

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Δύο κάλπες K_1 και K_2 περιέχουν n σφαιρίδια η κάθε μία αριθμημένα από το 1 έως το n .

Παίρνουμε από ένα σφαιρίδιο από κάθε κάλπη. Να αποδείξετε ότι, η πιθανότητα ο αριθμός του σφαιριδίου από την κάλπη K_1 να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό του σφαιριδίου από την κάλπη K_2 , είναι $\frac{n-1}{2n}$.

2. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι :

α) $P(A \cap B) + 1 = P(A) + P(B) + P(A' \cap B')$.

β) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

γ) Αν $P(A) = 0,9$ και $P(B) = 0,8$, τότε $0,7 \leq P(A \cap B) \leq 0,8$.

3. Ένας άνεργος υποβάλλει αίτηση για να προσληφθεί σε δύο εργοστάσια α και β .

Αν η πιθανότητα να προσληφθεί στο εργοστάσιο β είναι 40 %, η πιθανότητα να προσληφθεί μόνο στο εργοστάσιο β είναι 28 % και η πιθανότητα να μην προσληφθεί σε κανένα εργοστάσιο είναι 16 %, να βρείτε την πιθανότητα να προσληφθεί :

α) στο εργοστάσιο α .

β) σ' ένα μόνο εργοστάσιο.

γ) το πολύ σ' ένα εργοστάσιο.

4. Έστω $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων :

α) A : η μέση τιμή του δείγματος $\alpha^3 - 7, 3 - 5\alpha^2, 9 - 8\alpha, \alpha^2 + 1, \alpha - 6$, όπου $\alpha \in \Omega$, είναι ίση με -2 .

β) B : η διάμεσος του δείγματος $2, \beta, 0, -1, 2, 1$, όπου $\beta \in \Omega$, είναι ίση με 1,5.

γ) Γ : η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3\gamma^2 x^2 - 6\gamma x - 1$, όπου $\gamma \in \Omega$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_0 = \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

γ) Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα, να αποδείξετε ότι $f(P(A)) = f(P(B))$.

6. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν οι ρίζες της εξίσωσης $(2x - 1)(12x - 5)(6x - 1) = 0$ είναι οι πιθανότητες $P(B)$, $P(B - A)$, $P(A \cup B)$, να βρείτε τις πιθανότητες: $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(A - B)$, $P(A' \cup B)$, $P(A' \cap B')$.

7. Αν $P(A)$ είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει $|P(A) + 2| - |P(A) - 3| = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\lambda| \leq 1$.

8. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda^2$, με $\lambda \in \Omega$ και $x \in \mathbb{R}$.

Έστω τα ενδεχόμενα :

X : η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 5]$ είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\frac{68}{3}$.

Y : η ελάχιστη τιμή της f στο $[0, 5]$ είναι μικρότερη ή ίση του 4.

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο $[0, 5]$.

B. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων X και Y .

Γ. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $X \cap Y$ και $X \cup Y$.

9. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και η εξίσωση

$9x^2 - 45P(2)x + 2P(3) = 0$ με ρίζες τους αριθμούς $2P(1)$ και $P(2)$.

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

10. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B δύο ενδεχόμενα τέτοια, ώστε $A \subseteq B$ με πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ αντιστοίχως. Αν οι αριθμοί $P(A)$ και $P(B)$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2005$, τότε
α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f .
β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B - A)$.

11. Οι τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή 8 και διασπορά 4 αυξάνουν κατά μία σταθερά $c \in \Omega = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$, όπου τα στοιχεία του Ω θεωρούνται ισοπίθانا. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου
 A : Το δείγμα που θα προκύψει να είναι είναι ομοιογενές.

12. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από 20 απλά ισοπίθانا ενδεχόμενα και $A \subseteq \Omega$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2P(A)x$. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο το $-\frac{1}{8}$, να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του A .

13. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Εκλέγουμε στην τύχη ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$.
Αν $f(x) = x^3 - 2\lambda x^2 + \lambda^2 x + 1 + 2\lambda$, να βρείτε την πιθανότητα η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

14. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Επιλέγουμε στην τύχη ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$.
Αν $f(x) = x^3 - 2\lambda x^2 + 4\lambda x + \lambda$, να βρείτε την πιθανότητα η f να μην έχει τοπικά ακρότατα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- 15.** α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία.
 β) Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Να αποδείξετε ότι :
- i) $f(P(A \cup B)) \leq e - 1$
- ii) Αν $A \subseteq B$, τότε $P(B) + e^{P(A)} \leq P(A) + e^{P(B)}$.

16. Δίνονται οι αριθμοί $0, -3x, 2\ln x, -\ln x, 2x$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς ώστε, η μέση τιμή τους να γίνεται μέγιστη και στη συνέχεια, να υπολογίσετε τη διάμεσο, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής τους.

β) Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος που έχει ως στοιχεία του τους παραπάνω αριθμούς για $x = 1$. Αν $P(\lambda) = \frac{1}{|\lambda|}$, $\lambda = -3, 2$, να βρείτε την πιθανότητα $P(0)$.

17. Μέσα σε κουτί βρίσκονται 1000

λαχνοί που ο καθένας έχει γραμμένο ένα μονοψήφιο αριθμό. Για τους μονοψήφιους αυτούς αριθμούς δίνεται ο διπλανός πίνακας αθροιστικών συχνοτήτων. Τραβάμε από το κουτί ένα λαχνό και σημειώνουμε τον αριθμό.

Μονοψήφιος αριθμός	N_i	Μονοψήφιος αριθμός	N_i
0	20	5	400
1	120	6	540
2	200	7	700
3	300	8	900
4	350	9	1000

Να βρεθεί:

i) ο δειγματικός χώρος του πειράματος, έστω Ω .

ii) η πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}\lambda^2 x^3 - 3\lambda x^2 + 5x + 1$ έχει στο $x_0 = 1$ ακρότατο, όπου $\lambda \in \Omega$

B: ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος της μέσης τιμής των τιμών των παρατηρήσεων

Γ: ο αριθμός x είναι μικρότερος του $\frac{\delta}{2}$, όπου δ η διάμεσος όλων των τιμών x_i

$\Delta : A \cap \Gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

18. Από το σύνολο των φοιτητών του τρίτου εξαμήνου του Μαθηματικού τμήματος το 60% προσήλθε στην εξέταση του μαθήματος Πιθανότητες I και από αυτούς το 40% πέρασε το μάθημα. Επίσης, το 80% του συνόλου των φοιτητών αυτών προσήλθε στην εξέταση του μαθήματος Στατιστική I και από αυτούς το 50% πέρασε το μάθημα. Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου, ένας φοιτητής που επιλέγεται τυχαία να έχει περάσει τουλάχιστον ένα από τα δύο μαθήματα είναι 0,54 να βρείτε:

- i) την πιθανότητα του ενδεχομένου ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητής τρίτου εξαμήνου να έχει περάσει και τα δύο μαθήματα.
- ii) το πλήθος των φοιτητών του τρίτου εξαμήνου αν το πλήθος των φοιτητών που πέρασαν ακριβώς ένα μάθημα είναι 22.

19. Πέντε σφαίρες αριθμημένες με 0, 1, 2, 3, 4 τοποθετούνται σε ένα κουτί. Παίρνουμε από το κουτί μία σφαίρα, σημειώνουμε τον αριθμό της και την τοποθετούμε πάλι στο κουτί. Κατόπιν παίρνουμε δεύτερη σφαίρα και σημειώνουμε τον αριθμό της. Αν στην εξίσωση $ax + \beta = 0$, $x \in \mathbb{R}$, ο συντελεστής a παίρνει την τιμή της πρώτης ένδειξης και ο β της δεύτερης, να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων :

- A : η εξίσωση έχει μια λύση.
B : η εξίσωση είναι αδύνατη.
Γ : η εξίσωση είναι ταυτότητα.

