Rightarrow |z + w + u| = 2. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 2 + \sin(\pi t) + (5 + \eta\mu(\pi t))i$, $t \in [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z - 2 - 5i| = 1$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \in [0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $\delta : y = x$.

δ) Έστω $w \in \mathbb{C}$ τέτοιος, ώστε $|w - 1| = |w - i|$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|z - 2 - 5i| = |\sin(\pi t) + i\eta\mu(\pi t)| = \sqrt{\sin^2(\pi t) + \eta\mu^2(\pi t)} = 1$.

β) Επειδή $|z - (2 + 5i)| = 1$, η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C με κέντρο $K(2, 5)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Καθώς η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C , διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$(OM_1) \leq (OM) \leq (OM_2) \Leftrightarrow (OM_1) \leq |z| \leq (OM_2),$$

όπου M_1, M_2 είναι τα σημεία τομής της ευθείας OK και του κύκλου C .

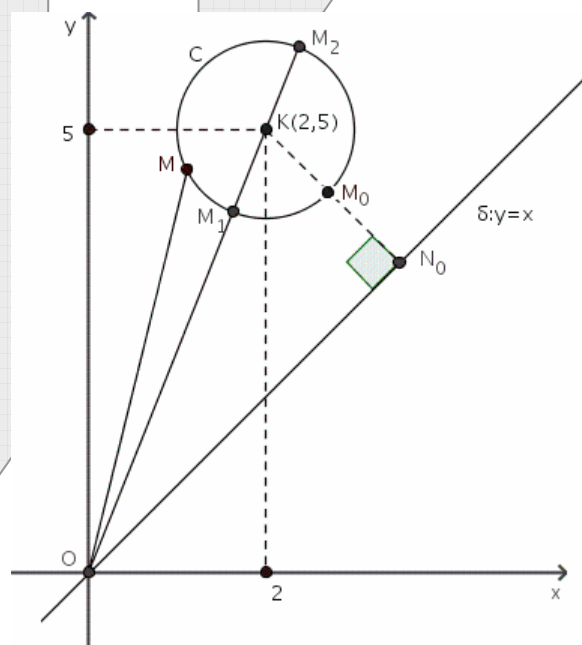
Επομένως:

- Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι:

$$\min |z| = (OK) - \rho = \sqrt{29} - 1$$

- Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι

$$\max |z| = (OK) + \rho = \sqrt{29} + 1$$



γ) Βρίσκουμε την απόσταση $d(K, \delta) = \frac{|2 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1 = \rho$, άρα ο κύκλος C και η ευθεία δ δεν έχουν κοινό σημείο, επομένως δεν υπάρχει εικόνα $M(z)$ η οποία να ανήκει στην ευθεία δ .

δ) Επειδή $|w - 1| = |w - i|$, η εικόνα $N(w)$ κινείται στην ευθεία $\delta : y = x$. Καθώς η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C και η εικόνα $N(w)$ κινείται στην ευθεία $\delta : y = x$, διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του $|z - w| = (MN)$ είναι $\min |z - w| = (M_0 N_0) = d(K, \delta) - \rho = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

Επομένως ισχύει: $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

ΘΕΜΑ 6ο :

α) Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1-2z}{z-2}$, $z \neq 2$.

β) Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|z - w| = 2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$, $-1 \leq x \leq 1$.

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z και w ώστε, το $|z - w|$ να είναι μέγιστο και να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του.

