

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f^2(x) - g^2(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) + g^2(x) = 1, x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $ef(x) = e^2 - 1$.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x - 2^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $4f(x) = 15$.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (4\lambda^2 - 4\lambda + 2)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 3\lambda + 3)^x, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή του λ .

β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε η συνάρτηση f να είναι:

i) γνησίως αύξουσα ii) γνησίως φθίνουσα

6. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, να δείξετε ότι $(\alpha^x + \beta^x)(\alpha^{-x} + \beta^{-x}) \geq 4, x \in \mathbb{R}$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$ με $0 < a \neq 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

8. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{9}{16}$ ii) $5^{|4x-6|} = 25^{3x-5}$

iii) $2^x - 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3$ iv) $3^x - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = -1$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $2 \cdot 3^{3x-1} + 27^{\frac{x-2}{3}} = 9^{x-1} + 2 \cdot 3^{2x-1}$

ii) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ iii) $3^{\sin x - \frac{1}{2}} + 3^{\sin x + \frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$

iv) $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 8$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$ ii) $5^{x+1} - 26\sqrt{5^x} + 5 = 0$

iii) $x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$ iv) $2^{\eta \mu^2 x} - 5 \cdot 2^{\sigma \upsilon \nu^2 x} + 9 = 0$

v) $4^{\sqrt{x^2-2}+x} \cdot 5 \cdot 2^{\sqrt{x^2-2}+x-1} = 6$ vi) $10^{\frac{1}{x}} = 5 \left(10 + 10^{\frac{1}{2x}} \right)$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$ ii) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$

iii) $27^{x+\frac{2}{3}} - 9 \cdot 18^x - 4 \cdot 12^x + 2^{3x+2} = 0$ iv) $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $x^{x^3-3x+2} = 1$ ii) $(x^2 - 3x + 2)^{x^2-5x+6} = 1$

iii) $(x^2 - 4x + 3)^{x^2-x-2} = (x^2 - 4x + 3)^{2-x}$ iv) $(x^2 - 1)^{x^2-3x+2} = 1$

13. Να λύσετε τα συστήματα: i) $\begin{cases} 2^x + 3^\psi = 11 \\ 2^x + 3^{\psi+1} = 29 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 5^x \cdot 7^\psi = 175 \\ x + \psi = 3 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 3^{\frac{x-\psi}{2}} - 3^{\frac{x-\psi}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+\psi}{3}} + 2^{\frac{x+\psi}{6}} = 2 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 2^x + 3^\psi = 7 \\ 4^x + 9^\psi = 25 \end{cases}$ v) $\begin{cases} 8^x = 10^\psi \\ 2^x = 5^\psi \end{cases}$ vi) $\begin{cases} 2^x - 9^\psi = 15 \\ \sqrt{2^x} = 3 + 3^\psi \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

14. Να λύσετε τα συστήματα: i) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2^x \cdot (x+y) = 10 \\ x+y = 5^x \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x^2 - 7y + 10 = 1 \\ x + y = 14, \quad x > 0 \end{cases}$ v) $\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 3^y = 1 \\ 9^y - 8 \cdot 3^y = 9 \end{cases}$

vi) $\begin{cases} x^y + x^{-y} = 2 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$ vii) $\begin{cases} 2^{x+1} = 1 + 4y^2 \\ 2^x \leq 2y \end{cases}$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-3} \leq 19$ ii) $3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x < 2^{x+3} - 12 \cdot 3^{x-2}$

iii) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x < 0$ iv) $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 < 0$ v) $4^x + 2^{x+1} \leq 24$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} < 3^{x+4} - 5^{x+3}$ ii) $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x > 5 \cdot 6^x$

iii) $(2^x - 1) \cdot (2^x - 2) \cdot (2^x - 4) \leq 0$

17. Αν η εξίσωση $4x^2 - 4(2^\theta + 1)x + 9 = 0$ έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε

τον πραγματικό αριθμό θ .

18. Αν για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $x^2 - 4x + 3^{\eta \mu \theta} + 1 \geq 0$, να προσδιορίσετε το θ ,

όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

19. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha} \right)^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του α , ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) Αν $\alpha = 1$, να λύσετε: 1) την εξίσωση $f(2x) - 3f(x+1) = -8$ 2) την ανίσωση $f(2x) + 2 \leq 3f(x)$