

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1000\}$ και τα ενδεχόμενά του:

A : « αριθμός πολλαπλάσιο του 4 » και

B : « αριθμός πολλαπλάσιο του 6 »

Επιλέγουμε στην τύχη έναν αριθμό. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) A β) B γ) $A \cap B$ δ) $A \cup B$ ε) $A - B$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό α από το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και έναν αριθμό β από το σύνολο $B = \{0, 1, 2, 3\}$

α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

β) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

K : « η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες »

L : « η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + 1 = 0$ έχει μία ρίζα πραγματική διπλή »

M : « η εξίσωση $\alpha x^2 + 2\beta x + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες »

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Θεωρούμε το δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

α) Αν $P(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η $P(\omega_4)$

β) Αν $P(\omega_1) = P(\omega_4) = \frac{1}{6}$ και $P(\omega_2) = 3 \cdot P(\omega_3)$, να βρεθούν οι $P(\omega_2)$ και $P(\omega_3)$

γ) Αν $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{7}{12}$, να βρεθεί η $P(\omega_3)$

ΑΣΚΗΣΗ 4^η

Η Γ' τάξη ενός Λυκείου έχει 80 μαθητές και μαθήτριες. Το 87,5% των μαθητών και τα $\frac{5}{8}$ των

μαθητριών συμμετείχαν στην πενθήμερη εκδρομή της τάξης τους. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο. Αν η πιθανότητα να είναι μαθητής και να μην συμμετείχε στην πενθήμερη εκδρομή της Γ' Λυκείου είναι 6,25%, να βρείτε:

α) Πόσους μαθητές και πόσες μαθήτριες έχει η Γ' τάξη του Λυκείου.

β) Την πιθανότητα να είναι μαθήτρια και να μην συμμετείχε στην πενθήμερη εκδρομή.

ΑΣΚΗΣΗ 5^η

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και για τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $B = \{\omega_3, \omega_4\}$ ισχύει

$$P(B) = P(A) + \frac{2}{9}, \text{ να βρείτε τις πιθανότητες:}$$

$$P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3) \text{ και } P(\omega_4)$$

ΑΣΚΗΣΗ 6^η

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$ και $P(\omega_3)$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και ισχύει $P(\omega_3) = 2P(\omega_1)$. Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$ και $P(\omega_3)$

ΑΣΚΗΣΗ 7^η

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}^*$, ώστε οι αριθμοί $1 - \frac{\kappa}{6}$, $\frac{1}{2\kappa}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{\kappa}{12}$ να παριστάνουν αντίστοιχα τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$ και $\{\omega_4\}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

ΑΣΚΗΣΗ 8^η

Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A') = \frac{1}{2}$,

$$P(A \cup B) = \frac{9}{10} \text{ και } P(A \cap B') = \frac{3}{10}. \text{ Να βρείτε τις πιθανότητες:}$$

$$\alpha) P(A) \quad \beta) P(A \cap B) \quad \gamma) P(B) \quad \delta) P((A - B) \cup (B - A))$$

ΑΣΚΗΣΗ 9^η

Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(B) = \frac{3}{8}$,

$$P(A' \cap B') = \frac{1}{8} \text{ και } P(A' \cup B') = \frac{7}{8}. \text{ Να βρείτε τις πιθανότητες:}$$

$$\alpha) P(A \cup B) \quad \beta) P(A \cap B) \quad \gamma) P(A) \quad \delta) P(A' - B')$$

ΑΣΚΗΣΗ 10^η

Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(B') = \frac{7}{12}$,

$$P(A' - B) = \frac{1}{4} \text{ και } P((A - B) \cup (B - A)) = \frac{7}{12}. \text{ Να βρείτε τις πιθανότητες:}$$

$$\alpha) P(B) \quad \beta) P(A \cup B) \quad \gamma) P(A \cap B) \quad \delta) P(B' - A')$$

ΑΣΚΗΣΗ 11^η

Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,50$, $P(B) = 0,40$ και $P(A \cap B) = 0,18$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- α) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα A και B.
- β) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.
- γ) Να πραγματοποιηθεί μόνο το A.
- δ) Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A και B.
- ε) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

ΑΣΚΗΣΗ 12^η

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B είναι $\frac{13}{20}$, ενώ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από αυτά είναι $\frac{17}{20}$, να βρείτε:

- α) Την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B.
- β) Αν επιπλέον η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το A είναι $\frac{2}{5}$, να βρείτε την πιθανότητα:
 - i) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.
 - ii) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B.
 - iii) Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B.
 - iv) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A και B.