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$w = \frac{1-2z}{z-2} \Leftrightarrow w(z-2) = 1-2z \Leftrightarrow wz - 2w = 1-2z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow wz + 2z = 1 + 2w \Leftrightarrow (w+2)z = 1 + 2w \Leftrightarrow z = \frac{1+2w}{w+2}.$$

Επειδή $|z|=1$ έχουμε:

$$\left| \frac{1+2w}{w+2} \right| = 1 \Leftrightarrow |1+2w| = |w+2| \Leftrightarrow |1+2w|^2 = |w+2|^2 \Leftrightarrow (1+2w)(1+2\bar{w}) = (w+2)(\bar{w}+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\bar{w} + 2w + 4w\bar{w} = w\bar{w} + 2w + 2\bar{w} + 4 \Leftrightarrow 3|w|^2 = 3 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1.$$

β) Είναι:

$$|z|=1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2.$$

Επειδή $y^2 \geq 0$ έχουμε:

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Είναι:

$$\begin{aligned} |z - w| &= \left| z - \frac{1-2z}{z-2} \right| = \left| \frac{z^2 - 2z - 1 + 2z}{z-2} \right| = \left| \frac{z^2 - 1}{z-2} \right| = \left| \frac{(x+yi)^2 - 1}{x+yi-2} \right| \stackrel{(1)}{=} \\ &= \left| \frac{x^2 + x^2 - 1 + 2xyi - 1}{(x-2) + yi} \right| = \frac{2|x^2 - 1 + xyi|}{|(x-2) + yi|} = \frac{2\sqrt{(x^2 - 1)^2 + (xy)^2}}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} = \frac{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2y^2}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \frac{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2(1-x^2)}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 1 - x^2}} = \frac{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - x^4}}{\sqrt{5 - 4x}} = \frac{2\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{5 - 4x}} = 2\sqrt{\frac{1 - x^2}{5 - 4x}}. \end{aligned}$$

γ) Η μέγιστη τιμή του $|z - w|$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}}$ με $-1 \leq x \leq 1$.

Έχουμε:

$$f'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1-x^2}{5-4x} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{-2x(5-4x) - (1-x^2)(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{2(2x^2-5x+2)}{(5-4x)^2}.$$

Αν $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4}$. Άρα $x = \frac{1}{2}$ δεκτή ή $x = 2$ απορρίπτεται.

$$\text{Για } x = \frac{1}{2} \text{ η } f \text{ παρουσιάζει μέγιστο το } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{5-4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{3}{4}}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Άρα } \max |z-w| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επίσης για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε $y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ και

$$w = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - 2} = \frac{i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad w = \frac{1 - 2\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - 2} = \frac{-i\sqrt{3}}{-\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1} = -4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από την (1) έχουμε: $f(f(0)) + 4f(0) = 6 \Rightarrow f(2) + 4 \cdot 2 = 6 \Rightarrow f(2) = -2$.

Για $x = 2$ από την (1) έχουμε: $f(f(2)) + 4f(2) = 6 - 2^4 \Rightarrow f(-2) + 4 \cdot (-2) = 6 - 16 \Rightarrow f(-2) = -2$.

β) Είναι $f(-2) = -2 < 0 < 2 = f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$, επομένως από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρξει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Για $x = x_0$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_0)) + 4f(x_0) = 6 - x_0^4 \Rightarrow f(0) + 4 \cdot 0 = 6 - x_0^4 \Rightarrow 2 = 6 - x_0^4 \Rightarrow x_0^4 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{2} \text{ ή } x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_0 = -\sqrt{2}, \text{ αφού } x_0 \in (-2, 0). \text{ Άρα } f(-\sqrt{2}) = 0.$$

Είναι $f(2) = -2 < 0 < 2 = f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, επομένως από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Για $x = x_1$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_1)) + 4f(x_1) = 6 - x_1^4 \Rightarrow f(0) + 4 \cdot 0 = 6 - x_1^4 \Rightarrow 2 = 6 - x_1^4 \Rightarrow x_1^4 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ ή } x_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}, \text{ αφού } x_1 \in (0, 2). \text{ Άρα } f(\sqrt{2}) = 0.$$

γ) Για $x \neq 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1}$, οπότε $f(x) = \frac{(x-1)g(x) - x^4 + 5}{4}$ (2)

Από υπόθεση είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -4$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(x) - x^4 + 5}{4} = 1$, και

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 1.$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f(x)) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-\sqrt{2}, 0]$ και $[0, \sqrt{2}]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της $f(f(x))$ που είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και της σταθερής συνάρτησης 1.

