

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2010

ΘΕΜΑ 13ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ η οποία για κάθε $x \in (0, e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ln(f'(x)) = f(x) - \ln x$.

A. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

B. Αν $f(x) = -\ln(1 - \ln x)$, $x \in (0, e)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 - \ln x = \frac{1}{e^a}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$\begin{aligned} \ln(f'(x)) &= f(x) - \ln x \Leftrightarrow f'(x) = e^{f(x) - \ln x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{-f(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(-e^{-f(x)}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow -e^{-f(x)} = \ln x + c. \end{aligned}$$

Είναι $f(1) = 0$, οπότε $-e^0 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = -1$.

Επομένως έχουμε:

$$-e^{-f(x)} = \ln x - 1 \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1 - \ln x \Leftrightarrow -f(x) = \ln(1 - \ln x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln(1 - \ln x), \quad x \in (0, e).$$

B. α) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$f'(x) = (-\ln(1 - \ln x))' = -\frac{1}{1 - \ln x} (1 - \ln x)' = \frac{1}{x(1 - \ln x)}.$$

Είναι $0 < x < e \Rightarrow \ln x < \ln e \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow 1 - \ln x > 0$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \right)$.

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(1 - \ln x)) \stackrel{1 - \ln x = t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} (-\ln t) = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow e^-} (-\ln(1 - \ln x)) \stackrel{1 - \ln x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln t) = +\infty. \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(1 - \ln x)} \right)' = \frac{-[x(1 - \ln x)]'}{[x(1 - \ln x)]^2} = \frac{-(1 - \ln x) + 1}{x^2(1 - \ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

Το πρόσημο της f'' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f' , φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0	1	e
f''		- 0 +	
f'		↘ 1 ↗	

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, 1)$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[1, e)$ και $f''(x) > 0$ στο $(1, e)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e)$.
- Η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, με ελάχιστη τιμή $f'(1) = 1$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, όταν $x = 1$.

δ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$1 - \ln x = \frac{1}{e^a} \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = -a \Leftrightarrow -\ln(1 - \ln x) = a \Leftrightarrow f(x) = a.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $f((0, e)) = \mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 14ο :

Θεωρούμε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το μιγαδικό αριθμό $z = e^x + g(x)i$.

A. Αν ισχύει $|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2(1+x^2)$, $g(1) = e$ και $g(-1) = -\frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι $g(x) = xe^x$.

B. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $g(x) = f'(x) - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : ex - 2y + 3 = 0$.

ΛΥΣΗ

A. Έχουμε:

$$|z|^2 = (\operatorname{Re}(z))^2(1+x^2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{e^{2x} + g^2(x)} \right)^2 = e^{2x}(1+x^2) \Leftrightarrow g^2(x) = e^{2x}x^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |xe^x| \quad (1).$$

Είναι:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |xe^x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

- Η συνάρτηση g στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(-1) = -\frac{1}{e} < 0$, οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Επομένως στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

$$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x < 0.$$

Επειδή $g(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

- Η συνάρτηση g στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(1) = e > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$|g(x)| = |xe^x| \Leftrightarrow g(x) = xe^x, \text{ αφού } x > 0.$$

Επειδή $g(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$g(x) = xe^x \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε $g(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} g(x) = f'(x) - f(x) &\Leftrightarrow xe^x = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' . \text{ Άρα } \frac{f(x)}{e^x} = \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \text{ άρα } c = 1, \text{ επομένως } f(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \left[e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) \right]' = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) + e^x x = e^x \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 \right) = \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 2) e^x > 0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{3}{2}e \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}e\right) = 1$$

Άρα η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2} + 1}{e^{-x}} \stackrel{0(+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2} + 1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) &= +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (0, +\infty)$.

δ) Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 = e^{-x} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x (x^2 + 2) = 1 \Leftrightarrow e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Επειδή το $\frac{1}{2} \in (0, +\infty) = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$, άρα και η ισοδύναμή της εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει μία πραγματική ρίζα, η οποία είναι και μοναδική, γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^x$, άρα ισχύει

$$\text{Θ.Μ.Τ. επομένως θα υπάρχει } x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{3e}{2} - e}{1 - 0} = \frac{e}{2}.$$

Είναι $\varepsilon: y = \frac{e}{2}x + \frac{3}{2}$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{e}{2}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x_0) = \lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: ex - 2y + 3 = 0$.

