

1. Δύο ποδηλάτες Π_1 , Π_2 ξεκινούν το πρωί από τα σπίτια τους για να πάνε στην εργασία τους, κινούμενοι με την ίδια σταθερή ταχύτητα. Οι θέσεις των δύο ποδηλατών στο ορθοκανονικό σύστημα Οχψ δίνονται από τα σημεία : $A(t-1, 2t+3)$, $B(-t+3, 3t-1)$ αντίστοιχα, όπου $t \geq 0$ ο χρόνος σε λεπτά.

(α) Να βρείτε:

- i) Τα σημεία του Οχψ που βρίσκονται τα σπίτια των δύο ποδηλατών.
- ii) Τη γραμμή της θέσης των δύο ποδηλατών κάθε χρονική στιγμή t .
- iii) Το σημείο που διασταυρώθηκαν οι πορείες των δύο ποδηλατών, έστω Γ .
- iv) Έφθασαν στο σημείο Γ την ίδια χρονική στιγμή; (αιτιολογήστε)

(β) Αν η εργασία του Π_1 ποδηλάτη είναι στο σημείο $\Delta(29,63)$ και του Π_2 ποδηλάτη είναι στο σημείο $E(-27,89)$, ποιος από τους δύο ποδηλάτες έφθασε νωρίτερα στην εργασία του και σε πόση ώρα; (αιτιολογήστε)

2. Δίνεται η εξίσωση: $a(x+\psi-4)+x-2=0$ (1).

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.
- ii) Έστω τα σημεία $A(1,-4)$, $B(-3,4)$ και το σημείο M που ικανοποιεί την σχέση $\overline{AM} = 3\overline{MB}$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που ορίζεται από την εξίσωση (1) και διέρχεται από το σημείο M .

3. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+1)x + (\lambda-1)\psi+1=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία (ϵ_λ) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β) Να βρείτε το σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες (ϵ_λ) που ορίζονται από την εξίσωση (1).
- γ) Να βρείτε την ευθεία που ορίζει η εξίσωση (1) που είναι παράλληλη:
 - i) στον άξονα $x'x$.
 - ii) στον άξονα $\psi'\psi$.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_λ) που απέχει από την αρχή των αξόνων $\frac{1}{\sqrt{10}}$ μονάδες.

4. Δίνεται η ευθεία (ϵ): $\chi+\psi-1=0$

- i) Να βρεθεί η προβολή του σημείου $P(2,3)$ πάνω στην (ϵ)
- ii) Να βρεθεί το συμμετρικό του P ως προς την ευθεία (ϵ).

ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu - 1)y - 5\mu^2 + 4\mu + 1 = 0$ για κάθε πραγματική τιμή του μ , εκτός από μια η οποία και να βρεθεί, είναι εξίσωση ευθείας που διέρχεται από σταθερό σημείο .

6. Δίνεται η εξίσωση $\chi + \psi - 1 + \lambda(2\chi - \psi - 3) = 0$.

i) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστά ευθεία για κάθε πραγματικό λ .

ii) Να δείξετε ότι οι πιο πάνω ευθείες περνούν από το ίδιο σημείο το οποίο να βρεθεί.

iii) Να βρείτε την ευθεία από τις παραπάνω που είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: 3\chi - 2\psi + 2011 = 0$.

7. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \frac{x}{\lambda} + \frac{\psi}{\lambda - 1} - \frac{2}{\lambda} = 0, \lambda \neq 0, 1$.

i) Να βρείτε τη εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία είναι κάθετη στην (ε) στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα x' .

ii) Να βρείτε το λ , αν η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

8. Έστω $AB\Gamma$ ένα τρίγωνο με $A(3, 0)$, $B(-2, 1)$, $\Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και εμβαδό $(AB\Gamma) = 12\tau\mu$. Η κορυφή του Γ κινείται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $2x - \psi + 1 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + 2x\psi - \lambda x - \lambda\psi = 0, \lambda \in \mathbb{R}^*$, παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες από τις οποίες η μια διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες x' και ψ' τρίγωνο με εμβαδό $2\tau\mu$.

10. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και η εξίσωση

$$(|\vec{\alpha}| - 3|\vec{\beta}|)x + (\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2)\psi = 2|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \quad (1), x, \psi \in \mathbb{R}.$$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει πάντα ευθεία (ε).

ii) Αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα x' , τότε

$$\text{να αποδειχθεί ότι γωνία } \omega = (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) > \frac{\pi}{2}.$$

iii) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(|\vec{\beta}|, 1)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \mu x \psi - 1 + \mu \psi = 0$ (1), $\mu \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ζεύγος 2 ευθειών ,
μια από τις οποίες είναι παράλληλη στον άξονα $\psi' \psi$.

ii) Αν $x=1$, $\mu\psi=x+1$, $\mu \neq 0$ οι εξισώσεις δύο ευθειών , να βρείτε
τις τιμές του μ ώστε η οξεία γωνία τους να είναι $\frac{\pi}{4}$.

12. Δίνονται τα σημεία $A(2\alpha, 0)$ και $B(0, 2\alpha+2)$, με $\alpha > 0$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (δ) του ευθυγράμμου
τμήματος AB.

ii) Να δείξετε ότι: $x_A \cdot x_\Gamma + \psi_B \cdot \psi_\Delta = 0$, όπου Γ, Δ τα σημεία τομής
της (δ) με τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$ αντίστοιχα.

iii) Να βρείτε το α , αν το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι τετραπλάσιο
του εμβαδού του τριγώνου $O\Gamma\Delta$.

13. Ο Νίκος ξεκινά από το σπίτι του που βρίσκεται στη θέση A
ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων $Ox\psi$ και ακολουθεί
πορεία που δίνεται από τις συντεταγμένες του σημείου $N(2t, t-1)$,
όπου t ο χρόνος , $t \geq 0$.

Συγχρόνως η Τζένη , φίλη του Νίκου , ξεκινά από το σπίτι της που
βρίσκεται στη θέση B του $Ox\psi$ και ακολουθεί πορεία που δίνεται
από τις συντεταγμένες του σημείου $T(t+1, -t+4)$, $t \geq 0$.

i) Να βρείτε τα σημεία A, B και τις εξισώσεις που δείχνουν την πορεία
των 2 φίλων.

ii) Σε ποιο σημείο οι πορείες τους συναντιούνται ;

iii) Θα μπορέσουν οι δύο φίλοι να χαιρετιστούν ;

iv) Αν $\Sigma(8, 3)$ είναι η θέση μιας καφετέριας στο ορθοκανονικό σύστημα
συντεταγμένων ποιος από τους 2 φίλους πηγαίνει σ' αυτή και σε τι
απόσταση περνάει ο άλλος ;

v) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τα σημεία
A, B και Σ .

Δίνεται ότι οι δύο φίλοι κινούνται με την ίδια σταθερή ταχύτητα.

14. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \psi^2 - 4\lambda\psi - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ παριστάνει
δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 κάθετες μεταξύ τους. Στη συνέχεια, να βρείτε
τον γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των δύο ευθειών ϵ_1, ϵ_2 .

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \varphi$, όπου $\varphi \in [0, \pi]$.

Επίσης, δίνεται η εξίσωση $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2)x + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|)\psi + 2 = 0$ (1).

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία ε_φ για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$.

ii) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_φ για τις διάφορες τιμές του $\varphi \in [0, \pi]$,

διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

iii) Αν η ευθεία ε_φ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

iv) Αν η ευθεία ε_φ είναι παράλληλη στον άξονα $\psi'\psi$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

v) Αν η ευθεία ε_φ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° , να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

vi) Να βρείτε την γωνία φ , ώστε η ευθεία ε_φ να διέρχεται από το σημείο $M(-1, -1)$.

vii) Αν $0 < \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και η ευθεία ε_φ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό

$E=2$ τ.μ, να δείξετε ότι $\varphi = \frac{\pi}{6}$

16. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda-1)x + \lambda\psi + 8 = 0$ και $\varepsilon_2: -\lambda x + (\lambda+1)\psi + 1 - 2\lambda = 0$ να είναι : i) κάθετες ii) παράλληλες.

