

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB. Αν ισχύει η ισότητα $\vec{AB} + 2\vec{BK} - \vec{BL} = 2\vec{AM} - \vec{AK}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.
2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Αν είναι $\vec{BD} = \kappa \vec{AB} + 2\vec{AG}$ και $\vec{GE} = (1 + \kappa^2)\vec{AB} + 3\vec{AG}$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{GE}$ και $\vec{BD}$ δεν μπορεί να είναι παράλληλα για καμιά τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.
3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ που δεν είναι ανά δύο παράλληλα. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά και τα $2\vec{\alpha} - \vec{\gamma}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, να δείξετε ότι και τα διανύσματα $4\vec{\beta} + \vec{\gamma}, \vec{\alpha}$ είναι συγγραμμικά.
4. Έστω τα διανύσματα $\vec{AB} = \vec{\alpha}, \vec{BG} = \vec{\beta}, \vec{GD} = \rho\vec{\alpha}, \rho \in \mathbb{R}$ και $\vec{DE} = \frac{1}{3}\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.
 - i) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AG}$ και $\vec{GE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και ρ .
 - ii) Να βρείτε το ρ , ώστε τα σημεία A, Γ, E να είναι συνευθειακά, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.
5. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να βρεθεί που βρίσκονται τα σημεία M που επαληθεύουν τη σχέση: $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} + \vec{MG}|$.
6. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
7. Αν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 3, |\vec{\gamma}| = 1$ και $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε την παράσταση $K = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.
8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 1$. Αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $|\vec{x}\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + 2x\vec{\beta}|$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

9. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύει $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$, να δείξετε ότι :

$$\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma} \text{ και } \vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}.$$

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν :

$$|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2 \text{ και } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}.$$

i) Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει $(\vec{x} + \vec{\alpha}) \parallel \vec{\beta}$ και $(\vec{x} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\alpha}$.

ii) Να βρεθεί το $|\vec{x}|$.

11. Αν $\vec{\alpha} = (3, -4)$, $\vec{\beta} = (2, 1)$, να βρεθεί το μήκος της προβολής του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$.

12. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (12, -4)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (3, 1)$, $\vec{\beta} = (-2, 2)$.

13. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε να είναι $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Αν $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, να υπολογιστεί η γωνία $(\vec{\delta}, \vec{\alpha})$.

14. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σε κάθε σημείο M του επιπέδου του αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα

$$f(M) = 3\vec{MA} - 2\vec{MB} + 4\vec{MG}.$$

i) Να βρεθεί σημείο O τέτοιο, ώστε να είναι $f(O) = \vec{0}$ και ύστερα

να δείξετε ότι $f(M) = -5\vec{OM}$.

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία είναι $f(M) \parallel \vec{BG}$.

iii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία είναι $|f(M)| = 5|\vec{AM}|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του $\vec{\alpha}$.

16. Στο επίπεδο δίνονται τα σταθερά σημεία A και B.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου

για τα οποία ισχύει $MA^2 + MB^2 = \kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ σταθερό με $2\kappa > AB^2$

17. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις :

i) Το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MG}$ είναι παράλληλο προς

το διάνυσμα $\vec{BG}$ του τριγώνου ABΓ.

ii) O, A είναι δύο σταθερά σημεία του επιπέδου και ισχύει :

$$|\vec{OA}| = 3 \text{ και } \vec{OM} \cdot (\vec{OM} - 2\vec{OA}) = 160.$$

iii) A, B είναι δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $(AB) = 2\alpha$

και $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \kappa$, όπου κ σταθερό και $\kappa + \alpha^2 > 0$.

iv) Ισχύει $\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AG} \cdot \vec{AM} = 0$, όπου A, B, Γ οι κορυφές του τριγώνου ABΓ.

18. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{4}$,

να υπολογίσετε τη γωνία $\varphi = (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, με $\vec{\alpha} = (0, 2)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $|\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}| = 2$,

$$|\vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = 4.$$

i) Να υπολογιστούν τα $|\vec{\gamma}|$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{0}$

ii) Αν $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$, να βρεθεί η προβολή του $\vec{u}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

20. Αν $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να δείξετε ότι :

i) $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ ii) $\vec{\alpha} = \frac{3}{2}\vec{\beta}$ και $5\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}$

21. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, για τα οποία ισχύει $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right)^\wedge = \frac{2\pi}{3}$.

i) Να αποδείξετε ότι : $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \frac{3}{2}\vec{\alpha}$.

ii) Να αποδείξετε ότι : $\left(\vec{u}, \vec{v} \right)^\wedge = \frac{\pi}{6}$, όπου $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, $\vec{v} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

iii) Ο φορέας του $\vec{u}$ διχοτομεί την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, -\vec{\beta}$.

22. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ και ύψος ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG}^2 = 2\overrightarrow{AM}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}^2$

ii) $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AG}^2 = 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GB}$

23. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})^\wedge = \frac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να βρείτε :

i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii) τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$

iii) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

iv) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

i) Να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

ii) Αν $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v} \cdot \vec{u}$, τα μέτρα $|\vec{v}|$ και $|\vec{u}|$, καθώς και την γωνία $(\vec{v}, \vec{u})$.

iii) Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \frac{3}{2} \vec{\alpha}$.

25. Δίνεται τρίγωνο ABΓ για το οποίο ισχύουν: $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $|\overrightarrow{AG}| = 3$ και $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{3}$.

Αν M το μέσο της πλευράς BΓ, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AM}$.

26. Αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \perp (\lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ β) $|\vec{\beta}| = 1$ γ) $|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}| = 5$

27. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ αν ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 12\vec{\beta}$.

28. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB=AG$). Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στη BΓ.

29. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

30. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Να βρείτε: i) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii) την προβολή του $\vec{\alpha}$ στο $\vec{\beta}$ iii) το $|\vec{v}|$, όπου $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

iv) το μέτρο της προβολής του $\vec{\beta}$ στο $\vec{v}$ και v) την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}, \vec{v}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

31. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\gamma} = 8 \text{ προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\gamma} + 4\vec{\beta}, \quad |\vec{\alpha}| = 2 \text{ και } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4.$$

1. Να αποδείξετε ότι: α) $\vec{\gamma} = 2 \text{ προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\gamma} + \vec{\beta}$ β) $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

2. Αν επιπλέον ισχύει $|\vec{\beta}| \neq 2$, να δείξετε ότι: α) τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. β) τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά.

32. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$.

$$\text{Θεωρούμε και την εξίσωση } x^2 - 2|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|x + (1 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = 0 \quad (1).$$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, τότε $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 8 \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0}$.

γ) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 \cdot \rho_2 = 1$, τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Στη συνέχεια, να λύσετε την εξίσωση.

δ) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 + \rho_2 = 2$, να υπολογίσετε τη γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.