ΘΕΜΑ 15ο :

Α) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι "1-1" και συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

Β) Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f'(2) > 0$, $f^{(3)}(2) > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + f(4-x) = 3$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο M , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο M σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

ε) Για $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη.

ΛΥΣΗ

Α) Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε αφού η f είναι "1-1" οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο.

Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη, οπότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ και $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_3)$.

Επομένως θα ισχύει μία από τις παρακάτω ανισότητες:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2) \quad (1)$$

$$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1) \quad (2)$$

$$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \quad (3)$$

$$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2) \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1), τότε εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και του $f(x_2)$, θα υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(x_3)$. Επομένως για $x_1 < \xi < x_2 < x_3$, δηλαδή για $\xi < x_3$ έχουμε $f(\xi) = f(x_3)$ που είναι άτοπο, αφού η f είναι "1-1". Ομοίως θα καταλήξουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύει μία από τις ανισότητες (2), (3) και (4).

B) α) Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f'' είναι "1-1".

Αν υποθέσουμε ότι η f'' δεν είναι "1-1", τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$, οπότε έχουμε:

- Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f''(x_1) = f''(x_2)$.

Άρα η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f'' είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η f'' είναι "1-1", οπότε σύμφωνα με το (Α) ερώτημα η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) + f(4-x) = 3$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$f'(x) - f'(4-x) = 0 \quad \text{και} \quad f''(x) + f''(4-x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=2 \text{ είναι } f''(2) + f''(4-2) = 0 \Leftrightarrow 2f''(2) = 0 \Leftrightarrow f''(2) = 0 \quad (1).$$

Η f'' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και επειδή από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ή $f^{(3)}(x) > 0$ ή $f^{(3)}(x) < 0$. Όμως $f^{(3)}(2) > 0$, άρα $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 2$ είναι $f''(x) < f''(2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) < 0$, ενώ για $x > 2$ είναι $f''(x) > f''(2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) > 0$.

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$3/2$	$\cup$

Σ. Κ.

Για $x=2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(2) + f(4-2) = 3 \Leftrightarrow 2f(2) = 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} \quad (2).$$

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, 2)$, άρα η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0=2$ και το σημείο καμπής είναι το $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

γ) Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει ρίζα τον αριθμό $x=2$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'		$f'(2)$	

ελάχ.

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$, άρα $f'(x) \geq f'(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως από υπόθεση είναι $f'(2) > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα $x=2$ είναι μοναδική.

δ) Αν x_0 η τετμημένη του σημείου M , στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \quad (3).$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

$$\text{Άρα } g'(x_0) = \frac{[f'(x_0)]^2 - f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{[f'(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^2} = 1, \text{ οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της}$$

εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_g , της συνάρτησης g στο σημείο M , στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $\lambda_\varepsilon = g'(x_0) = 1$, οπότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ είναι 45° .

ε) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x+1) - f(x) = f(x+2) - f(x+1)$ (4).

Για $x \geq 2$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$, άρα θα υπάρχει:

- $\xi_1 \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) = f'(\xi_1)$.
- $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{(x+2) - (x+1)} \Leftrightarrow f(x+2) - f(x+1) = f'(\xi_2)$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (5). Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$, άρα θα είναι και "1-1", οπότε από (5) έχουμε $\xi_1 = \xi_2$ που είναι αδύνατο, γιατί τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη, για $x \geq 2$.

