

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και μια ευθεία (ε) που διέρχεται από την εστία E της C , δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει την παραβολή στα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι $4x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.
2. Στο σημείο $A(2,1)$ της παραβολής $C: x^2 = 4y$, φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) της C και την κάθετη στην (ε) στο A , η οποία τέμνει την C στο σημείο M . Η εφαπτομένη της C στο M τέμνει την (ε) στο B . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABM .
3. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και μια χορδή AB αυτής που διέρχεται από την εστία της παραβολής.
 - i) Αν y_1 και y_2 είναι οι τεταγμένες των A και B αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει $y_1y_2 = -4$.
 - ii) Στα σημεία A και B φέρουμε τις κάθετες στις εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία αυτά, οι οποίες τέμνονται στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM και BM είναι κάθετες.
4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$.
 - i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $3x + y + 3 = 0$.
 - ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής τις οποίες φέρουμε από το σημείο $M(-2,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

5. Δίνονται η παραβολή $C: y^2 = 4x$ και η ευθεία $\varepsilon: x - \lambda y - 1 = 0$.

Να δείξετε ότι :

α) Η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή C σε δύο σημεία A και B για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Οι εφαπτόμενες της C στα σημεία της A και B τέμνονται κάθετα.

γ) Το σημείο τομής των εφαπτόμενων της C στα A και B κινείται σε σταθερή ευθεία.

6. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 8x$ και ένα σημείο $P(\kappa, \lambda)$ εκτός αυτής.

PA και PB είναι οι εφαπτόμενες που άγονται από το P προς την C ,

όπου A και B τα σημεία επαφής.

i) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB .

ii) Να δείξετε ότι η χορδή AB διέρχεται από την εστία της παραβολής,

αν το P είναι σημείο της διευθετούσας

7. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6x + 2\lambda\psi + 1 = 0$ παριστάνει

κύκλο για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενων της παραβολής

$y^2 = 4x$ και του μικρότερου από τους παραπάνω κύκλους.

8. Έστω η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία $E(4,0)$.

i) Να δείξετε ότι $p=8$ και να γράψετε την εξίσωση της παραβολής.

ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την εστία της παραβολής

και εφάπτεται στην διευθετούσα της παραβολής.

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν η ευθεία $\psi = \lambda x + 8$ εφάπτεται στο κύκλο

$$(x - 4)^2 + \psi^2 = 64$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

9. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4x$, $x \geq 0$ και το σημείο της $A(\lambda, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ .

β) Αν $\lambda=1$, να βρείτε:

i) την εξίσωση (ϵ) της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο A

ii) την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1,0)$ που εφάπτεται στην (ϵ).

10. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (c) με κορυφή O , άξονα συμμετρίας

τον $x'x$, η οποία διέρχεται από το σημείο $K(-1,2)$. Στη συνέχεια, να βρείτε

την εξίσωση της χορδής που ορίζεται από τις εφαπτόμενες της παραβολής (c)

οι οποίες διέρχονται από το σημείο A , όπου $A(2,0)$.

11. Δίνεται η παραβολή $c: \psi^2 = 8x$ και το σημείο της $M(2t^2, 4t)$, $t \neq 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής (c) στο M

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 1, διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ).

12. Δίνεται η παραβολή $c: y^2 = 2px$, $p > 1$ και η χορδή της AB που διέρχεται από την εστία E .

α) Αν το σημείο $M(\frac{3}{2}, 1)$ είναι το μέσο της AB , να δείξετε ότι η εστία έχει συντεταγμένες $(1,0)$.

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών της παραβολής (c) που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{v} = (-1, 2)$.

γ) Αν το σημείο K κινείται στην παραβολή (c), να δείξετε ότι το σημείο P για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PK}$ κινείται επίσης σε παραβολή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΒΟΛΗ

13. Έστω η παραβολή $c: x^2 = \psi$ και τα σημεία $A(t, t^2)$, $B(\mu, \mu^2)$,
 $t \neq \mu$ και $t\mu \neq 0$.

Αν είναι $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, να δείξετε ότι: α) $t\mu = -1$

β) η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(t^2 - 1)x - t\psi + t = 0$ και

γ) η ευθεία AB διέρχεται από σταθερό σημείο.

14. i) Να βρείτε την εστία E και την διευθετούσα δ της παραβολής
με εξίσωση $\psi^2 = 4x$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 4x - 21 = 0$ παριστάνει κύκλο,
του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των
αξόνων, μια εστία της είναι η εστία της παραβολής $\psi^2 = 4x$ και διέρχεται
από το κέντρο του κύκλου $x^2 + \psi^2 - 4x - 21 = 0$.

iv) Να βρείτε: α. την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A(2,5).

β. την εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το B(12,0).

15. i) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής $\psi^2 = 12x$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων,
η μία εστία της είναι ίδια με την εστία της παραβολής $\psi^2 = 12x$ και έχει

εκκεντρότητα $e = \frac{3}{5}$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την εστία της
παραβολής $\psi^2 = 12x$ και είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα
σημεία A(5,0) και B(0,4).