

Ασκήσεις στη Μονοτονία-Ακρότατα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x$. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4 \ln x - 2$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $x^2 \geq 2 \ln x + 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

5. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^5 + 15x^3 + 4$, η εφαπτομένη της έχει την ελάχιστη κλίση.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu^2(2x) - 5x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^2 - x^2}{2\alpha x} - \ln \alpha + \ln x$, $\alpha > 0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν $\beta > \alpha$ να αποδείξετε ότι $\ln \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$.

8. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$f(x) = \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)x^3 - 2\left(\beta + \frac{1}{4}\right)x^2 - 3x + 2$, να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα

σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Ασκήσεις στη Μονοτονία-Ακρότατα

9. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3\alpha^2 x^2 - 6\alpha x - 1$, να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$.

10. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 2x$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = -8x + 1$.

11. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\alpha x^2 + 4x + 2$, να είναι γνησίως αύξουσα.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1-\alpha)x^2 + \alpha(1-x)^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Αν συμβολίσουμε με $g(\alpha)$ την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f , να βρείτε τον α , ώστε η συνάρτηση $g(\alpha)$ να γίνεται μέγιστη.

13. Τα έσοδα και τα έξοδα μιας εταιρείας μετά από t χρόνια, σε χιλιάδες ευρώ, δίνονται αντιστοίχως από τις συναρτήσεις $E(t) = t^3 - 5t^2 + 8t$ και $K(t) = t^2 - 4t + 8$.
Να βρείτε:

α) Ποιο έτος η εταιρεία θα έχει τα λιγότερα έξοδα;

β) Το ποσό των παραπάνω εξόδων.

γ) Πότε η εταιρεία θα αρχίσει να έχει κέρδη;

14. Η απόδοση μιας επένδυσης μετά από t χρόνια, σε χιλιάδες ευρώ, δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \ln(t^2 + 25) - \ln 25$, $t \geq 0$. Να βρείτε σε πόσα χρόνια ο ρυθμός μεταβολής της επένδυσης γίνεται μέγιστος.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x$, $x > 0$.

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης και στη συνέχεια να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

iii) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2\ln x}{x^2 - 25}$.

iv) Να δείξετε ότι $xf''(x) + f'(x) = 4x - 5$.

v) Να βρείτε τα x ώστε $g'(x) < 0$, όπου $g(x) = f(e^x)$.

Ασκήσεις στη Μονοτονία-Ακρότατα

16. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{3}x^3 - 2x^2 + \alpha x + 2012$

- i) να έχει δύο τοπικά ακρότατα.
- ii) να έχει ένα ακρότατο.
- iii) να μην έχει κανένα ακρότατο.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - x^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}$.

- i) Αν $A(0, 2)$ σημείο της C_f και η ευθεία $4x - \psi + 5 = 0$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(-1, f(-1))$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ .
- ii) Αν $\alpha = 1, \beta = -1$ και $\gamma = 2$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- i) Αν $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ σημείο της C_f , η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(-2, f(-2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $\psi = 12x$ και η συνάρτηση f έχει στο σημείο με τετμημένη 1 τοπικό ακρότατο, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ .
- ii) Αν $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 2$ και $\gamma = -\frac{1}{3}$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να έχει στα σημεία $-1, 2$ τοπικά ακρότατα και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.
- ii) Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$ και $\gamma = 1$, να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{\lambda}{3}x^3 - \frac{1}{2}\lambda^2x^2 - \lambda^3x + 1, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο της f , να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- α) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με

Ασκήσεις στη Μονοτονία-Ακρότατα

εξίσωση $\psi=3x$ και η συνάρτηση f έχει στο σημείο $X_0=-1$ τοπικό ακρότατο, το 3, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ .

β) Αν $\alpha = -1, \beta=5$ και $\gamma=0$,

i) να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

ii) να βρείτε σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.

22. Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι ίσο με 10. Να βρείτε αυτούς τους αριθμούς έτσι, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο, καθώς και το ελάχιστο αυτό άθροισμα.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3 \cdot \ln x, x>0$.

i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να δείξετε ότι: ισχύει $e x^3 \ln x^3 + 1 \geq 0$, για κάθε $x>0$.

iii) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

24. Το κόστος K (σε χιλιάδες ευρώ) της εβδομαδιαίας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μία βιομηχανία που απασχολεί v εργαζομένους δίνεται από τον τύπο $K(x)=2x^3-3(v+1)x^2+2v^4, x>0$. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι

$$p = \frac{-v^3 - 3v + 6}{x} + 3v \text{ (σε χιλιάδες ευρώ)}.$$

i) Να αποδείξετε ότι το κόστος K γίνεται ελάχιστο, όταν $x=v+1$.

ii) Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται εβδομαδιαίως και από πόσους εργαζομένους, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

25. Ένας πέτρινος τοίχος μήκους x καλύπτει τη μια πλευρά ενός ορθογωνίου κτήματος. Θέλουμε να περιφράξουμε το κτήμα με συρματοπλέγμα μήκους λ , χρησιμοποιώντας τον τοίχο σαν μια πλευρά.

α) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, συναρτήσει του λ , ώστε το εμβαδόν του κτήματος να είναι μέγιστο.

β) Αν το μέγιστο εμβαδό είναι 8τ.μ, να βρείτε το μήκος του συρματοπλέγματος και τις διαστάσεις του κτήματος.

26. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 8μ επί 6μ θα κατασκευαστεί μία δεξαμενή νερού, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα

Ασκήσεις στη Μονοτονία-Ακρότατα

τετράγωνα πλευράς $x-1$ και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα πάνω οι πλευρές του τετραγώνου.

i) Να αποδείξετε ότι ο όγκος V της δεξαμενής δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = (10 - 2x) \cdot (8 - 2x) \cdot (x - 1), x \in (1, 4).$$

ii) Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις των τετραγώνων που θα κοπούν, ώστε ο όγκος V της δεξαμενής να γίνεται μέγιστος.

27. Ένα κυλινδρικό δοχείο με ύψος h και ακτίνα βάσης x , ανοικτό από πάνω, έχει χωρητικότητα 2π κ.μ. Να βρείτε τις διαστάσεις του δοχείου, ώστε το κόστος του μετάλλου από το οποίο θα κατασκευαστεί να είναι το ελάχιστο δυνατό.