20. Τέσσερις σφαίρες αριθμημένες με 1, 2, 3, 4 τοποθετούνται σε ένα κουτί. Παίρνουμε από το κουτί μια σφαίρα, σημειώνουμε τον αριθμό της και την τοποθετούμε πάλι στο κουτί. Κατόπιν παίρνουμε δεύτερη σφαίρα και σημειώνουμε τον αριθμό της. Αν στην εξίσωση $ax^2 + 4x + \beta = 0$, $x \in \mathbb{R}$, ο συντελεστής a παίρνει την τιμή της πρώτης ένδειξης και ο σταθερός όρος β παίρνει την τιμή της δεύτερης ένδειξης, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :

- A : η εξίσωση έχει ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$.
B : η εξίσωση έχει ρίζες ίσες.
Γ : η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

21. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Δίνεται επίσης ότι $|2P(A)-2|+|-P(A)+3|=2\lambda+1$, όπου $\lambda \in \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$.

i) Να βρείτε το λ και την πιθανότητα $P(A)$.

ii) Να δείξετε ότι $P(A-B) \leq \frac{2}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

22. Σε ένα δείγμα υποψηφίων των γενικών εξετάσεων 1ης και 4ης δέσμης, από τους οποίους οι 200 είναι της 1ης δέσμης, πέτυχαν 80 υποψήφιοι από την 4η δέσμη. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : «πέτυχε ο υποψήφιος» και B : «απέτυχε ο υποψήφιος της 4ης δέσμης».

Αν είναι $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = \frac{4}{5}$, να βρείτε:

- i) Το πλήθος των υποψηφίων της 4ης δέσμης.
- ii) Το πλήθος των επιτυχόντων της 1ης δέσμης.

23. Σε διαγωνισμό του δημοσίου για πρόσληψη υπαλλήλων συμμετείχαν 80.000 υποψήφιοι για 3.400 θέσεις. Οι υποψήφιοι ήταν τριών κατηγοριών. Απόφοιτοι Λυκείου, πτυχιούχοι Ανωτέρων Σχολών και πτυχιούχοι Ανωτάτων Σχολών. Οι απόφοιτοι Λυκείου σε αριθμό ήταν διπλάσιοι από τους πτυχιούχους Ανωτάτων Σχολών. Τα ποσοστά επιτυχίας για κάθε κατηγορία υποψηφίων ήταν 3% για τους απόφοιτους Λυκείου, 6% για τους πτυχιούχους Ανωτάτων Σχολών και 5% για τους πτυχιούχους Ανωτέρων Σχολών. Παίρνουμε στην τύχη έναν επιτυχόντα. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι:

- i) Απόφοιτος Λυκείου,
- ii) Πτυχιούχος Ανωτάτης Σχολής,
- iii) Πτυχιούχος Ανωτέρας Σχολής.

24. Έστω A, B τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A) = x$, $P(B) = y$ και $P(A \cup B) = z$, να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων :

- i) να μην πραγματοποιηθεί το A.
- ii) να πραγματοποιηθούν και τα δύο ενδεχόμενα.
- iii) να μην πραγματοποιηθούν τα A και B.
- iv) να πραγματοποιηθεί μόνο το B.
- v) να πραγματοποιηθεί μόνο το A ή μόνο το B.

25. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)x^3 - x^2 + (\alpha - 1)^2 x + 2010$, $\alpha \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου A: η f έχει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

26. Θεωρούμε ένα μη συμμετρικό ζάρι στις έδρες του οποίου σημειώνουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Έστω $P(\lambda)$ η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη $\lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6$, με τη ρίψη του ζαριού.

Έστω $P(1)=P(3)=P(5)$ και $P(2)=P(4)=P(6)=\frac{2}{3}P(1)$.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα $P(\lambda)$, όταν $\lambda=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

ii) Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων :

A : η ένδειξη είναι αριθμός άρτιος.

B : η ένδειξη είναι αριθμός περιττός.

Γ : η ένδειξη είναι ο αριθμός 5.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3 - P(A \cup B) \cdot x^2 + 2[P(A \cap B) - 3] \cdot x + P(A)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$

είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

α. $P(A \cup B) = P(A \cap B)$.

β. τα A, B είναι ισοπίθανα.

γ. $P(A-B) = P(B-A)$.

δ. $P(A-B) + P(B-A) = 0$.

ε. $A=B$.

