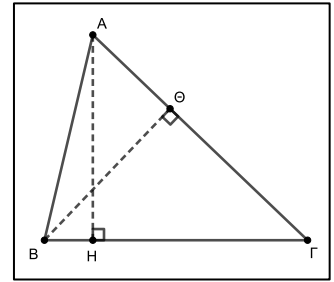


9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

1. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τα ύψη του AH και $B\Theta$.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Η προβολή της πλευράς $B\Gamma$ στην πλευρά AG είναι το τμήμα
- Η προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $B\Gamma$ είναι το τμήμα
- Το τμήμα $H\Gamma$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- Το τμήμα $A\Theta$ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- $AG^2 = AB^2 + \dots - 2 \cdot B\Gamma \cdot \dots$
- $B\Gamma^2 = \dots + AG^2 - 2 \cdot \dots \cdot A\Theta$



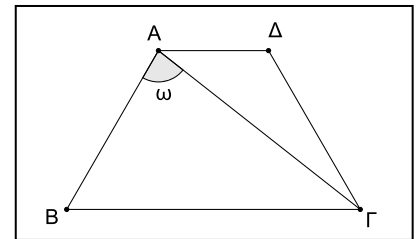
β) Αν $AB = 4$, $B\Gamma = 5$ και $AG = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $A\Theta$.

2. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι $A\Delta = 3$, $AB = \Gamma\Delta = 5$, $B\Gamma = 8$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 7$.

β) Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

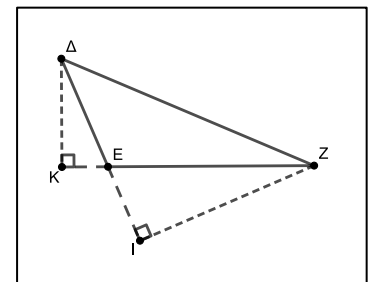
Δίνεται ότι $\text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2}$.



3. Στο τρίγωνο ΔEZ φέρουμε τα ύψη του ΔK και ZI .

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- Η προβολή της πλευράς ΔE στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
- Η προβολή της πλευράς ΔZ στην πλευρά EZ είναι το τμήμα
- Το τμήμα ΔI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- Το τμήμα EI είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
- $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2 \cdot EZ \cdot \dots$
- $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \cdot \dots \cdot \Delta I$



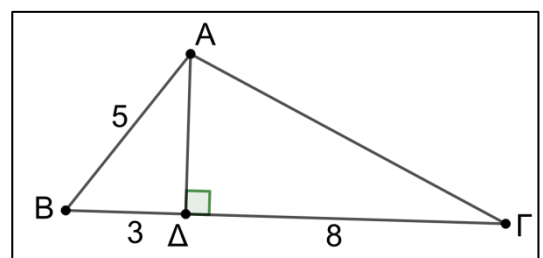
β) Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔI .

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Delta$ το ύψος του από την κορυφή A . Αν $B\Delta = 3$ και $\Gamma\Delta = 8$ να αποδείξετε ότι:

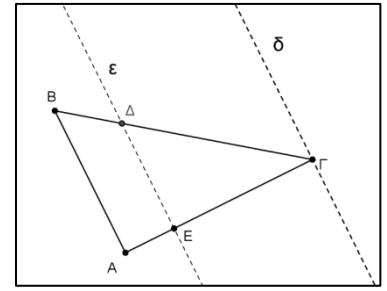
α) $A\Delta = 4$,

β) $AG = \sqrt{80}$,

γ) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

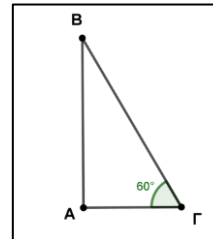


5. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 9$, $\Gamma A = 12$ και $\Gamma B = 15$ και ευθείες ε , δ παράλληλες στην AB , όπως αυτές του σχήματος.



- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.
- β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει τις πλευρές ΓA , ΓB σε σημεία E και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = 4$ και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ , τότε να υπολογίσετε
- το τμήμα ΔB ,
 - τις πλευρές του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 4$, $A\Gamma = 2$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.



- α) Να υπολογίσετε την πλευρά AB .
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

7. Τα μήκη των πλευρών α , β , γ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $\alpha = 7$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$.

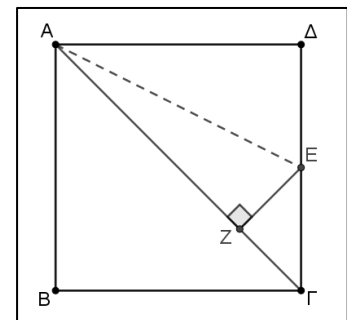
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.
- β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς AB στην πλευρά $A\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

8. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α και έστω E το μέσο της $\Delta\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } A\Gamma = \alpha\sqrt{2}, \quad \text{ii. } AE = \alpha \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

- β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος AE στην $A\Gamma$.



9. Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.
- β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.
- γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ .

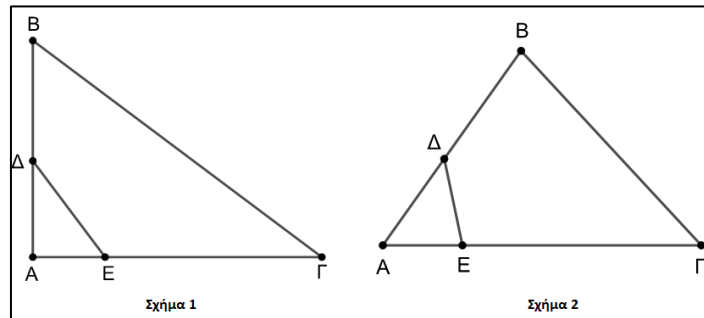
10. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ότι $AB = 9$, $AG = 12$, $AD = 4$ και $AE = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι $BΓ = 15$ (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

- i. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο,
- ii. $DE = 5$.

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι $BΓ = 10$ (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.
- ii. $DE = \frac{10}{3}$.



11. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AD < AB$, τη διχοτόμο της γωνίας του $\hat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά του ΔΓ σε σημείο Ε και τους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε είναι ισοσκελές».

Ισχυρισμός 2: «Το τμήμα ΔΕ είναι ίσο με την πλευρά ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ».

- α) Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.
- β) Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Δ και Ε να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.