

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

1. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων: i) $4x^2 + 9y^2 = 36$ ii) $2x^2 + 3y^2 = 4$.

2. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα $x'x$ και ισχύει $\angle BEB' = 60^\circ$, όπου B, B' οι κορυφές της έλλειψης στον άξονα $y'y$ και E η εστία της. Στην συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω έλλειψης που διέρχεται από το σημείο $M(1, \sqrt{3})$. Ποιές είναι οι εστίες E, E' ;

3. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης $C: 4x^2 + 9y^2 = 36$, η οποία έχει μέσον το σημείο $M(2,1)$.

4. Δίνεται η έλλειψη $C: 4x^2 + y^2 = 2$ και το σημείο της $M(\frac{1}{2}, \lambda)$, $\lambda < 0$.

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία $\angle EME'$, όπου E, E' οι εστίες της έλλειψης.

5. Να δείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1: 5y = 3\lambda(5+x)$ και $\varepsilon_2: 5\lambda y = 3(5-x)$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ με $\lambda \neq 0$, ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες και την εκκεντρότητα.

6. i) Να βρείτε την εστία E και την διευθετούσα δ της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μια εστία της είναι η εστία της παραβολής $y^2 = 4x$ και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

7. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της κορυφής Μ του τριγώνου ΜΕΕ΄ που έχει περίμετρο 36 και Ε(5,0), Ε΄(-5,0).

8. i) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής $\psi^2=12\chi$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων ,η μία εστία της είναι ίδια με την εστία της παραβολής $\psi^2=12\chi$ και έχει εκκεντρότητα $\epsilon=\frac{3}{5}$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την εστία της παραβολής $\psi^2=12\chi$ και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(5,0) και Β(0,4).

9. Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$, $p>0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία

$$E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right) \text{ και } E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι

$$\text{τα σημεία } K\left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ και } \Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right).$$

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο

$$K\left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ είναι κάθετες.}$$

10. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης $4x^2+\psi^2=4$ οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0 .

11. Δίνεται η έλλειψη $c: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και (ε) η εφαπτομένη της έλλειψης

στο σημείο Μ(ασυνθ , βημθ) .Αν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία Ρ(t,0) και Σ(0,μ),τότε να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \text{ η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση } (\beta \text{συν}\theta)x + (\alpha \eta\mu\theta)\psi = \alpha\beta. \quad \beta) \quad \frac{\alpha^2}{t^2} + \frac{\beta^2}{\mu^2} = 1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

12. Δίνεται η έλλειψη $c: x^2+2y^2=2$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες της έλλειψης στις κορυφές A και A' . Μια τρίτη εφαπτομένη της έλλειψης τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία M και N αντίστοιχα. Αν E η εστία της έλλειψης, να αποδείξετε ότι $\overline{ME} \perp \overline{NE}$.

13. Δίνεται η έλλειψη $c: x^2+4y^2=4$ και το σημείο της $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Έστω (ε) η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο M και (δ) η ευθεία που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην (ε) η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο P . Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon) \cdot (MP)=1$.

14. Δίνεται η έλλειψη $c: 16x^2+y^2=16$ και το σημείο της $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2)$.

Η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ . Από το M φέρνουμε ευθεία (δ) κάθετη στην (ε) η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο P . Να αποδείξετε ότι: $\gamma^2 + \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$.

15. α) Δίνεται η έλλειψη $c: \beta^2 x^2 + \alpha^2 \psi^2 = \alpha^2 \beta^2$ και η ευθεία $\varepsilon: \psi = x + t$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται της έλλειψης όταν και μόνο όταν, $\alpha^2 + \beta^2 = t^2$.

β) Δίνονται οι ελλείψεις $c_1: \frac{x^2}{16} + \frac{\psi^2}{9} = 1$ και $c_2: \frac{x^2}{9} + \frac{\psi^2}{16} = 1$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: \psi = x + 5$ είναι κοινή εφαπτομένη των c_1 και c_2 .

16. Δίνονται οι ελλείψεις $c_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ και $c_2: \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = 1, 0 < \alpha < \beta$.

Η ημιευθεία $\psi = (\varepsilon \phi \theta)x, x > 0$ και $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέμνει την (c_1) στο σημείο $\Gamma(x_1, \psi_1)$ και

την (c_2) στο σημείο $\Delta(x_2, \psi_2)$. Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της (c_1) στο Γ και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της (c_2) στο

Δ , να αποδείξετε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{(\varepsilon \phi \theta)^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΕΙΨΗ

17. Η εφαπτομένη (ε) μιας έλλειψης c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$, σε ένα σημείο της M

διαφορετικό από τις κορυφές της, τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ σε ένα σημείο Γ.

Η κάθετη ευθεία (δ) της (ε) στο σημείο M τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ σε ένα σημείο Δ.

Να δείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ διέρχεται από τις εστίες Ε και Ε' της έλλειψης.

18. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{4} + \frac{\psi^2}{9} = 1$ και οι χορδές της έλλειψης με συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών αυτών.

19. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση c: $(x+\psi)^2 + (x-\psi)^2 = 8(\eta\mu\theta)x - 16(\sigma\upsilon\nu\theta)\psi$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του παραπάνω κύκλου.

γ) Να αποδείξετε ότι το κέντρο του κύκλου ανήκει σε μια έλλειψη της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.

20. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x+1)^2 + \psi^2 = 25$ και $C_2: (x-1)^2 + \psi^2 = 4$.

α) Να βρείτε τα κέντρα K_1, K_2 και τις ακτίνες ρ_1, ρ_2 των κύκλων (C_1) και (C_2).

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C_2) είναι εσωτερικός του (C_1).

γ) Να δείξετε ότι τα κέντρα M των κύκλων (C) που εφάπτονται εσωτερικά του (C_1) και εξωτερικά του (C_2) βρίσκονται σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

21. α) Να δείξετε ότι το σημείο $M(\sigma\upsilon\nu\theta, -2\eta\mu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ ανήκει σε έλλειψη c, της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.

β) Αν c: $4x^2 + \psi^2 = 4$ η εξίσωση της έλλειψης, να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο της $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda)$, $\lambda < 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί την γωνία Ε'ΜΕ, όπου $M(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$