28. Έστω $\Omega = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\mu}{3}x^3 - 2x^2 + (\mu + 3)x + 2010$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν A, B και Γ ενδεχόμενα του Ω , όπου $A = \{\mu \in \Omega / \text{η } f \text{ έχει δύο τοπικά ακρότατα}\}$,

$B = \{\mu \in \Omega / \text{η } f \text{ έχει ένα τοπικό ακρότατο}\}$ και $\Gamma = \{\mu \in \Omega / \text{η } f \text{ δεν έχει τοπικά ακρότατα}\}$,

να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: A, B, $A \cup B$ και Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

29. α) Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε να ισχύουν:

$$A \subseteq B, P(A) = \frac{2\lambda - 1}{5} \text{ και } P(B) = \frac{8 - 3\lambda}{3}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{Z}, \text{ να αποδείξετε ότι } \lambda = 2.$$

β) Αν $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι:

i) τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

$$\text{ii) } \frac{4}{15} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{5}$$

$$\text{iii) } P(A - B) \leq \frac{1}{3}, \frac{1}{15} \leq P(B - A) \leq \frac{2}{5}$$

iv) να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

$$A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A' \cup B$$

30. Ο διπλανός πίνακας δίνει την κατανομή των βαθμών στο τεστ των Μαθηματικών των 100 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου.

Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος των βαθμών είναι $\delta = 50$ και η μέση τιμή των βαθμών είναι ίση με $\bar{x} = 51$:

α. να αποδείξετε ότι $F_1\% = 5\%$ και $F_3\% = 70\%$ και

β. να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες των βαθμών

Από το δείγμα των 100 μαθητών επιλέγουμε στην τύχη ένα μαθητή.

Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: ο μαθητής έχει βαθμολογία μικρότερη της μέσης βαθμολογίας των μαθητών

B: ο μαθητής έχει βαθμολογία τουλάχιστον 64

Βαθμολογία	$F_i\%$
$[0, 20)$	F_1
$[20, 40)$	30
$[40, 60)$	F_3
$[60, 80)$	90
$[80, 100]$	100

31. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_3\}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2P(A)x + P(A - B)$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει για $x = \frac{1}{2}$ ελάχιστο ίσο με το 0 τότε, να βρείτε

τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $A, B, A \cap B, A - B, A' \cup B, A' \cap B'$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

32. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με $P(1) = 2P(2) = 4P(3) = \kappa$ και $P(0) = \frac{1}{8}$. Να δείξετε ότι $\kappa = \frac{1}{2}$.

Θεωρούμε και την συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 3)x + 13, x \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda \in \Omega$.

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f και να βρείτε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων της.

β. Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω .

γ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ : η συνάρτηση f έχει ελάχιστο στο 1

33. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με $4P(0) = P(1) = 2P(2) = 4P(3) = \frac{1}{\kappa}$.

α. Να δείξετε ότι $\kappa = 2$.

β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 5)x + 2011, x \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda \in \Omega$.

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$A = \{ \lambda \in \Omega / \text{η συνάρτηση } f \text{ παρουσιάζει ελάχιστο για } x=1 \}$

γ. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες:

2, 1, 1, 6, λ^2 , 3, 3, $6-3\lambda$, όπου $\lambda \in \Omega$.

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $B = \{ \lambda \in \Omega / \text{η μέση τιμή } \bar{x} > 2,5 \}$

δ. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A' - B$, $A' \cap B'$, $A' - B'$

34. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$.

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες :

$P(A)$, $P(B)$, $P(B-A)$, $P(A-B)$, $P(\Omega)$, $P(\emptyset)$ και η διάμεσος των παρατηρήσεων

είναι ίση με $\delta = \frac{1}{4}$.

α. Να βρείτε: α_1) την πιθανότητα $P(B)$ και α_2) την μέση τιμή των παρατηρήσεων.

β. Αν $P(B-A) = \frac{1}{4}$, τότε:

β_1) να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{4}$ και β_2) να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

35. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις ετήσιες αποδοχές των υπαλλήλων μιας εταιρείας σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ.

Αποδοχές $[α,β)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6]$
Σχετ. Αθρ.Συχν. $F_i\%$	20	F_2	80	86	100

Αν η διάμεσος των μισθών είναι 26.000 ευρώ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $F_2\%=70\%$.

