

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=ax^3-x^2+\beta x+\gamma$ και $Q(x)=(2\alpha-3)x^3+\beta^2x^2+(\beta+\gamma)x+\alpha+\beta+\gamma$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες το πολυώνυμο $F(x)=P(x)+Q(x)$ είναι βαθμού:

α) τρίτου β) μικρότερου ή ίσου του 2 γ) πρώτου και δ) μηδενικού

2. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε, να ισχύει

$$\frac{3x+2}{x^2-3x+2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

3. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(x-5) = 6x^2 - 2x + 9$, να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x+4)$.

4. Για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ ισχύουν: $P(x+5) = x^2 \cdot Q(x) + 2x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x+2)$ είναι 5.

Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-3)$.

5. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ως ρίζα το 2, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(3x^2 - 1) + x^2 \cdot P(x-1) - P(0) \cdot x$ έχει ως ρίζα τον αριθμό 1.

6. Αν πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x^3 - 8$ δίνει υπόλοιπο $x^2 - x + 11$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$.

7. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-2$ δίνει υπόλοιπο 1, ενώ διαιρούμενο με το $x-3$ δίνει υπόλοιπο 14. Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 5x + 6)$.

8. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $n \geq 2$ έχει παράγοντες τα $x - \rho_1$ και $x - \rho_2$ με $\rho_1 \neq \rho_2$, τότε θα έχει παράγοντα και το $(x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$ και αντιστρόφως.

9. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $n \geq 2$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$, να αποδείξετε ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του πηλίκου της διαίρεσης $P(x) : (x-\rho)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

10. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

11. Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - \alpha x^3 + 5x^2 - 2x + \beta$ να έχει παράγοντα το $x+1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ να είναι -10 .

12. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $n \geq 2$. Αν είναι $P(-1) = P(\frac{1}{2}) - 3 = 1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(2x^2 + x - 1)$.

13. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x) = 4x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 2$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $S(x) = P(Q(x))$ έχει παράγοντα το $x + 1$.

14. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x) = P(x) - x$. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του $Q(x)$, τότε να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και του πολυωνύμου $F(x) = P(P(x)) - x$.

15. Α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

Να αποδείξετε ότι: α) $P(0) = \alpha_0$ και β) $P(1) = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0$

Β. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^{2011} + (2x^2 - 1)^{2010} + 11$ Να υπολογίσετε
α) το σταθερό όρο του $P(x)$. β) το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.

Γ. Αν το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου είναι μηδέν, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο αυτό έχει παράγοντα το $x - 1$.

16. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^2 - 4$ αφήνει υπόλοιπο $2x + 1$. Να βρεθούν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με τα πολυώνυμα $x - 2$ και $x + 2$.

17. Να προσδιορίσετε το $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε το $x - 1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου
 $P(x) = x^4 - (\sin^2 \theta) x^3 + 2(\eta \mu \theta) x^2 + x - 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

18. Το πολυώνυμο $P(x)=x^4-ax^3+3x^2+\beta x+2$ έχει ως παράγοντες τα πολυώνυμα $x-1$ και $x+2$.

Να βρείτε: α) τους πραγματικούς αριθμούς α και β και

β) το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)(x+2)$.

19. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^3 - (\kappa + 1)x^2 + (\kappa - 1)x + 2$, $\kappa \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει ότι $P(2) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $x+3$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = x-2$.

20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ δια του x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ) Για $\alpha=3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

21. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και $P(-1)=8$, να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β .

ii) Αν $\alpha=1$ και $\beta=-5$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^4 + (7-2\eta\mu\theta)x^3 - 8x^2 - 4(1+\eta\mu\theta)x + 4$

που έχει ως παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

α) Να προσδιορίσετε το $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Αν $\theta = \frac{\pi}{6}$ να λύσετε i) την εξίσωση $P(x)=0$ και ii) την ανίσωση $P(x)<0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

23. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^4 - (\lambda^2 - 1)x^3 - (3\lambda + 1)x^2 + 6\lambda x - 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το λ , ώστε το $x-1$ να είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii) αν $\lambda=2$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

24. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + \beta$, $Q(x) = x^2 - x - 2$.

A) Αν οι παράγοντες του $Q(x)$ είναι και παράγοντες του $P(x)$ να βρείτε τις τιμές των a , β .

B) Αν $a=-3$ και $\beta=2$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

25. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x^2 - 5x + 6) = 1$

ii) $(x^2 + x + 1) \cdot \left(x^2 + x + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(1 - x - x^2)$ iii) $(x - 11)^6 - 9 \cdot (x - 11)^3 + 8 = 0$

26. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$

ii) $\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} \leq x^2$ iii) $\frac{x^3 + 2x - 8}{x - 2} \geq 5$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $1 + \sqrt{x^2 - 9} = x$ ii) $x - \sqrt{5 - x} = 3$

iii) $\sqrt{3x - 2} + 2 = 2\sqrt{x + 2}$ iv) $x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} = 10$

iv) $2x^2 - x + 3 = \sqrt{2x^2 - x + 15}$ v) $\sqrt{x + 2} = \lambda$

28. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $\sqrt{2x + 1} > \sqrt{3 - x}$

ii) $\sqrt{x^2 - 40x + 39} \leq x - 1$ iii) $\sqrt{2x + 5} \geq 2x - 1$