17. i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, 3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: 2x + \psi - 3 = 0$.

ii) Να βρείτε την τιμή του α , αν η απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία (δ) είναι ίση με $\sqrt{5}$.

18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 2\lambda x - 2\lambda y + 2\lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες.

Έστω (ε_1) , (ε_2) οι ευθείες αυτές. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$ οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox και Oy τραπέζιο με εμβαδόν 4 τμ.

19. Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1,4)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(1,-2)$.

Να βρείτε : i) τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου, ii) το μήκος του ύψους $B\Delta$ και iii) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

20. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\psi^2 - 3x\psi - 2x^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ κάθετες μεταξύ τους.

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (δ) που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και σχηματίζει με τις ευθείες ε_1 και ε_2 τρίγωνο με εμβαδόν 20 τμ.

21. Δίνονται οι ευθείες : $\varepsilon_1 : x + y = \kappa$, $\varepsilon_2 : \kappa x - y = 1$, $\varepsilon_3 : x - y = 1$ με $\kappa \in (0, +\infty)$

i) Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in (0, +\infty)$ η απόσταση $d(M, \varepsilon_3)$ ισούται με $6\sqrt{2}$.

22. i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varepsilon_\lambda : \lambda x + (\lambda^2 - \lambda)\psi + \lambda = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

ii) Να δείξετε ότι όλες οι παραπάνω ευθείες, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, διέρχονται από σταθερό σημείο A του άξονα $x'x$, το οποίο και να βρεθεί.

iii) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , αν η ευθεία ε_λ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $E = \frac{1}{24}$ τ.μ.

23. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-2,3)$, έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E = 2|\lambda|$ τ.μ.

Αν $\lambda = \frac{-3}{4}$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία είναι κάθετη

στην (ε) στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$.

24. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \alpha x + \beta y = \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, η οποία τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy ενός ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, αν το εμβαδόν του τριγώνου AOB είναι 13 τ.μ και το άθροισμα της τετμημένης του A και της τεταγμένης του B είναι ίσο με 15.

25. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις :

$$\varepsilon_1: \alpha x - \beta y - 1 = 0, \quad \varepsilon_2: (\beta - 1)x + \alpha y = 0, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β αν ισχύει:

$$\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \right) = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_3, \quad \text{όπου } \varepsilon_3: y = -x.$$

26. Δύο πλοία αναχωρούν από τα λιμάνια του Πειραιά και της Ραφήνας αντίστοιχα στις 8.00 το πρωί κινούμενα με την ίδια σταθερή ταχύτητα. Οι συντεταγμένες των πλοίων στο ραντάρ του κέντρου επιχειρήσεων από το οποίο παρακολουθούνται είναι $A(t+1, t-1)$ και $B(t-1, -t+5)$, όπου t ο χρόνος σε ώρες που έχει περάσει από τη στιγμή της αναχώρησής τους. Αν ο Πειραιάς βρίσκεται στη θέση $\Pi(1, -1)$ και η Ραφήνα στη θέση $P(-1, 5)$, τότε:

A) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

B) Έστω $\varepsilon_\alpha: y = x - 2$ και $\varepsilon_\beta: y = -x + 4$ αντίστοιχα οι εξισώσεις

των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

i) Να δείξετε ότι οι πορείες των δύο πλοίων τέμνονται χωρίς να υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης των δύο πλοίων.

ii) Να βρείτε την απόσταση που έχουν διανύσει τα δύο πλοία μέχρι τις 2.00 το μεσημέρι.

iii) Να βρείτε ποιο πλοίο θα διέλθει πιο κοντά από την βραχονησίδα $\Gamma(5, 4)$.

iv) Να εξετάσετε αν κάποιο από τα δύο πλοία έχει την δυνατότητα, χωρίς να εκτραπεί από την πορεία του, να βοηθήσει σκάφος που εκπέμπει S.O.S και βρίσκεται στη θέση $\Delta(2004, 2002)$.