Είναι:

$$\square g(-\sqrt{2}) = f(f(-\sqrt{2})) + 1 = f(0) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\square g(0) = f(f(0)) + 1 = f(2) + 1 = -2 + 1 = -1.$$

$$\square g(\sqrt{2}) = f(f(\sqrt{2})) + 1 = f(0) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

$$\text{Επομένως } g(-\sqrt{2}) \cdot g(0) = -3 < 0 \text{ και } g(0) \cdot g(\sqrt{2}) = -3 < 0.$$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano σε δύο διαστήματα, άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) + 1 = 0$

θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\sqrt{2}, 0)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \sqrt{2})$, δηλαδή δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

ΘΕΜΑ 8ο :

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x - 1$ σε ένα ακριβώς σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in (0, 1)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{f(u)} = 1 \quad (1).$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u) = \frac{u}{f(u)}$, για u κοντά στο 0, οπότε $g(u) \cdot f(u) = u$ και από (1)

έχουμε $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 1 \quad (2).$

Είναι $\lim_{u \rightarrow 0} [g(u) \cdot f(u)] = \lim_{u \rightarrow 0} u \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} g(u) \cdot \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$ και αφού η f είναι συνεχής

ισχύει $f(0) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για x κοντά στο 0 είναι:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{u}{f(u)}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(0) = f(0) - 0 + 1 = 1 > 0$ και $h(1) = f(1) - 1 + 1 = f(1) < 0$, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε $1 > 0 \Leftrightarrow f(1) < f(0) = 0$. Άρα $h(0)h(1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

Για $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_1 < x_2$ ισχύουν:

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{και} \quad -x_1 + 1 > -x_2 + 1,$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x_1) - x_1 + 1 > f(x_2) - x_2 + 1 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 9ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) = x^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

γ) Αν $f(-2) > 0$ και $f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

β) Η συνάρτηση f στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

γ) Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και από υπόθεση είναι $f(-2) > 0$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x < 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και από υπόθεση είναι $f(2) < 0$, οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x > 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1^3 = -x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} , λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -x^3 \Leftrightarrow (-x)^3 = y \Leftrightarrow -x = \begin{cases} -\sqrt[3]{-y} & , y < 0 \\ \sqrt[3]{y} & , y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{-y} & , y < 0 \\ -\sqrt[3]{y} & , y \geq 0 \end{cases}.$$

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ έχουμε $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-y} & , y < 0 \\ -\sqrt[3]{y} & , y \geq 0 \end{cases}.$

Επομένως:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & , x < 0 \\ -\sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \end{cases}.$$

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} &\stackrel{f \circ f^{-1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f(f^{-1}(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = -x^3 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x^3 + y^3 + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ (x+y) \left(\underbrace{x^2 - xy + y^2 + 1}_{\neq 0} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1) \text{ ή } (0, 0) \text{ ή } (1, -1). \end{aligned}$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι τα:

$$A(-1, 1), \quad O(0, 0) \quad \text{και} \quad B(1, -1).$$

ΘΕΜΑ 10ο :

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ έτσι, ώστε να ισχύουν:

$$(1) \quad f^2(x) + \eta \mu^2 x = 2x f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell, \text{ με } \ell = \frac{|z-2|}{|2z-1|}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $|z-2| = |2z-1|$

ii) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 1$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{x^2 - x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης f .

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(|z+3-4i|+5)x=x^3+10$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

ΛΥΣΗ

α) i) Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x^2 \neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 2 \frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$. Αν πάρουμε τα όρια και των δύο μελών στη σχέση (3) έχουμε:

$$\ell^2 + 1 = 2\ell \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (4).$$

Επομένως έχουμε $\left|\frac{z-2}{2z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2| = |2z-1|$.

ii) Είναι $|z-2|^2 = |2z-1|^2 \Leftrightarrow (z-2)(\bar{z}-2) = (2z-1)(2\bar{z}-1) \Leftrightarrow z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = 4z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 3 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Αν θέσουμε $z = x + yi$, τότε $x^2 + y^2 = 1$.