ΑΣΚΗΣΗ 13^η

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με $P(A) = \frac{7}{15}$,

$P(A - B') = \frac{2}{15}$ και $P(A' - B) = \frac{2}{15}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

- α) $P(A \cap B)$ β) $P(A \cup B)$ γ) $P(B)$ δ) $P(A \cap B')$ ε) $P(A' - B')$

ΑΣΚΗΣΗ 14^η

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν τα ενδεχόμενα A, $A - B$ και $A \cup B$

ανά δύο δεν είναι ισοπίθανα και οι πιθανότητές τους $P(A)$, $P(A - B)$ και $P(A \cup B)$ είναι

στοιχεία του συνόλου $\Sigma = \{x / x \text{ ρίζα της εξίσωσης } (36x^2 - 25)(6x^2 - 5x + 1) = 0\}$,

να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- α) Να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B.
- β) Να πραγματοποιηθεί το B.
- γ) Να πραγματοποιηθεί μόνο το B.
- δ) Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A και B.
- ε) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

ΑΣΚΗΣΗ 15^η

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι $\frac{3}{8}$, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο B είναι $\frac{1}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από A και B είναι $\frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- α) Να πραγματοποιηθεί το A .
- β) Να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B .
- γ) Να πραγματοποιηθεί το B .
- δ) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B .
- ε) Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B .

ΑΣΚΗΣΗ 16^η

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν ισχύουν οι σχέσεις:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A) > P(B)$
- $P(A \cup B) = 4P(A \cap B) = \frac{2}{3}$

τότε να βρείτε:

- α) Τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$
- β) Την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A .
- γ) Την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο B .
- δ) Την πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A και B .
- ε) Την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B .

ΑΣΚΗΣΗ 17^η

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με $N(\Omega) = 60$, που αποτελείται από ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του Ω , τα οποία ικανοποιούν τη σχέση:

$$25 \cdot [P(A)]^2 + 9[P(B)]^2 = 20 \cdot P(A) + 6 \cdot P(B) - 5, \text{ τότε:}$$

- α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.
- β) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων A και B .
- γ) Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B είναι $\frac{1}{3}$, να βρείτε: i) την πιθανότητα $P(A \cap B)$ ii) την πιθανότητα $P(A' - B')$

ΑΣΚΗΣΗ 18^η

Έστω ένας τριψήφιος αριθμός $24x$. Επιλέγουμε τυχαία το ψηφίο των μονάδων. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- α) « ο αριθμός διαιρείται με το 3 και με το 5 »
- β) « ο αριθμός διαιρείται με έναν τουλάχιστον από τους αριθμούς 3 και 5 »
- γ) « ο αριθμός διαιρείται μόνο με το 3 »
- δ) « ο αριθμός διαιρείται μόνο με έναν από τους αριθμούς 3 και 5 »
- ε) « ο αριθμός δεν διαιρείται ούτε με το 3 ούτε με το 5 »
- στ) « ο αριθμός διαιρείται με έναν το πολύ από τους αριθμούς 3 και 5 »

ΑΣΚΗΣΗ 19^η

Ένα κουτί περιέχει 5 κίτρινες, x πράσινες και y γαλάζιες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το κουτί. Αν η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη ή γαλάζια μπάλα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή γαλάζια είναι $\frac{3}{5}$, τότε:

- α) Να βρείτε τα x, y καθώς επίσης και πόσες μπάλες έχει το κουτί.
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή πράσινη μπάλα.