ΘΕΜΑ 16ο :

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2010) - f(x))$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \right)' = \frac{(2e^x + x^2)'(e^x + x^2) - (2e^x + x^2)(e^x + x^2)'}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{(2e^x + 2x)(e^x + x^2) - (2e^x + x^2)(e^x + 2x)}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{2e^{2x} + 2x^2e^x + 2xe^x + 2x^3 - 2e^{2x} - 4xe^x - x^2e^x - 2x^3}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{x^2e^x - 2xe^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x)e^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{x(x-2)e^x}{(e^x + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f κυρτή στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, 2)$, άρα η f κοίλη στο $[0, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} - 1 = \frac{2e^x + x^2 - e^x - x^2}{e^x + x^2} = \frac{e^x}{e^x + x^2} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης η f είναι συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0) \quad (2).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(0)) = -\infty$, άρα $x + f(0) < 0$, επομένως και $f(x) < 0$ σε περιοχή του $-\infty$, οπότε

$$\text{από (2) έχουμε } f(x) < x + f(0) < 0 \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{x + f(0)}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + f(0)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) < 0$ σε περιοχή του $-\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0) \quad (1).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$, άρα $x + f(0) > 0$, επομένως και $f(x) > 0$ σε περιοχή του $+\infty$, οπότε

$$\text{από (1) έχουμε } f(x) > x + f(0) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{x + f(0)}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + f(0)} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$, οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) > 0$ σε περιοχή του $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

δ) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x, x+2010]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+2010)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+2010)-f(x)}{x+2010-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x+2010)-f(x)}{2010} \Leftrightarrow f(x+2010)-f(x) = 2010f'(\xi).$$

Για $x > 2$ η συνάρτηση f είναι κυρτή, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

$$\begin{aligned} \text{Επομένως για } 2 < x < \xi < x+2010 &\Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+2010) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2010f'(x) < 2010f'(\xi) < 2010f'(x+2010) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2010f'(x) < f(x+2010)-f(x) < 2010f'(x+2010). \end{aligned}$$

Για $x > 2$ είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \stackrel{\text{D.L.H. } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2x}{e^x + 2x} \stackrel{\text{D.L.H. } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2}{e^x + 2} \stackrel{\text{D.L.H. } x \rightarrow +\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2010f'(x)) = 2010 \cdot 2 = 4020.$$

• Αν θέσουμε $x+2010 = u$, τότε όταν το $x \rightarrow +\infty$ και το $u \rightarrow +\infty$, άρα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2010f'(x+2010)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2010f'(u)) = 2010 \cdot 2 = 4020.$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2010)-f(x)) = 4020$.

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = 0$. Αν η συνάρτηση $f \circ f'$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $(f \circ f')(x) = -f(x)$ (1), να αποδείξετε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f' είναι το $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) $f'(1) = 1$.

δ) $(f' \circ f')(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ε) $xf''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

στ) $f(x) = \ell \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Κατ' αρχάς είναι $A_{f'} \subseteq A_f = (0, +\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ή $A_{f'} = (0, +\infty)$
- ή θα υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_0 \notin A_{f'}$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_0 \notin A_{f'}$, τότε και με δεδομένο ότι $A_{f \circ f'} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in A_f\}$ συμπεραίνουμε ότι το $x_0 \notin A_{f \circ f'}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $x_0 \in (0, +\infty)$ και $A_{f \circ f'} = (0, +\infty)$ από υπόθεση. Άρα $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f'$:

$$A_{f \circ f'} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in A_f\} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in (0, +\infty)\}$$

προκύπτει ότι $f'(x) \in (0, +\infty)$ για κάθε $x \in A_{f'}$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(f \circ f')(1) = -f(1) \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} (f \circ f')(1) = 0 \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f(f'(1)) = f(1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 1.$$

δ) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (1) όπου x το $f'(x)$, οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f \circ f')(f'(x)) &= -f(f'(x)) \Leftrightarrow f(f'(f'(x))) = -(f \circ f')(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(f'(f'(x))) = -(-f(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(f'(f'(x))) = f(x) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f'(f'(x)) = x \Leftrightarrow (f' \circ f')(x) = x \quad (2). \end{aligned}$$

ε) Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(f'(x)))' &= (-f(x))' \Leftrightarrow f'(f'(x)) \cdot f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow (f' \circ f')(x) \cdot f''(x) = -f'(x) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow x f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow x f''(x) + f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

στ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x f'(x))' = 0 \Leftrightarrow x f'(x) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για $x=1$ είναι $f'(1) = c_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} c_1 = 1$, άρα $x f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c_2, \quad x \in (0, +\infty)$.