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των αποδοχών των υπαλλήλων της εταιρείας.

γ. Επιλέγουμε τυχαία ένα υπάλληλο.

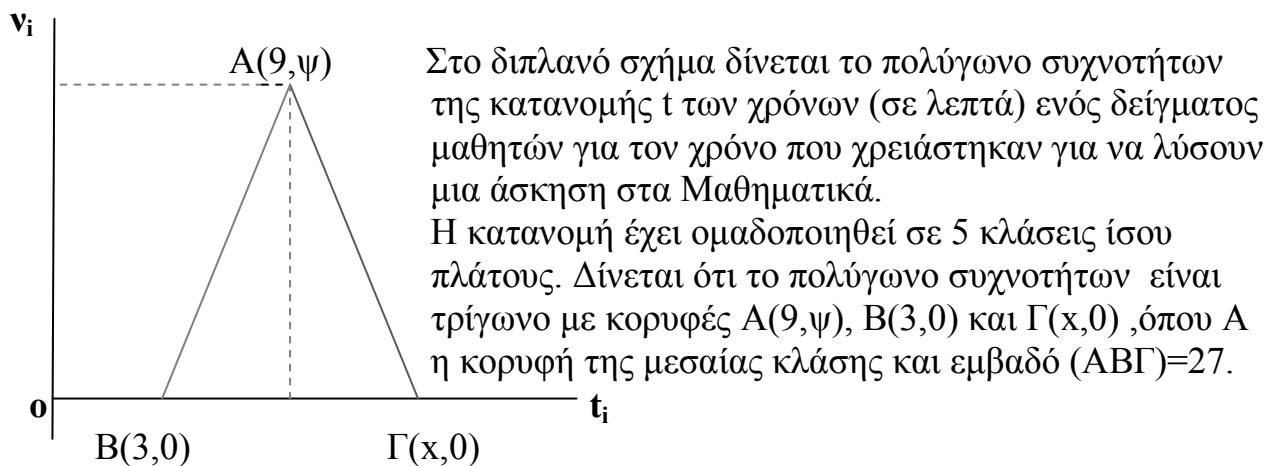
Ποιά η πιθανότητα οι ετήσιες αποδοχές του να είναι:

i) μεγαλύτερες ή ίσες των 30.000 ευρώ.

ii) μικρότερες των 26.000 ευρώ.

iii) μεγαλύτερες ή ίσες της μέσης τιμής και μικρότερες των 32.000 ευρώ.

36.



i) α) Να δείξετε ότι: $c=2$, $x=15$ και $\psi=9$, όπου c το πλάτος των κλάσεων.

β) Να βρείτε τις συχνότητες των κλάσεων.

ii) Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: ο μαθητής να λύσει την άσκηση σε χρόνο μεγαλύτερο ή ίσο των 6 λεπτών και μικρότερο των 10 λεπτών.

B: ο μαθητής να λύσει την άσκηση σε χρόνο μεγαλύτερο ή ίσο των 4,5 λεπτών και μικρότερο των 6 λεπτών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

37. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - P(A \cup B)x^2 + 2[P(A-B) + \frac{1}{2}]x + 1$, $x \in \mathbb{R}$,

όπου A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A') = \frac{1}{3}$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, \frac{13}{6})$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° , τότε:

α. να βρείτε την παράγωγο της f .

β. να δείξετε ότι: i) $P(B) = \frac{1}{2}$ ii) $P(A \cap B) = P(A')$

38. Έστω $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ένας δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα

$A = \{\alpha, \beta\}$, $B = \{\gamma, \delta\}$. Επίσης ισχύει $P(A-B) = \frac{2v-1}{v+3}$, $P(B-A) = \frac{4v-1}{4v}$, $v \in \mathbb{N} - \{0\}$.

i) Να δείξετε ότι: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$

ii) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P(A' \cup B')$, $P(A' \cup B)$, $P(A \cup B')$.

iii) Αν η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές:

$P(A)$, $P(B)$, $P(A' \cup B')$, $P(A' \cup B)$, $P(A \cup B')$ και $P(A \cap B)$,

να δείξετε ότι το δείγμα των τιμών δεν είναι ομοιογενές.