ΑΣΚΗΣΗ 20^η

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{5}{8}$, τότε: α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

- β) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$ γ) Να αποδείξετε ότι $P(A - B) \leq \frac{3}{8}$

ΑΣΚΗΣΗ 21^η

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και A, B δύο ενδεχόμενα του Ω . Υποθέτουμε ότι $P(A') \leq \frac{11}{25}$ και $P(B') \leq \frac{13}{25}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $P(A \cap B) \geq \frac{26}{25} - P(A \cup B)$ β) $A \cap B \neq \emptyset$

ΑΣΚΗΣΗ 22^η

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , με $B \subseteq A$ ισχύει η σχέση:

$$4 \cdot [P(A)]^2 - P(A) + P(B) - 4 \cdot P(A) \cdot P(B) < 0 \quad (1).$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $P(A) \neq P(B)$ και $A \neq B$
β) $0 < P(A) < \frac{1}{4}$ και $P(A \cap B) < \frac{1}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ 23^η

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει $P(A' \cup B) = P(A) + P(A \cap B)$,

- τότε να αποδείξετε ότι: α) $P(A) = \frac{1}{2}$ β) $P(A - B) \leq \frac{1}{2}$ γ) $P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$
δ) $P(B - A) \geq P(B) - P(A)$

ΑΣΚΗΣΗ 24^η

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύει $P(A' \cup B) = \frac{1}{2}$ (1),

- τότε να αποδείξετε ότι: α) $P(A - B) = \frac{1}{2}$ β) $P(A) \geq \frac{1}{2}$ γ) $P(B) \leq \frac{1}{2}$
δ) $P(B - A) \leq P(A - B)$

ΑΣΚΗΣΗ 25^η

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και δύο ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$. Αν είναι $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $A - B = B'$
- β) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A - B)$
- γ) Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) = 1$
- δ) Να αποδείξετε ότι $P(A \cap B) = 0$
- ε) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ΑΣΚΗΣΗ 26^η

Σε μια επιχείρηση το 45% των εργαζομένων είναι γυναίκες, το 55% είναι πτυχιούχοι και το 25% είναι γυναίκες πτυχιούχοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο εργαζόμενος να είναι:

- α) γυναίκα ή πτυχιούχος
- β) γυναίκα και όχι πτυχιούχος
- γ) άνδρας πτυχιούχος
- δ) άνδρας ή πτυχιούχος.

ΑΣΚΗΣΗ 27^η

Σε μια πόλη το 10% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 60% έχουν βίντεο και το 5% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαία ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα:

- α) Να έχει τηλεόραση ή βίντεο.
- β) Να έχει τηλεόραση και βίντεο.
- γ) Να έχει μόνο τηλεόραση.
- δ) Να έχει ή τηλεόραση ή βίντεο.

ΑΣΚΗΣΗ 28^η

Σε μια πόλη το 65% των κατοίκων δεν έχουν αυτοκίνητο, το 80% δεν έχουν μηχανάκι και το 25%

έχουν μόνο αυτοκίνητο. Επιλέγουμε τυχαία ένα κάτοικο. Να βρείτε την πιθανότητα:

- α) Να έχει αυτοκίνητο και μηχανάκι.
- β) Να έχει αυτοκίνητο ή μηχανάκι.
- γ) Να μην έχει ούτε αυτοκίνητο ούτε μηχανάκι.
- δ) Να έχει μόνο μηχανάκι.
- ε) Να έχει ή αυτοκίνητο ή μηχανάκι.

ΑΣΚΗΣΗ 29^η

Από τους 216 μαθητές ενός Λυκείου, 27 μαθητές μαθαίνουν μόνο Γερμανικά, 54 μαθητές μαθαίνουν μόνο Γαλλικά και 108 μαθητές δεν μαθαίνουν ούτε Γερμανικά ούτε Γαλλικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

- α) Να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο αυτές γλώσσες.
- β) Να μαθαίνει Γερμανικά.