Όμως $f(1) = 0$, άρα $c_2 = 0$, οπότε $f(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 18ο :

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B. Αν $f(0) = 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu f(x))$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε. Να αποδείξετε ότι $\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(\sqrt{2}-1)$.

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(x) + 2xf(x) = 1 &\Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g^2(x) = 1 + x^2 \quad (1), \text{ όπου } g(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $1 + x^2 > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B. α) Για $x = 0$ έχουμε $g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1+x^2} - x, x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq x - x = 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2).

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$|\eta\mu f(x)| \leq |f(x)| \stackrel{(2)}{=} f(x), \text{ άρα } -f(x) \leq \eta\mu f(x) \leq f(x).$$

$$\text{Είναι } f(x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Επίσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = 0$.

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu f(x)) = 0$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - x \right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{(2)}{<} 0.$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} , λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

Έχουμε:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{1+x^2} - x &\Leftrightarrow y+x = \sqrt{1+x^2} \stackrel{y+x \geq 0}{\Leftrightarrow} (y+x)^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow 2xy = 1-y^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{1-y^2}{2y} \quad (3). \end{aligned}$$

Είναι $y+x \geq 0 \Leftrightarrow y + \frac{1-y^2}{2y} \geq 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2y^2 + 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 0$, που είναι αληθές.

Η (3) $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2y}$, $y > 0$.

Επομένως $f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}$.

ε. Από το (δ) ερώτημα έχουμε $f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$, άρα

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^0 -\frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int_1^0 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln(f(x)) \right]_0^1 = \ln(\sqrt{2}-1).$$

ΘΕΜΑ 19ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < a < \beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς

$z_1 = a + if(a)$ και $z_2 = \beta + if(\beta)$ να ισχύει $w = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, \beta]$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} \int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)} dt = 1$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $z_1 = wz_2$, με $w \in \mathbb{R}$. Άρα

$$|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2| \Leftrightarrow |wz_2 + iz_2| = |wz_2 - iz_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_2| \cdot |w + i| = |z_2| \cdot |w - i| \stackrel{z_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} |w + i| = |w - i| \stackrel{w \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \sqrt{w^2 + 1} = \sqrt{w^2 + 1}, \text{ αληθής.}$$

β) Έχουμε $w = \frac{\alpha + if(\alpha)}{\beta + if(\beta)} = \frac{(\alpha + if(\alpha))(\beta - if(\beta))}{(\beta + if(\beta))(\beta - if(\beta))} = \frac{\alpha\beta + f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)}i$

$$\text{Είναι } w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta^2 + f^2(\beta)} = 0 \Leftrightarrow \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $0 < \alpha < \beta$.

□ Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως ηλίκο

$$\text{παραγωγισίμων συναρτήσεων με } g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}.$$

□ Είναι $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} = g(\beta)$.

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

γ) Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \quad (2).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} y = f'(x_0)x$$

Άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Είναι $\int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)} dt = \frac{1}{x-\alpha} \int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{x+\alpha-t} dt$. Θέτουμε $x+\alpha-t=u$, οπότε $-dt=du$.

Για $t=\alpha$ το $u=x$ και για $t=x$ το $u=\alpha$, οπότε

$$\int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)} dt = \frac{1}{x-\alpha} \int_a^x \frac{f(x+\alpha-t)}{x+\alpha-t} dt = \frac{1}{x-\alpha} \int_x^\alpha -\frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{x-\alpha} \int_\alpha^x \frac{f(u)}{u} du.$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow \alpha} \int_{\alpha}^x \frac{f(x + \alpha - t)}{(x - \alpha)(x + \alpha - t)} dt &= 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{x - \alpha} \int_{\alpha}^x \frac{f(u)}{u} du = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\int_{\alpha}^x \frac{f(u)}{u} du}{x - \alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{0}{0} \text{ D.L.H} \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 1 \quad (3). \end{aligned}$$

$$\text{Από (1) και (3) έχουμε } \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = \alpha \\ f(\beta) = \beta \end{cases}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$, $x \in [\alpha, \beta]$, με $0 < \alpha < \beta$.

□ Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $h'(x) = f'(x) - 1$.

$$\square \text{ Είναι } \begin{cases} h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0 \\ h(\beta) = f(\beta) - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1.$$

ΘΕΜΑ 20ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+1}{t(e^{f(t)}+1)} dt \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

γ) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g , για την οποία ισχύει

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } g(1) = 1.$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{t+1}{t(e^{f(t)}+1)}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, το $1 \in (0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση

$$f(x) = \int_1^x \frac{t+1}{t(e^{f(t)}+1)} dt \quad \text{είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)}.$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x+1}{x(e^{f(x)}+1)} \Leftrightarrow x e^{f(x)} f'(x) + x f'(x) = x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} + f(x))' = (x + \ln x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c.$$

Για $x = 1$ έχουμε $e^{f(1)} + f(1) = 1 + \ln 1 + c \Leftrightarrow e^0 + 0 = 1 + 0 + c \Leftrightarrow c = 0.$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x.$

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1».

Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x)) = \varphi(\ln x) \Leftrightarrow f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

γ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και
- $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$

Είναι $0 < \alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

$$\text{οπότε } f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

δ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln e^x - \ln x \Leftrightarrow g^2(x) = x - \ln x \quad (2).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$, τότε $x_0 - \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = x_0$ που είναι άτοπο, γιατί $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (Εφαρμογή 2 σχολ. Βιβλίου σελ. 266).

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση g λοιπόν είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως από (2) προκύπτει ότι $g(x) = \sqrt{x - \ln x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g'(x) = (\sqrt{x - \ln x})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \ln x}} (x - \ln x)' = \frac{x - 1}{2x\sqrt{x - \ln x}}.$$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης g είναι:

x	0	1	$+\infty$
g'	—	0	+
g	$\searrow$	1	$\nearrow$

ελάχ.

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = 1$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x - \ln x} = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{\ln x}{x}} \right) = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A) = [1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) \geq x e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x \ln x} = 1$.

γ) Αν $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 1]$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x) - xe^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της τοπικό ακρότατο.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = (f(x) - xe^{2x})' = f'(x) - e^{2x} - 2xe^{2x}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = f'(0) - 1$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Είναι $f'(0) = 1$, οπότε για $x \neq 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2 \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 \frac{1}{\eta \mu x} \right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} \geq xe^x \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^x \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$, όπου $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 x' e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1,$$

$$\text{οπότε } \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 (f(x)e^{-x} - xe^x) dx = \int_0^1 f(x)e^{-x} dx - \int_0^1 xe^x dx = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν } h(x) = f(x)e^{-x} - xe^x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \int_0^1 h(x) dx = 0 \quad (1).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) \neq 0$, τότε $h(x_0) > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά η συνεχής συνάρτηση h δεν είναι παντού μηδέν,

$$\text{οπότε } \int_0^1 h(x) dx > 0, \text{ που είναι άτοπο λόγω της (1).}$$

Επομένως για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x}$.

ΘΕΜΑ 22ο :

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1}{e-1}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$xf'(x) - f(x) = \frac{-x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $u = e^x - 1$, οπότε $du = e^x dx$. Άρα:

$$\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{e^x - 1} + c, \text{ όπου } x \in (-\infty, 0) \text{ ή } x \in (0, +\infty).$$

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x) - f(x) = \frac{-x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\left(-\frac{1}{e^x - 1} + c_1\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - c_1 x.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } f(1) = \frac{1}{e-1} - c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{1}{e-1} - c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0. \text{ Άρα } f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = 1$, άρα $f(0) = 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, οπότε ισχύει:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x}{2e^x + xe^x} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{άρα } f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

δ) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ομοίως έχουμε:

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= \frac{-x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = -\left(-\frac{1}{e^x - 1} + c_2\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^x - 1} - c_2 x. \end{aligned}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - c_2 x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - c_2 x(e^x - 1) - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - c_2(e^x - 1) - c_2 x e^x - e^x}{e^x - 1 + x e^x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2c_2 e^x - c_2 x e^x - e^x}{2e^x + x e^x} = \frac{-2c_2 - 1}{2} \end{aligned}$$

Είναι $f'(0) = -\frac{1}{2}$, άρα έχουμε $\frac{-2c_2 - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c_2 = 0$. Άρα $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 23ο :

