

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

1. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = \rho^2$, όπου $\rho > 0$. Από το σημείο $A(-\rho, 0)$ του C

φέρουμε μια οποιαδήποτε χορδή AB του κύκλου και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $BM = 2AB$. Να αποδείξετε ότι το M κινείται πάνω σε ένα κύκλο που εφάπτεται εσωτερικά με τον κύκλο C .

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (2\lambda + 5)x - 6y + (4\lambda - \alpha) = 0$.

α) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε πραγματική τιμή του λ ;

Να αποδείξετε επίσης ότι το κέντρο του κύκλου κινείται σε μια σταθερή ευθεία.

β) Όταν το α παίρνει τη μικρότερη ακέραια τιμή του, να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=2$ τέμνει όλους τους παραπάνω κύκλους στα ίδια σημεία.

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών

$\varepsilon: \psi = 2x - 1$ και $\delta: \psi = 2x + 3$ και έχει με μια από αυτές σημείο επαφής το $A(1, 5)$.

4. Δίνονται οι κύκλοι $x^2 + \psi^2 - 4\lambda x + 2\psi + 4\lambda^2 - 9 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τους κύκλους που διέρχονται από το σημείο $A(3, 2)$

και το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των κύκλων αυτών στο A .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

5. Δίνονται η ευθεία (ε) με εξίσωση $5x + 3y + 2 = 0$ και ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$, που τέμνονται στα σημεία M και N.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ η εξίσωση

$x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2) = 0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος περνάει από

τα σημεία M και N. Για ποια τιμή του λ ο κύκλος αυτός περνάει και από την αρχή των αξόνων;

ii) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων της ερώτησης (i) ανήκουν σε ευθεία (ε) της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

6. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ (2).

i) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν κύκλους (c_1) , (c_2) αντίστοιχα, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε το σημείο επαφής τους.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους εσωτερικής εφαπτόμενης.

7. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 2$.

i) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν η ευθεία $y = \lambda x + 2$ εφάπτεται στο κύκλο.

iii) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ τέμνει τον κύκλο κατά χορδή AB, με μήκος $(AB) = \sqrt{6}$.

8. i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $C_\lambda : x^2 + y^2 - 2\lambda y - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο K_λ και την ακτίνα ρ_λ .

ii) Να δείξετε ότι τα κέντρα K_λ βρίσκονται σε σταθερή ευθεία (ε).

iii) Οι κύκλοι (C_λ) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A, B με $(AB) = 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

9. i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
ii) Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη απόσταση από την αρχή O των αξόνων.
iii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη απόσταση του σημείου O από τον κύκλο.
10. i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $C_\lambda : x^2 + y^2 - 2(\lambda - 1)x - 2(\lambda + 1)y + \lambda^2 - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
ii) Να βρείτε την ευθεία (ε) πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα των κύκλων, για τις διάφορες τιμές του λ .
iii) Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων για $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$.
iv) Αν $\lambda=1$ και η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία B, Γ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $OB\Gamma$.
11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - \lambda x + y - \frac{\lambda}{2} = 0, \lambda \neq -1$ (1).
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq -1$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα K_λ για τις διάφορες τιμές του λ .
γ) Να δείξετε ότι: οι κύκλοι C_λ για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη, την $x = -\frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

12. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y = 0$ και η ευθεία $\epsilon: x + y = 1$, με $\lambda \neq 0$.

A. i) Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.

ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

B. i) Να βρεθούν τα $\lambda \neq 0$ ώστε η ευθεία (ϵ) να εφάπτεται στον κύκλο.

ii) Να βρεθούν τα $\lambda \neq 0$ ώστε η ευθεία (ϵ) να τέμνει τον κύκλο

στα σημεία A και B και η χορδή AB να φαίνεται από το $O(0,0)$ υπό ορθή γωνία.

13. i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$ παριστάνει κύκλο, ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

ii) Να βρεθεί το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\epsilon: 6x - 8y - k = 0$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία A και B, ώστε το τρίγωνο AOB να είναι ορθογώνιο στο O, όπου O η αρχή των αξόνων.

iii) Για $k=24$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB, όπου O η αρχή των αξόνων και A, B τα σημεία που η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$.

14. A. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

B. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

- 15.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x \sin \theta - 2y \cos \theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
- α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
 - β. Αν $\theta = 2\pi$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.
 - γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
- 16.** Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.
- A. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.
 - B. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:
 - α. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 - β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.
- 17.** Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: 3x + 4y + 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x + 4y + 16 = 0$.
- A. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 .
 - B. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2 .
 - Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα $x'x$ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.
- 18.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο $M(2,1)$.
- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.
 - β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2,1)$.
 - γ. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MAB .
- 19.** Δίνεται η εξίσωση: $(t^2 - 1)x + 2t\psi - t^2 - 2t - \gamma = 0$ (1) με $t, \gamma \in \mathbb{R}$
- α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $t \in \mathbb{R}$
 - β. Αν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο.
 - γ. Αν $\gamma \neq -1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x, \psi)$ που από το καθένα διέρχεται μόνο μια ευθεία η οποία επαληθεύει την εξίσωση (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2κx + 4κy - 4κ^2 = 0$ (1), $κ \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $κ \in \mathbb{R} - \{0\}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο $\Lambda_κ$ και την ακτίνα $\rho_κ$.
- ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων $\Lambda_κ$ των παραπάνω κύκλων για τις διάφορες τιμές του $κ \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- iii) Να βρείτε το $κ$, αν η ευθεία $\epsilon: 2x - y + 4 = 0$ τέμνει τον κύκλο κατά διάμετρο.
- iv) Αν $κ = -1$, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $OB\Gamma$, όπου O η αρχή των αξόνων και B, Γ τα σημεία τομής της ευθείας (ϵ) με τον κύκλο.
- v) Αν $κ = 1$, να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία (ϵ).
- vi) Αν $κ = -1$, να βρείτε την εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο $A(-1,5)$.

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2κx + 4κy - 5 = 0$ (1), $κ \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $κ \in \mathbb{R}$, του οποίου να βρείτε το κέντρο $\Lambda_κ$ και την ακτίνα $\rho_κ$.
- ii) Να δείξετε ότι οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, έστω τα A και B και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους AB .
- iii) Να βρείτε τον κύκλο με τη μικρότερη ακτίνα.
- iv) Αν $κ = 0$, να βρείτε τις εφαπτόμενες ϵ_1, ϵ_2 του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $A(1,3)$ και στη συνέχεια την γωνία των δύο αυτών εφαπτόμενων.
- v) Αν $κ = 1$, να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη απόσταση του σημείου $A(1,3)$ από τον κύκλο.

22. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου:

- i) που διέρχεται από τα σημεία $A(1,3), B(5,1)$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία με εξίσωση $\psi = x - 2$.
- ii) που διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-1,0)$.
- iii) που διέρχεται από τα σημεία $A(1,4), B(-3,0)$ και έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{10}$.
- iv) με ακτίνα $\rho = 2$, που εφάπτεται του κύκλου $c_1: x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο $A(1,0)$.