

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln \frac{-x+1}{x+2}$ ii) $f(x) = \ln(x^2 - 1) + \ln(9 - x^2)$ iii) $f(x) = \ln(10^{x^2} - 10)$

iv) $f(x) = \sqrt{x+2} \cdot \log(x+1)^2$ v) $f(x) = \log_x(9 - x^2)$ vi) $f(x) = \log(-x^2 + 3x - 2)$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) \cdot \eta_{\mu x}$ είναι άρτια.

3. Να αποδείξετε ότι: i) $\frac{\log\sqrt{125} + \log\sqrt{27} - \log\sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$

ii) $3^{\log 3^4} + 4^{\log 2^3} + 1000^{\log 2} - e^{3\ln 2} = 13$

4. Αν ισχύει $\log\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{10}}\right) = (\log \alpha + \log 2\beta) - \frac{1}{2}$, $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

5. Αν οι αριθμοί $\log\left(\frac{1}{2} + 2^x\right)$, $\log(1 + 2^{1+x})$, 1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x .

6. Αν $\alpha, \beta > 0$ και ισχύει $\log\left(\frac{2\alpha + \beta}{4}\right) = \frac{\log \alpha + \log \beta}{2}$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $4\alpha^2$, $6\alpha\beta$, β^2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

7. i) Για ποιες τιμές του πραγματικού x οι αριθμοί $\log 4^{x+1}$, $\log(\sqrt{2} \cdot 3^x)$, $\log(\sqrt{3} \cdot 4^{x-1})$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;
ii) Όμοια, αν οι αριθμοί $\log(4^x + 2)$, $(x+2)\log\sqrt{2}$, $x\log 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

8. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\log(3x-1)+\log(8x-2)=2\log(4x-1)$

ii) $\log(3x^2-5x+8)=1$ iii) $\log(x^2+40x)=2+\log(x-8)$ iv) $(\ln x)^3-6(\ln x)^2+11\ln x-6=0$

v) $\frac{3\ln x}{\ln x - 2} = \ln x + 2$ vi) $\ln(e^{2x}+2)=x+\ln 3$ vii) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $10 \cdot x^{\log x} = x^2 \sqrt{x}$

ii) $(x-1) \cdot (1-\log 5) = \log(2^{x-1} + x^2 - 3x + 2)$

iii) $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$

iv) $\log(2x-1) + 2\log\sqrt{x-9} = 2$ v) $\log(3^x - 6) + \log 9 - \log 3 = x \log 3$

10. Να αποδείξετε ότι $5^{\log x} = x^{\log 5}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$25^{\log x} - 13(x^{\log 5} + 5^{\log x}) = -25$$

11. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \dots = 4022$$

12. Να λύσετε τα συστήματα: i) $\begin{cases} \log x + \log \psi = 5 \\ \log x - \log \psi = 3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \log(x^2 + \psi^2) = 1 + \log 8 \\ \log(x + \psi) = \log 3 + \log(x - \psi) \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \log\left(\frac{x}{\psi}\right) = 3 \\ \log x \cdot \log(x\psi) = 2, x > 1 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x^{\log \psi} = 2 \\ x \cdot \psi = 20 \end{cases}$

13. Να λύσετε τα συστήματα: i) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^{-\psi} = 2 \\ 2\log x + \log \psi = \log(4\psi) \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^\psi = 8 \\ 2\log x + \log \psi = \log 2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 5^x - 2^\psi = 1 \\ x \log 5 + \psi \log 2 = \log 20 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} x^{\log \psi} + \psi^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{x\psi} = 1 \end{cases}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

14. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $\ln^2 x - 4\ln x + 3 \leq 0$ ii) $\ln(x^2+1) + \ln(x-5) > \ln(2x^2-10x)$

iii) $\frac{1}{\log x - 1} < \frac{1}{\log x + 1} - 2$ iv) $\log(4 \cdot 3^x - 3) \geq 2x \log 3$

v) $2\ln x + \ln(x^2+3) > \ln(5x^3-3x^2)$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $\ln x \leq (\ln x)^3$ ii) $(\log x - 1)(\log x + 1)(\log x - 2) \leq 0$

iii) $\log(\log \frac{x-1}{x-2}) < 0$ iv) $x^{\ln x + 2} < e^3$

16. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του θ ώστε η εξίσωση

$x^2 - (\log \theta)x + 3\log \theta - 8 = 0$ να έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

17. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του θ ώστε η ανίσωση

$x^2 - 2(1 + \log \theta)x + 5 - \log^2 \theta \geq 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(11x^2 - 7x + 10) - \log x^2 - 1$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε τα x ώστε η γραφική παράσταση της f να είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5} \right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2+1)+f(x^2+2)=f(5x^2-x+2)$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \cdot \sqrt{f(x)} + f(x) - 12 > 0$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{3x} + 2e^x)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 3$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq \ln(3e^{2x})$.

23. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_v) με

$$\alpha_1 = \log 2, \alpha_2 = \log 4, \alpha_3 = \log 8, \dots, \alpha_v = \log 2^v, v \in \mathbb{N}^*.$$

α) Να δείξετε ότι : i) $\omega = \log 2$ ii) $\Sigma_5 = 15 \log 2$

β) Να βρείτε το πλήθος των όρων της αριθμητικής προόδου για τους οποίους έχουμε $\Sigma_v = 36 \log 2$.

24. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και $P(-1)=8$,
να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β .

ii) Αν $\alpha=1$ και $\beta=-5$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x + \ln^2 x - 5 \ln x + 3 > 0$.

25. Δίνεται η εξίσωση $(\log x)^3 = \log \left(\frac{x^3}{10^{k-1}} \right)$, $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το k , αν η εξίσωση έχει λύση την $x=100$.

β) Αν $k=-1$, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.