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = \int_0^x \frac{2}{1 + 3f^2(t)} dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2}{1 + 3f^2(t)} dt$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t) dt \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

στ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x}.$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{2}{1+3f^2(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{2}{1+3f^2(t)} dt$ ορίζεται

στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2}{1+3f^2(x)}$ (1).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \frac{2}{1+3f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x) + 3f^2(x)f'(x) = 2 \Leftrightarrow [f(x) + f^3(x)]' = (2x)' \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 2x + c.$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = \int_0^0 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = 0$. Άρα $f^3(0) + f(0) = 0 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Επομένως $f^3(x) + f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ (2).

β) Από τη σχέση (1) έχουμε $f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

γ) Είναι $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = f(1)$.

Από τη σχέση (2) για $x = 1$ έχουμε $f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow f^3(1) + f(1) - 2 = 0$ (3).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	0	1	-2	1
///	1	1	2	
1	1	2	0	

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(1)-1) \underbrace{(f^2(1)+f(1)+2)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1.$$

Άρα $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = 1$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, 1]$ με $g'(x) = f'(x) - 2x$.
- Είναι $g(0) = g(1)$, αφού $g(0) = 0$ και $g(1) = 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2x_0.$$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } \varphi'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt - x^2 \right)' = f(x) - 2x \stackrel{(2)}{=} -f^3(x).$$

$$\text{Από τη σχέση (2) έχουμε } f(x)(f^2(x)+1) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{f^2(x)+1}, \text{ άρα } \varphi'(x) = -\frac{8x^3}{(f^2(x)+1)^3}, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι:

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } \varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -8x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Το πρόσημο της φ' , η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	+	0	-
φ		0	

μέγ.

Η φ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi(x) \leq \varphi(0)$. Άρα είναι

$$\int_0^x f(t)dt - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt \leq x^2, x \in \mathbb{R}.$$

στ) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1) = 2x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{1+f^2(x)}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+f^2(x)) = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+f^2(x)} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f^3(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x} = 2 - \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{f(x)}{x} \right) = 2 - 0 = 2, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x} = 2.$$

ΘΕΜΑ 24ο :

Δίνεται η συνάρτηση f , που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) = \int_x^0 \left(\int_0^\pi f(t) \eta_{\mu x} dx \right) dt + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

γ) Αν $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

iii) Για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x) = -\int_0^x f(t) \left(\int_0^\pi \eta \mu x \, dx \right) dt + x^2 \quad (1).$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \eta \mu x \, dx = [-\sigma \nu x]_0^\pi = -\sigma \nu \pi + \sigma \nu 0 = 2$.

Άρα η (1) γράφεται: $f(x) = -2 \int_0^x f(t) dt + x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης f .

Άρα η συνάρτηση $f(x) = -2 \int_0^x f(t) dt + x^2$ είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = -2f(x) + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) + 2f(x) = 2x \Leftrightarrow e^{2x} f'(x) + e^{2x} 2f(x) = e^{2x} 2x \Leftrightarrow (e^{2x} f(x))' = 2xe^{2x}, \quad \text{άρα } e^{2x} f(x) = \int 2xe^{2x} dx \quad (2).$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int 2xe^{2x} dx = \int x(e^{2x})' dx = xe^{2x} - \int e^{2x} dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \quad (3).$

Η (2) $\Leftrightarrow e^{2x} f(x) = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$ Όμως $f(0) = 0$, άρα $c = \frac{1}{2}.$

Επομένως $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

γ) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = -e^{-2x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}.$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f		0	

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$.

ii) ◦ Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, άρα $f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{e^{-2x}}{2x} + 1 - \frac{1}{2x} \right) \right] = +\infty,$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right) = 1 - 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^{-2x}) = -\infty.$$

Άρα $f(\Delta_1) = [0, +\infty)$.

◦ Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$, άρα $f(\Delta_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2x} + x - \frac{1}{2} \right) = +\infty,$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Άρα $f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

iii) Αν $\kappa < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ είναι αδύνατη.

Αν $\kappa = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια λύση.

Αν $\kappa > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει δύο λύσεις.