- γ) Να μαθαίνει Γαλλικά.
- δ) Να μαθαίνει Γερμανικά και Γαλλικά.
- ε) Να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο αυτές γλώσσες.
- στ) Να μαθαίνει το πολύ μία από τις δύο αυτές γλώσσες.

ΑΣΚΗΣΗ 30^η

Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι οι τιμές του X , στις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, τότε να βρείτε τις πιθανότητες:

- α) $P(A)$ και $P(B)$
- β) $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$
- γ) $P(A \cap B')$ και $P(A' \cap B)$
- δ) $P(A' - B')$ και $P(B' - A')$

ΑΣΚΗΣΗ 31^η

Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) < P(B)$ και οι πιθανότητες $P(A), P(B)$ είναι οι τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = -6x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{24}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε:}$$

- α) Τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$
- β) Τη διάμεσο των αριθμών $P(A), P(B), P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$
- γ) Τη μέση τιμή των αριθμών $P(A), P(B), P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$

ΑΣΚΗΣΗ 32^η

Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) < P(B)$ και οι πιθανότητες $P(A), P(B)$ είναι οι τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{32}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε:}$$

- α) Τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$
- β) Τη διάμεσο των αριθμών $P(A), P(B), P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$
- γ) Τη μέση τιμή των αριθμών $P(A), P(B), P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$

ΑΣΚΗΣΗ 33^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω .

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Αν είναι $A \cap B \neq \emptyset$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } e^{P(A)-P(A \cap B)} \leq \frac{P(A)}{P(A \cap B)}$$

$$\text{ii) } e^{P(A \cup B) - P(A)} \leq \frac{P(A \cup B)}{P(A)}$$

$$\text{iii) } P(A \cup B) \leq e^{P(A \cup B) - 1}$$

γ) Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη

$x_0 = P(A) \neq 0$ είναι παράλληλη με την ευθεία (ζ) : $y = P(A)e^{-P(A)}x + 1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \text{ii) } e^{P(A \cap B)} \geq 2\sqrt{e} P(A \cap B) \quad \text{για } A \cap B \neq \emptyset$$

ΑΣΚΗΣΗ 34^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln 2x$, $x \in (0, +\infty)$ και δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω .

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν είναι $\emptyset \neq A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι: i) $P(B) \leq e^{P(B)-1}$ και

$$\text{ii) } \frac{P(A)}{P(B)} \leq \frac{e^{P(A)}}{e^{P(B)}}$$

γ) Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = P(A) > 0$ σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία 135° , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \text{ii) } e^{P(A \cap B)} \geq 2\sqrt{e} P(A \cap B) \quad \text{για } A \cap B \neq \emptyset$$

ΑΣΚΗΣΗ 35^η

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν οι πιθανότητες:

$$P(A \cap B), P(A - B), P(A), P(A \cup B)$$

με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $P(B) = P(A - B)$

β) Να αποδείξετε ότι $P(B - A) = P(A \cap B)$

γ) Αν επιπλέον οι αριθμοί $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A - B), P(B - A), P(A \cup B)$

έχουν διάμεσο $\delta = \frac{1}{3}$, τότε να βρείτε: i) Τις πιθανότητες $P(B), P(A - B)$ και $P(A)$

ii) Τις πιθανότητες $P(A \cap B), P(B - A)$ και $P(A \cup B)$

iii) Το εύρος R και τη μέση τιμή $\bar{X}$, των έξι παραπάνω αριθμών.

ΑΣΚΗΣΗ 36^η

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με:

$$P(A) = \frac{2\kappa - 11}{\kappa^2 + 11}, \quad P(B) = \frac{\kappa - 5}{\kappa^2 + 11} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{\kappa - 6}{\kappa^2 + 11}$$

όπου κ θετικός ακέραιος.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa \geq 6$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του κ η πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$ γίνεται μέγιστη. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της $P(A \cup B)$;

γ) Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.