39. Έστω δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν A, B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω , για τα οποία ισχύει $16(P(B))^2 - 25P(B) - P(A) + 10 = 0$, να δείξετε ότι:

i) $P(B) = \frac{3}{4}$ και $P(A \cup B) = 1$

ii) τα A, B είναι συμπληρωματικά ενδεχόμενα..

40. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x + \ln(1-x)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Αν A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει:

$P(A) = x_0$, όπου x_0 η θέση τοπικού ακρότατου της f και $P(A-B) = f(\frac{1}{2}) + 2\ln 2 + \frac{1}{3}$,

να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $A' \cup B$, $A' \cup B'$.

iv) Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων: $P(A' \cup B)$, $P(A' \cup B')$, $P(A' - B')$ και

$P(B' - A')$ είναι $\frac{1}{2}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων B και $A \cup B$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

41. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{2kx}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, για την οποία ισχύει $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$.

i) Να βρείτε την τιμή του k .

ii) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει:

$P(A)=k$, $P(A-B)=\frac{1}{6}$ και $P(B-A)=\frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

$A \cap B$, $A \cup B$, $A' \cup B$, $A' \cap B'$, $A' - B'$.

42. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη σύνθεση των υπαλλήλων μιας εταιρείας από άποψη φύλου και μόρφωσης.

Απόφοιτοι Λυκείου	Άνδρας	Γυναίκα
	20%	15%
Πτυχιούχοι Α.Ε.Ι	20%	45%

Α. Η μέση ηλικία όλου του προσωπικού είναι 44 χρόνια, ενώ η μέση ηλικία των ανδρών είναι 50 χρόνια. Να βρείτε τη μέση ηλικία των γυναικών.

Β. Αν επιλεγεί τυχαία ένας υπάλληλος της εταιρείας, να βρείτε τη πιθανότητα των ενδεχομένων: Γ « ο υπάλληλος είναι γυναίκα »

Λ « ο υπάλληλος είναι απόφοιτος Λυκείου »

Π « ο υπάλληλος είναι άνδρας ή πτυχιούχος Α.Ε.Ι »

Γ. Αν επιλεγεί τυχαία ένας υπάλληλος απόφοιτος Λυκείου, να βρείτε τη πιθανότητα του ενδεχομένου H « ο υπάλληλος είναι άνδρας »

Δ. Αν επιλεγεί τυχαία μια υπάλληλος, να βρείτε τη πιθανότητα του ενδεχομένου Θ « η υπάλληλος είναι πτυχιούχος Α.Ε.Ι »

43. Έστω $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με

$P(-2) = \frac{1}{2}$, $P(-1) = \frac{1}{4}$, $P(0) = \frac{1}{2}$, $P(1) = P(2) = k$.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3a^2x^2 - 6ax - 2012$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \Omega$

α) Να δείξετε ότι $k = \frac{1}{10}$.

β) Αν A, B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω , όπου

$A = \{a \in \Omega / \text{η συνάρτηση } f \text{ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για } x_0 = 1\}$ και

$B = \{a \in \Omega / \text{η συνάρτηση } f' \text{ έχει στο } x_1 = 0 \text{ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία } \psi = -24x\}$

β₁) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A , B και $A \cup B$.

β₂) Να δείξετε ότι: $P(B' - A') = P(A' - B') = P(A) = P(B)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

44. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

Επιλέγουμε στην τύχη ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$.

Αν $f(x) = \lambda x^3 - 2\lambda x^2 + 4x + 1$, να βρείτε την πιθανότητα η συνάρτηση f να μην έχει τοπικά ακρότατα.

45. Έστω $\Omega = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\mu}{3}x^3 - 2x^2 + (\mu + 3)x + 2010$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν A , B και Γ ενδεχόμενα του Ω , όπου $A = \{\mu \in \Omega / \text{η } f \text{ έχει δύο τοπικά ακρότατα}\}$,

$B = \{\mu \in \Omega / \text{η } f \text{ έχει ένα τοπικό ακρότατο}\}$ και $\Gamma = \{\mu \in \Omega / \text{η } f \text{ δεν έχει τοπικά ακρότατα}\}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: A , B , $A \cup B$ και Γ .