Επομένως οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z ανήκουν στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 1$.

β) Για x κοντά στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \stackrel{(4)}{=} 1$ (5), οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \stackrel{(5)}{=} 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 - \eta\mu^2 x \quad (6).$$

Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$.

Θυμίζουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα για $x \neq 0$ έχουμε $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$

Η συνάρτηση λοιπόν $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^*$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

♦ Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

- Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (I).$$

- Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (II).$$

♦ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

- Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (III).$$

- Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (IV).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις:

➤ (I) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

➤ (I) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x \geq 0 \end{cases}$.

➤ (II) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x < 0 \\ x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x \geq 0 \end{cases}$.

➤ (II) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - (|z+3-4i|+5)x+10$, $x \in [1, 2]$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και ισχύει:

$$h(1) = 1 - (|z+3-4i|+5) \cdot 1 + 10 = 6 - |z+3-4i|$$

$$h(2) = 8 - (|z+3-4i|+5) \cdot 2 + 10 = 8 - 2 \cdot |z+3-4i| = 2 \cdot (4 - |z+3-4i|)$$

$$\text{Όμως } \left| |z| - |3-4i| \right| \leq |z+3-4i| \leq |z| + |3-4i| \Leftrightarrow |1-5| \leq |z+3-4i| \leq 1+5 \Leftrightarrow 4 \leq |z+3-4i| \leq 6.$$

Άρα $h(1) \geq 0$ και $h(2) \leq 0$, οπότε $h(1)h(2) \leq 0$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $h(1)h(2) = 0$, τότε $h(1) = 0$ ή $h(2) = 0$, άρα ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.
- Αν $h(1)h(2) < 0$, τότε ισχύει το Θεώρημα Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1, 2)$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in [1, 2]$.

ΘΕΜΑ 11ο :

Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w . Αν $\frac{z}{w} = 1 + i\sqrt{3}$ και η εικόνα A του μιγαδικού αριθμού z , στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στο κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, τότε:

A) Να αποδείξετε ότι:

α) Η εικόνα B του μιγαδικού w ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β) $|z - w| = \sqrt{3}$ και $|z + w| = \sqrt{7}$.

B) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $|(\xi^3 - 2)z + \xi w| + |\xi^2 z + w| = 2e^\xi$.

Γ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|(3i - 4)x - xz| - 2010}{\eta\mu x + x} = \kappa$, να αποδείξετε ότι $3 \leq \kappa \leq 7$.

ΛΥΣΗ

A) α) Η εικόνα A του μιγαδικού αριθμού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα ισχύει $|z|=2$. Είναι $\frac{z}{w} = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow w = \frac{z}{1 + i\sqrt{3}}$.

$$\text{Άρα } |w| = \left| \frac{z}{1 + i\sqrt{3}} \right| \Leftrightarrow |w| = \frac{|z|}{|1 + i\sqrt{3}|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2}{\sqrt{1+3}} \Leftrightarrow |w| = \frac{2}{2} \Leftrightarrow |w| = 1.$$

Επομένως η εικόνα B του μιγαδικού w ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

β) Είναι:

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \frac{z - w}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3} - 1}{1} \Leftrightarrow \frac{z - w}{w} = i\sqrt{3}$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{z - w}{w} \right| = |i\sqrt{3}| \Leftrightarrow \frac{|z - w|}{|w|} = \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2} \stackrel{|w|=1}{\Leftrightarrow} |z - w| = \sqrt{3}.$$

Είναι:

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \frac{z + w}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 1}{1} \Leftrightarrow \frac{z + w}{w} = 2 + i\sqrt{3}$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{z + w}{w} \right| = |2 + i\sqrt{3}| \Leftrightarrow \frac{|z + w|}{|w|} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} \stackrel{|w|=1}{\Leftrightarrow} |z + w| = \sqrt{7}.$$

B) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = |(x^3 - 2)z + xw| + |x^2 z + w| - 2e^x$ στο διάστημα $[0, 1]$.

