

Ασκήσεις στη Παράγωγο

1. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f(1+x)-x+1$, $x \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $A(3,6)$ εφαπτόμενη παράλληλη στην ευθεία $\psi=2x-4$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $g'(2)=1$.

β) Να βρείτε:

β₁. τις εφαπτόμενες, (ϵ_f) και (ϵ_g) , των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(3,6)$ και $B(2,g(2))$ και

β₂. το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες και τον άξονα $\psi'\psi$.

2. Έστω η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f(x)+x^2-1$, $x \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $A(0, f(0))$ εφαπτόμενη κάθετη στην ευθεία $\psi=-x-4$.

α) Να δείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ και ii) η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $g'(0)=1$.

β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες, (ϵ_f) και (ϵ_g) , των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0,g(0))$.

γ) Αν M, N σημεία των εφαπτόμενων (ϵ_f) και (ϵ_g) αντίστοιχα με την ίδια τετμημένη, να αποδείξετε ότι $(MN)=1$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+2x$. Να αποδείξετε ότι :
 $(1-x) \cdot f''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x \cdot e^{-x}$. Να αποδείξετε ότι :
 $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του α ,
ώστε $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι $f(6)=3$,
 $f'(6)=7$, $g(3)=6$ και $g'(3)=4$, τότε να υπολογίσετε τον αριθμό:

α) $F'(3)$, όπου $F(x)=f(g(x))$, $x \in \mathbb{R}$ β) $G'(6)$, όπου $G(x)=g(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις στη Παράγωγο

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f'(x) + f^2(x) = -1$. β) Αν $f''(x) = 0$, τότε $f(x) = 0$.

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 5$, οι οποίες

α) είναι παράλληλες προς την ευθεία $\zeta : 10x + y - 6 = 0$.

β) είναι κάθετες στην ευθεία $\eta : x + 14y + 28 = 0$.

γ) σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\omega} = 135^\circ$.

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (\ln x)^2$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + \alpha}{2x + \alpha}$. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε

η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, f(-1))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

11. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\varepsilon : y = 3x - 1$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.

12. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(2, 0)$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $\zeta : 4x - y - 1 = 0$.

Ασκήσεις στη Παράγωγο

13. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , ώστε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και να εφάπτεται της ευθείας $\delta : y = x$ στην αρχή των αξόνων.

14. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $f(\eta\mu x) = e^x \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ και $g(x) = x^2 - \alpha x + \beta$.

Να βρείτε :

α) την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

β) τις τιμές των α, β , ώστε η (ϵ) να εφάπτεται στη C_g στο σημείο $B(2, g(2))$.

16. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $2f(x) - f(2-x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 3$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(1) = 0$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - 1}{h}$.

17. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ και $g(x) = e^x - 1$. Αν οι γραφικές παραστάσεις έχουν στο κοινό τους σημείο $A(1, \psi_0)$ κοινή εφαπτομένη, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β καθώς και την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

18. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-1} + \alpha$ και $g(x) = \ln x + \beta, x > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν οι γραφικές παραστάσεις έχουν στο κοινό τους σημείο $M(x_0, 2)$ κοινή εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $2x - 2y = 10$,

να βρείτε: i) τους πραγματικούς αριθμούς α, β και

ii) την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.

Ασκήσεις στη Παράγωγο

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+\beta$, $x>0$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $g(x)=\alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Αν $M(1,\psi_M)$ κοινό σημείο των C_f , C_g , να βρείτε:

- i) τις τιμές των α , β , ώστε οι γραφικές παραστάσεις να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο M και
- ii) την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-\alpha}-1$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και

$$g(x)=\frac{\beta}{x+1}, x \neq -1, \beta \in \mathbb{R}.$$

Αν $M(1,0)$ σημείο της C_f ,

- i) να δείξετε ότι $\alpha=1$ και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο M .
- ii) να βρείτε σημείο $N(x_0, g(x_0))$ της C_g , καθώς και το β , αν η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο M εφάπτεται και της C_g στο N .

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x \ln x$, $x > 0$.

- i) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $2x-y-1=0$.

Στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

- ii) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+x$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

- α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.
- β) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη στο M , συναρτήσει του α .
- γ) Αν το εμβαδό του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$, να βρείτε το α .

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\alpha+1)e^{(\alpha-1)x}-\frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την παράγωγο της f .
- β) Να βρείτε τις τιμές του α , αν η εφαπτομένη στο σημείο $M(1, f(1))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°