• Η h συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξη συνεχών.

• $h(0) = |-2z| + |w| - 2e^0 = 2|z| + |w| - 2 = 3 > 0$

$$h(1) = |-z + w| + |z + w| - 2e = |z - w| + |z + w| - 2e = \sqrt{3} + \sqrt{7} - 2e < 0$$

Άρα $h(0) \cdot h(1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, οπότε θα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0$.

$$\text{Είναι } h(\xi) = 0 \Leftrightarrow |(\xi^3 - 2)z + \xi w| + |\xi^2 z + w| - 2e^\xi = 0 \Leftrightarrow |(\xi^3 - 2)z + \xi w| + |\xi^2 z + w| = 2e^\xi$$

Γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\bullet \frac{|(3i-4)x - xz| - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{|(3i-4) - z| \cdot x - 2010}{\eta\mu x + x} = \frac{|(3i-4) - z| - \frac{2010}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} + 1}$$

$$\bullet \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}, \text{ οπότε } -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|(3i-4)x - xz| - 2010}{\eta\mu x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|(3i-4) - z| - \frac{2010}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} + 1} = |(3i-4) - z|, \text{ οπότε } \kappa = |(3i-4) - z|.$$

$$\text{Ισχύει } ||3i-4| - |z|| \leq |(3i-4) - z| \leq |3i-4| + |z| \Leftrightarrow |5-2| \leq \kappa \leq 5+2 \Leftrightarrow 3 \leq \kappa \leq 7.$$

ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $u = \frac{1}{f(\alpha)} + \beta i$ και $w = \frac{1}{f(\beta)} - \alpha i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(uw) = \frac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\operatorname{Im}(uw) = \frac{\beta}{f(\beta)} - \frac{\alpha}{f(\alpha)}$.

β) Αν $\operatorname{Im}(uw) = 0$ και $0 \notin [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi}$.

γ) Αν $\operatorname{Re}(uw) = 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(2004)f(2010) \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $uw = \left(\frac{1}{f(\alpha)} + \beta i \right) \left(\frac{1}{f(\beta)} - \alpha i \right) = \left(\frac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta \right) + \left(\frac{\beta}{f(\beta)} - \frac{\alpha}{f(\alpha)} \right) i$,

άρα $\operatorname{Re}(uw) = \frac{1}{f(\alpha)f(\beta)} + \alpha\beta$ και $\operatorname{Im}(uw) = \frac{\beta}{f(\beta)} - \frac{\alpha}{f(\alpha)}$.

β) Είναι $\operatorname{Im}(uw) = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{f(\beta)} = \frac{\alpha}{f(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

- Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[α,β]$ με $h'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$.
- $\frac{f(α)}{α} = \frac{f(β)}{β}$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[α,β]$, οπότε θα υπάρχει $ξ \in (α,β)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(ξ) = 0 \Leftrightarrow \frac{ξ f'(ξ) - f(ξ)}{ξ^2} = 0 \Leftrightarrow f'(ξ) = \frac{f(ξ)}{ξ}.$$

γ) Είναι $Re(uw) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(α)f(β)} + αβ = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{f(α)f(β)} = -αβ \quad (1).$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, επομένως $f(α)f(β) > 0$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $αβ < 0$, άρα οι αριθμοί $α, β$ είναι ετερόσημοι.

δ) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$f(2004)f(2010) \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = f(2004)f(2010) \cdot x \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Έχουμε:

- Επειδή η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οι αριθμοί $f(2004)$ και $f(2010)$ είναι ομόσημοι, άρα $f(2004) \cdot f(2010) > 0$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu t}{t} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$$\text{Άρα} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(2004)f(2010) \cdot x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(2004)f(2010) \cdot x \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = -\infty.$$